



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Tiago Almeida Zanetti

Modelos de otimização linear inteira para o alinhamento de séries temporais.

Campinas
20/06/2026

Tiago Almeida Zanetti

Modelos de otimização linear inteira para o alinhamento de séries temporais.*

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Profa. Petra Maria Bartmeyer.

*Este trabalho foi financiado pela FAPESP/BEPE, projeto 2025/28693-7

Resumo

Este trabalho investiga o uso de formulações de programação por metas (*Goal Programming*) para o alinhamento de séries temporais, em comparação com o *Dynamic Time Warping* (DTW), o método que é o estado da arte nessa tarefa. Três variantes da formulação são propostas e modeladas como problemas de programação linear inteira mista. Para viabilizar a aplicação a séries longas, desenvolveu-se técnicas de redução do tempo de resolução. A avaliação é conduzida sobre dados sintéticos, sob cenários que simulam erros de captura de dados em *wearables*. O desempenho é medido por métricas de alinhamento e de reconstrução: erro de alinhamento, cobertura, precisão, revocação e F1 na detecção de *outliers*, R^2 , MAE e tempo de resolução. Os resultados mostram que as formulações por metas superam o DTW na qualidade do alinhamento quando há *outliers*, enquanto o DTW permanece mais rápido em termos absolutos. Entre as variantes, o EGP e RGP apresentam o melhor equilíbrio entre qualidade e custo. Conclui-se que *Goal Programming* e DTW possuem perfis complementares, sendo as formulações por metas preferíveis quando a robustez a pontos anômalos é prioritária.

Abstract

This work investigates the use of *Goal Programming* formulations for time series alignment, in comparison with *Dynamic Time Warping* (DTW), a method widely employed for this task. Three variants of the formulation are proposed and modeled as mixed-integer linear programming problems. To enable application to long series, time-reduction techniques are also employed. The evaluation is carried out on synthetic data, under scenarios that simulate data-capture errors in wearables. Performance is measured by alignment and reconstruction metrics: alignment error, coverage, precision, recall, and F1 in outlier detection, R^2 , MAE, and solving time. The results show that the goal programming formulations outperform DTW in alignment quality when outliers are present, while DTW remains faster in absolute terms. Among the variants, EGP and RGP offer the best balance between quality and cost. We conclude that Goal Programming and DTW have complementary profiles, with the goal programming formulations being preferable when robustness to anomalous points is a priority.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Modelos para Alinhamento de Séries Temporais	7
2.1	<i>Dynamic Time Warping</i>	7
2.2	<i>Goal Programming</i>	8
2.2.1	<i>Extended Goal Programming</i> (EGP)	8
2.2.2	<i>Generalized Robust Goal Programming</i> (<i>Generalized</i> RGP)	10
2.2.3	<i>Extended Revised Multi-Choice Goal Programming</i> (ERMCGP)	12
3	Estratégias Computacionais para Escalabilidade	13
3.1	Warm Start por Segmentação	13
3.2	Seleção do Número de Segmentos	14
3.3	Correcção de Fronteiras (Janela Deslocada Guiada por Ângulo)	15
3.4	<i>Warm Start</i> Hierárquico	15
4	Conjuntos de Dados	15
5	Configuração Experimental	16
5.1	Métricas de avaliação	17
5.2	Protocolo experimental	18
6	Resultados e Discussão	19
6.1	Parâmetros escolhidos	19
6.2	Comparação Principal	21
6.3	Severidade	23
6.4	Escalabilidade	24
7	Conclusão	25

1 Introdução

Com o avanço dos dispositivos *wearables*, tornou-se possível a coleta simultânea de diversos sinais biomédicos por meio de múltiplos aparelhos, como *smartwatches* e cintas de monitoramento de performance. Um desafio central nessa coleta é a integração desses dados fisiológicos provenientes de sensores independentes para a criação de um banco de dados unificado [Kaempchen and Dietmayer, 2003]. Esses sinais, caracterizados como séries temporais, apresentam ruídos e distorções decorrentes de fatores físicos (como o movimento do usuário ou interrupções momentâneas na captura) o que impede que as séries sejam idênticas ou apenas defasadas, exigindo um alinhamento robusto para garantir a fidelidade das informações clínicas e de desempenho.

Este trabalho propõe o desenvolvimento de formulações de programação matemática, especificamente utilizando programação por metas (*goal programming*) voltadas ao alinhamento ótimo dessas séries temporais. O processo de alinhamento desempenha um papel fundamental na análise de séries temporais, visto que distorções temporais ou inconsistências de amostragem entre sinais podem degradar significativamente o desempenho de modelos preditivos. Métodos tradicionais, como o *Dynamic Time Warping* (DTW) e suas aproximações, como o FastDTW Wu and Keogh [2020], oferecem alinhamentos heurísticos, mas em algumas aplicações carecem da personalização permitida por técnicas de programação matemática. Diferente das abordagens baseadas em programação dinâmica, que podem apresentar limitações na inclusão de restrições estruturais complexas, o uso de programação matemática permite uma personalização rigorosa e flexível do modelo Deriso and Boyd [2023].

A modelagem proposta trata o alinhamento como uma tarefa de otimização explícita, permitindo a definição de uma série de referência (alvo) baseada na confiabilidade do sensor ou na qualidade do sinal. O modelo é estruturado através de:

- **Variáveis de Decisão:** que estabelecem a correspondência temporal entre as sequências;
- **Restrições:** que asseguram propriedades de monotonicidade, continuidade e limites de busca, incorporando requisitos fisiológicos e técnicos;

- **Função Objetivo:** baseada em programação por metas para minimizar as divergências entre as trajetórias em relação ao alvo estabelecido.

Esta abordagem viabiliza a obtenção de soluções matematicamente ótimas que, do ponto de vista da modelagem, garantem o cumprimento estrito dos requisitos do problema. A implementação envolve o uso de *solvers* de programação matemática para avaliar o desempenho do modelo. Espera-se que os resultados demonstrem melhorias na precisão do alinhamento, interpretabilidade e robustez em comparação aos métodos heurísticos, proporcionando uma base teórica mais sólida para trabalhos futuros em predição de sinais biomédicos e modelagem de séries temporais.

2 Modelos para Alinhamento de Séries Temporais

Esta seção apresenta brevemente conceitos teóricos necessários para a compreensão dos modelos desenvolvidos ao longo desta monografia. São abordados o DTW, enquanto método clássico de alinhamento de séries temporais, bem como variantes de *goal programming* (GP).

Todos são formulados para o alinhamento de duas séries temporais $A = (A_1, \dots, A_m)$ e $B = (B_1, \dots, B_n)$, de comprimentos m e n , respectivamente. A formulação generaliza-se para N séries alinhando cada uma com a série temporal A , ponto a ponto.

2.1 *Dynamic Time Warping*

O DTW é um algoritmo de programação dinâmica que permite comparar e alinhar sequências que podem variar em velocidade ou fase temporal [Senin, 2008]. O algoritmo constrói uma matriz de custos acumulados $D(i, j)$, onde cada elemento representa a distância mínima para alinhar as subsequências até os pontos i e j das séries A e B , respectivamente. A relação de recorrência utilizada é:

$$D(i, j) = d(A_i, B_j) + \min\{D(i-1, j), D(i, j-1), D(i-1, j-1)\} \quad (1)$$

onde $d(A_i, B_j)$ representa a distância euclidiana entre os pontos correspondentes. Por programação dinâmica, o algoritmo encontra o caminho de menor custo nesta matriz, determinando o alinhamento ótimo entre as duas séries.

2.2 Goal Programming

O *Goal Programming* é uma abordagem de otimização multiobjetivo introduzida por Charnes and Cooper [1961], que estende a programação linear clássica ao permitir a consideração simultânea de múltiplos objetivos, potencialmente conflitantes. Em vez de otimizar um único objetivo, o GP define um conjunto de metas e procura minimizar os desvios em relação a essas metas. Para cada meta k , são introduzidas variáveis de desvio $d_k^- \geq 0$ e $d_k^+ \geq 0$, que capturam, respectivamente, a subrealização e a sobrealização da meta. A função objetivo agrega estes desvios numa expressão a minimizar, de acordo com as preferências do decisor.

A partir dessa base, diferentes *variantes* de GP foram propostas, distinguindo-se pela forma como agregam os desvios e por mecanismos adicionais de robustez. Neste trabalho são formuladas três delas para o alinhamento de séries temporais.

2.2.1 Extended Goal Programming (EGP)

O *Extended Goal Programming*, proposto por Romero [2001], unifica num único modelo duas filosofias clássicas de *goal programming*: a ponderada, baseada na norma L_1 , que minimiza a soma ponderada dos desvios; e a *minmax* (Chebyshev), baseada na norma L_∞ , que minimiza o maior desvio individual. A unificação se dá por uma combinação convexa das duas, regulada pelo parâmetro $\alpha \in [0, 1]$: em $\alpha = 0$ recupera-se a forma ponderada pura e, em $\alpha = 1$, a *minmax* pura.

O modelo desenvolvido para o alinhamento é formulado a seguir.

Parâmetros

- $\alpha \in [0, 1]$: peso da parte de Chebyshev
- $w_1, w_2 \geq 0$: pesos dos desvios de alinhamento e do desbalanceamento, respectivamente
- $W \in \mathbb{Z}^+$: largura da janela

Variáveis de decisão

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$: variável binária igual a 1 se o elemento A_i é emparelhado com o elemento B_j ;
- $a_i \geq 0$: variável de folga indicando que A_i não é emparelhado;

- $b_j \geq 0$: variável de folga indicando que B_j não é emparelhado;
- $d_i^-, d_i^+ \geq 0$: variáveis de desvio negativo e positivo que medem o erro de alinhamento na posição i ;
- $\delta^+, \delta^- \geq 0$: variáveis de desvio positivo e negativo para a meta GP relativa aos pontos não emparelhados.

Função objetivo

$$\min \alpha \cdot \Lambda + (1 - \alpha) \cdot \left[w_1 \sum_{i=1}^m (d_i^- + d_i^+) + w_2 \cdot \delta^+ \right] \quad (2)$$

Restrições

R1 — Emparelhamento de A: cada ponto de A é emparelhado com exatamente um ponto de B ou é deixado sem par:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + a_i = 1, \quad \forall i \quad (3)$$

R2 — Emparelhamento de B: cada ponto de B é emparelhado com exatamente um ponto de A ou é deixado sem par:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} + b_j = 1, \quad \forall j \quad (4)$$

R3 — Desvio de alinhamento:

$$\sum_{j=1}^n B_j \cdot x_{ij} + d_i^- - d_i^+ = A_i, \quad \forall i \quad (5)$$

R4 — Janela: emparelhamentos fora da janela de largura W são proibidos:

$$x_{ij} = 0, \text{ se } |i - j| > W, \quad \forall i, j \quad (6)$$

A largura W é um parâmetro livre da formulação: a R4 não fixa nenhum valor. Sua definição é uma escolha do usuário ou *stakeholder*, valores menores reduzem as binárias instanciadas (só pares com $|i - j| \leq W$), acelerando a resolução, maiores admitem deformações mais amplas, a custo maior.

R5 — Monotonicidade: o caminho de alinhamento deve preservar a ordem temporal das séries, impedindo que um ponto posterior de A seja emparelhado com um ponto anterior de B relativamente ao emparelhamento do ponto precedente. Seja $p_i = \sum_{j=1}^n j x_{ij}$ a posição em B à qual A_i é emparelhado. Exige-se então:

$$p_{i+1} \geq p_i - M(a_i + a_{i+1}), \quad \forall i = 1, \dots, m-1, \quad (7)$$

onde M é uma constante suficientemente grande que desativa a restrição quando A_i ou A_{i+1} é rejeitado ($a_i = 1$ ou $a_{i+1} = 1$).

R6 — Chebyshev: a variável Λ limita o pior caso ponderado dos desvios em cada ponto:

$$\alpha \cdot (w_1 (d_i^- + d_i^+) + w_2 \cdot \delta^+) \leq \Lambda, \quad \forall i \quad (8)$$

R7 — Balaceamento de não emparelhamento: a soma total de pontos não emparelhados de A e B deve ser nula. O desvio positivo δ^+ captura o excesso caso tal não seja possível, sendo δ^- estruturalmente nulo neste contexto

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j + \delta^- - \delta^+ = 0 \quad (9)$$

Não-negatividade:

$$d_i^-, d_i^+, a_i, b_j, \Lambda, \delta^+, \delta^- \geq 0, \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (10)$$

2.2.2 Generalized Robust Goal Programming (Generalized RGP)

O *Generalized RGP*, proposto por Lu and Tsai [2024], formula o alinhamento sob a hipótese de que os valores das séries estão sujeitos a incerteza. Cada valor observado é substituído por um conjunto de incerteza, e derivam-se versões robustas das restrições que garantem a viabilidade da solução para qualquer realização dentro desse conjunto. Especificamente, assume-se que A_i e B_j podem desviar-se de seus valores observados segundo:

$$\tilde{A}_i = A_i + \xi_i \hat{A}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$\tilde{B}_j = B_j + \xi_j \hat{B}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

Onde $\hat{A}_i$ e $\hat{B}_j$ são os desvios máximos admissíveis e ξ_i, ξ_j parametrizam a realização da incerteza dentro do conjunto. Os raios de incerteza são definidos proporci-

onalmente ao desvio-padrão de cada série, $\hat{A}_i = \rho_A \sigma_A$ e $\hat{B}_j = \rho_B \sigma_B$, com $\rho_A = 0,10$ e $\rho_B = 0,30$, e σ_A, σ_B denotando os desvios-padrão de A e B , respectivamente.

A restrição de desvio (R3) é classificada como uma restrição do tipo GWBSP (*Goal with Both-Side Parameters*), à qual se aplica a Proposição 3 de Lu and Tsai [2024] para derivar a sua contraparte robusta.

Conjunto de incerteza

O conjunto de incerteza adotado é o Box (Ψ), sendo adotado em toda a análise subsequente.

Variáveis adicionais

- $u_i \in \{0, 1\}$: variável binária auxiliar de robustez
- $\rho_{i,1}, \rho_{i,2} \geq 0$: variáveis auxiliares de dualidade
- $Sd_i^-, Sd_i^+ \geq 0$: desvios robustos negativos e positivos

Função de proteção (Box)

A função de proteção para o conjunto Box com parâmetro Ψ é:

$$\beta_i = \Psi \cdot \left(\rho_B \cdot \sigma_B \sum_{j=1}^n x_{ij} + \rho_A \cdot \sigma_A \right) \quad (13)$$

Alteração ao modelo EGP

As restrições R1, R2, R4, R5, R7 e a função objectivo (2) mantêm-se inalteradas. A restrição de desvio (R3) é substituída por seis restrições que implementam a contraparte robusta via Proposição 3:

$$\sum_j B_j x_{ij} + Sd_i^- - Sd_i^+ = A_i, \quad \forall i \quad (14)$$

$$Sd_i^- \leq d_i^- + \beta_i \cdot u_i, \quad \forall i \quad (15)$$

$$Sd_i^+ \leq d_i^+ + \beta_i \cdot (1 - u_i), \quad \forall i \quad (16)$$

$$\rho_{i,1} - \rho_{i,2} = Sd_i^- - d_i^-, \quad \forall i \quad (17)$$

$$\rho_{i,1} \leq \beta_i \cdot u_i, \quad \forall i \quad (18)$$

$$\rho_{i,2} \leq \beta_i \cdot (1 - u_i), \quad \forall i \quad (19)$$

A restrição Chebyshev (R6) utiliza Sd_i^- e Sd_i^+ no lugar de d_i^- e d_i^+ .

2.2.3 *Extended Revised Multi-Choice Goal Programming*(ERMCGP)

O ERMCGP, baseado em Jones et al. [2026], permite definir um intervalo de tolerância em torno de cada meta, dentro do qual os desvios são aceites a um custo reduzido. Esta flexibilidade é implementada através de variáveis de folga adicionais e_i^- e e_i^+ , limitadas pela largura do intervalo aceitável, e de um parâmetro de penalização α_2 que controla o custo de utilizar esse intervalo.

O modelo ERMCGP estende o EGP base introduzindo variáveis de folga adicionais $e_i^-, e_i^+ \geq 0$, que permitem ao modelo aceitar soluções dentro de um intervalo de tolerância em torno do target $g_i = A_i$, penalizando apenas os desvios que excedam esse intervalo.

Parâmetros adicionais

- $g_i = A_i$: valor alvo para o ponto i
- $g_{i,\min} = 0.8 \cdot A_i$: limite inferior do intervalo aceitável
- $g_{i,\max} = 1.2 \cdot A_i$: limite superior do intervalo aceitável
- $\alpha_2 \geq 0$: peso de penalização do desvio positivo estendido

Variáveis adicionais

- $e_i^- \geq 0$: folga estendida negativa no ponto i
- $e_i^+ \geq 0$: folga estendida positiva no ponto i

Função objetivo

$$\min \alpha \cdot \Lambda + (1 - \alpha) \cdot \left[w_1 \sum_{i=1}^m (d_i^- + d_i^+) + w_2 \cdot \delta^+ + \alpha_2 \sum_{i=1}^m e_i^+ \right] \quad (20)$$

Alteração ao modelo EGP

As restrições R1, R2, R4, R5, R7 mantêm-se. A restrição de desvio (R3) é substituída por:

$$\sum_{j=1}^n B_j \cdot x_{ij} + d_i^- + e_i^- - d_i^+ - e_i^+ = A_i, \quad \forall i \quad (21)$$

As folgas estendidas são limitadas pela largura do intervalo aceitável:

$$e_i^- \leq 0.2 \cdot A_i, \quad \forall i \quad (22)$$

$$e_i^+ \leq 0.2 \cdot A_i, \quad \forall i \quad (23)$$

A restrição Chebyshev (R6) é atualizada para incorporar a penalização estendida:

$$\alpha \cdot (w_1 (d_i^- + d_i^+) + w_2 \cdot \delta^+ + \alpha_2 \cdot e_i^+) \leq \Lambda, \quad \forall i \quad (24)$$

3 Estratégias Computacionais para Escalabilidade

Os modelos de GP formulados na Seção 2 crescem rapidamente com o comprimento das séries. A causa principal é a variável de pareamento x_{ij} , que requer $m \times n$ variáveis binárias para relacionar cada ponto de A a cada ponto de B . Para séries de comprimento N , isso implica $\mathcal{O}(N^2)$ variáveis binárias. Esse crescimento quadrático torna a solução exata rapidamente intratável para N grande. Esta seção descreve as estratégias desenvolvidas para tornar os modelos viáveis em séries maiores.

3.1 Warm Start por Segmentação

A estratégia de warm start por segmentação divide as séries A e B em K segmentos contíguos de comprimento N/K :

$$A_k = A_{(k-1)N/K+1:kN/K}, \quad B_k = B_{(k-1)N/K+1:kN/K}, \quad k = 1, \dots, K \quad (25)$$

A estratégia decorre em três fases. Na **Fase 1**, o modelo é resolvido independentemente em cada par (A_k, B_k) , com uma janela adaptativa $W_{\text{seg}} = \max(2, \min(W, \lfloor N/(2K) \rfloor))$. Cada solução local produz um conjunto de pares $\mathcal{P}_k$.

Na **Fase 2**, os pares locais são projetados para índices globais:

$$i_{\text{global}} = (k-1) \frac{N}{K} + i_{\text{local}}, \quad j_{\text{global}} = (k-1) \frac{N}{K} + j_{\text{local}} \quad (26)$$

Pares que violem $|i_{\text{global}} - j_{\text{global}}| > W$ são descartados, e conflitos de atribuição são removidos, produzindo o conjunto fixo $\mathcal{F}$.

Na **Fase 3**, o modelo completo é resolvido com os pares de $\mathcal{F}$ fixados como restrições rígidas:

$$x_{ij} = 1, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{F} \quad (27)$$

3.2 Seleção do Número de Segmentos

Com a estratégia de segmentação estabelecida, resta determinar um bom valor para K , aqui modelado como função de N . A forma exata dessa dependência não é óbvia a priori e foi obtida empiricamente: conduziu-se um experimento com o EGP, empregando os parâmetros calibrados na Seção 6.1. Para cada valor de $N \in \{100, 200, \dots, 2700\}$, o modelo foi resolvido com cinco sementes aleatórias para cada valor de K correspondente às frações $\{0,05; 0,08; 0,10; 0,12; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30\}$ de N , arredondado ao inteiro mais próximo e limitado ao intervalo $[2, \lfloor N/10 \rfloor]$, registrando-se o tempo médio de resolução. O K ótimo para cada N foi definido como o valor que minimizou o tempo médio. Os pares (N, K_{opt}) obtidos foram ajustados por regressão log-linear a um modelo de lei de potência $K = a \cdot N^b$, produzindo a seguinte heurística:

$$K_{\text{sel}}(N) = \text{clamp}(\text{round}(0.102 \cdot N^{0.946}), 2, \lfloor N/10 \rfloor) \quad (28)$$

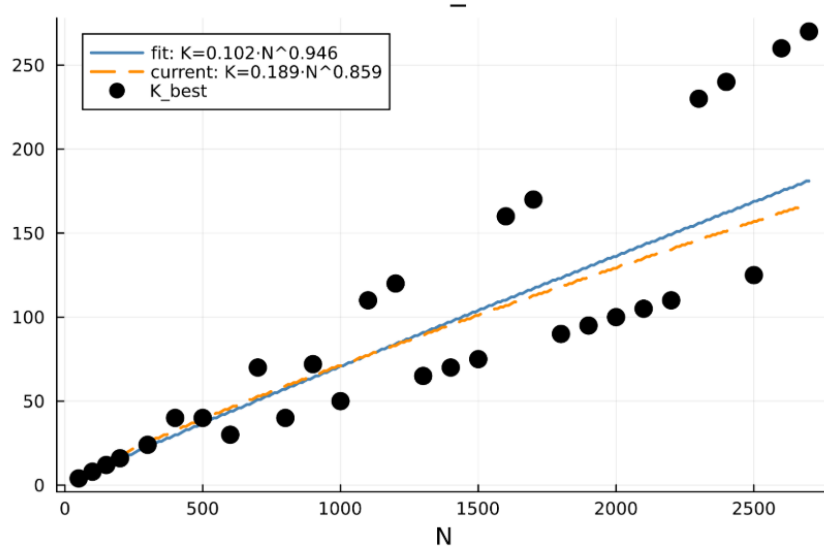


Figura 1: Ajuste da lei de potência ao K ótimo observado para cada N .

O expoente $0.946 \approx 1$ indica um crescimento aproximadamente linear do número ótimo de segmentos com o comprimento da série, sugerindo que o tamanho ótimo de cada segmento se mantém aproximadamente constante. A função `clamp` garante um número mínimo de dois segmentos e um número máximo de $\lfloor N/10 \rfloor$ segmentos.

3.3 Correção de Fronteiras (Janela Deslocada Guiada por Ângulo)

A resolução independente dos segmentos pode introduzir descontinuidades no caminho de alinhamento nas junções entre segmentos adjacentes. A estratégia de correção de fronteiras explora a geometria local do caminho de alinhamento para guiar a resolução nas zonas de junção.

A inclinação do caminho de alinhamento no final do segmento k é estimada a partir dos últimos $P = 5$ pares:

$$\hat{s}_k = \frac{j_{\text{last}} - j_{\text{last}-P+1}}{i_{\text{last}} - i_{\text{last}-P+1}} \quad (29)$$

Esta inclinação é usada para extrapolar a posição esperada em B no início do segmento $k + 1$, calculando um desvio:

$$\delta_k = \lfloor j_{\text{last}} + \hat{s}_k \cdot (i_{\text{start},k+1} - i_{\text{last}}) \rfloor - i_{\text{start},k+1} \quad (30)$$

A janela de junção é então resolvida com a restrição da janela deslocada por δ_k , focando o solver na região de alinhamento mais provável. Em caso de inviabilidade, o método recorre a uma resolução local sem restrição de janela.

3.4 *Warm Start* Hierárquico

Para séries tamanho grande ($N > 2700$), a estratégia de segmentação direta torna-se insuficiente. Nestes casos, é adotada uma abordagem hierárquica recursiva: a série é dividida em 10 subsegmentos, e cada subsegmento é resolvido independentemente. Se o comprimento de algum subsegmento ainda exceder 2700 pontos, o processo é repetido recursivamente até que todos os subsegmentos se encontrem dentro do intervalo $[1, 2700]$, ao qual se aplica directamente a estratégia de *warm start* por segmentação descrita na Seção 3.1.

4 Conjuntos de Dados

Os dados utilizados são sintéticos, gerados de modo a simular erros possíveis de sinais de dispositivos *wearables*. Para cada experimento, a série de referência A é uma das três famílias de sinais consideradas, amostrada em N pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$, ou seja, $t_i = (i - 1)/(N - 1)$ para $i = 1, \dots, N$. As famílias senoidal, multissenoidal e autorregressiva de primeira ordem cobrem diferentes regularidades

temporais, e são definidas por:

$$\text{Senoidal: } A_i = \sin(2\pi \cdot 3 t_i) \quad (31)$$

$$\text{Multissenoidal: } A_i = \sin(2\pi \cdot 2 t_i) + 0,5 \sin(2\pi \cdot 7 t_i) \quad (32)$$

$$\text{AR(1): } A_i = \phi A_{i-1} + 0,3 \eta_i, \quad \eta_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \phi = 0,95 \quad (33)$$

Onde, na AR(1), $A_1 = 0$. A série B é então obtida de A por perturbações controladas, originando três cenários:

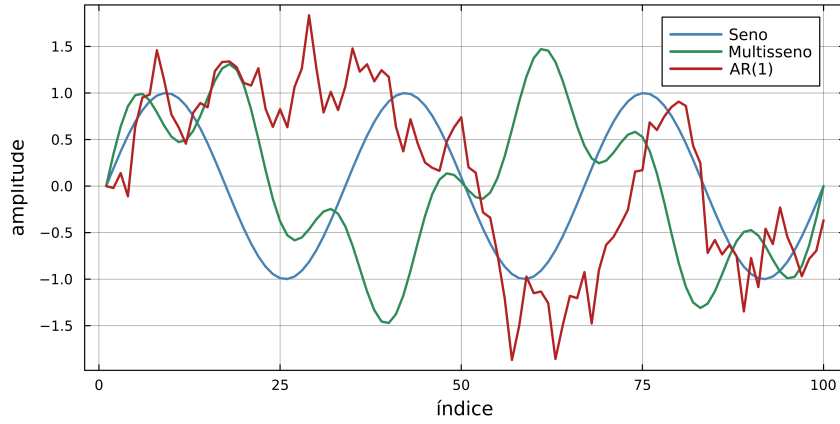


Figura 2: Exemplos das três famílias de sinais sintéticos

- **Outlier:** B reproduz A com ruído gaussiano de baixa amplitude ($\sigma = 0,10$), e cinco pontos selecionados são corrompidos por um desvio de magnitude pelo menos 3, com sinal aleatório.
- **Small Shift:** B é um recorte de A deslocado em $s = 5$ amostras, com ruído $\sigma = 0,05$. O deslocamento é obtido por recorte de uma série mais longa, e não por rotação, de modo que não haja reentrada artificial de amostras nas extremidades.
- **Mixed:** combinação dos dois anteriores: deslocamento s e cinco pontos corrompidos, com ruído $\sigma = 0,10$.

5 Configuração Experimental

Todos os experimentos foram executados num computador pessoal equipado com processador Intel Core i5-1135G7 (2.4 GHz) e 24 GB de memória RAM. Os modelos de GP foram implementados em Julia 1.11.0, utilizando o pacote JuMP v1.23.2 como

interface de modelação matemática e o solver CPLEX v1.1.1. O DTW foi calculado com o pacote DynamicAxisWarping v0.4.21, com distância euclidiana.

5.1 Métricas de avaliação

O DTW é adotado como *baseline*, contra o qual as variantes de GP (EGP, RGP e ERMCGP) são comparadas. A avaliação distingue métricas primárias, que medem a qualidade do alinhamento e a rejeição de outliers, de métricas secundárias, de reconstrução e custo computacional.

Métricas primárias.

- **Erro de alinhamento** (*warp error*): erro médio entre o índice emparelhado e o índice verdadeiro, disponível nos cenários sintéticos por construção. Seja $\sigma(i)$ o índice de B emparelhado a A_i e $\sigma^*(i)$ o emparelhamento verdadeiro:

$$\text{WE} = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{i \in \mathcal{M}} |\sigma(i) - \sigma^*(i)|, \quad (34)$$

onde $\mathcal{M}$ é o conjunto de pontos efetivamente emparelhados (com $\sigma^*(i)$ definido). Reporta-se em conjunto a cobertura $|\mathcal{M}|/N$, para evitar que a rejeição de pontos reduza artificialmente o erro.

- **Rejeição de outliers** (precisão, *recall* e F_1): nos cenários com outliers, mede-se a capacidade do modelo de rejeitar exatamente os pontos corrompidos. Sejam $\mathcal{O}$ o conjunto de índices corrompidos e $\mathcal{R}$ o conjunto rejeitado pelo modelo:

$$\text{prec} = \frac{|\mathcal{R} \cap \mathcal{O}|}{|\mathcal{R}|}, \quad \text{rec} = \frac{|\mathcal{R} \cap \mathcal{O}|}{|\mathcal{O}|}, \quad F_1 = \frac{2 \text{prec} \cdot \text{rec}}{\text{prec} + \text{rec}}. \quad (35)$$

O DTW não possui mecanismo de rejeição, logo esta métrica aplica-se apenas às variantes de GP.

Métricas secundárias.

- **MAE e R^2** : medem o ajuste de reconstrução entre A e os valores de B emparelhados, sobre $i \in \mathcal{M}$:

$$\text{MAE} = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{i \in \mathcal{M}} |A_i - B_{\sigma(i)}|, \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_{i \in \mathcal{M}} (A_i - B_{\sigma(i)})^2}{\sum_{i \in \mathcal{M}} (A_i - \bar{A})^2}. \quad (36)$$

- **Distância de Wasserstein (DW):** distância de Wasserstein-1 entre as *distribuições de valores* das séries, em forma fechada unidimensional $DW = \frac{1}{N} \sum_i |A_{(i)} - B_{(i)}|$, onde $A_{(i)}, B_{(i)}$ são as estatísticas de ordem.
- **Tempo de resolução:** tempo total de resolução do modelo pelo solver, em segundos.

5.2 Protocolo experimental

Os experimentos organizam-se em quatro blocos, numerados de acordo com sua dependência: o Bloco 0 determina os parâmetros dos modelos, fixados nos demais.

0. **Análise de sensibilidade:** os parâmetros dos modelos são determinados sequencialmente, sobre as três famílias de sinais com $N = 100$ e em 5 sementes.

Primeiro, varre-se $w_1 \in \{0,5; 0,6; \dots; 1,0\}$ (com $w_2 = 1 - w_1$) usando apenas o EGP, por ser a formulação base comum às variantes. A varredura restringe-se a $w_1 \geq 0,5$ por razão estrutural: como $w_2 = 1 - w_1$, a reconstrução só tem prioridade sobre a penalização de rejeição quando $w_1 > w_2$, ou seja, $w_1 > 0,5$. Em $w_1 = 0,5$ os pesos se igualam, abaixo disso a prioridade se inverte, contrariando o propósito da formulação. O valor é selecionado pelo F1 de rejeição no cenário, *outlier* eixo que w_1 controla, e também com o erro de alinhamento no *shift* como verificação.

Em seguida, com o EGP e w_1 fixo, varre-se $\alpha \in \{0,0; 0,1; \dots; 1,0\}$; o valor é selecionado pela qualidade do alinhamento em todos cenários.

Por fim, fixados w_1 e α , determinam-se os parâmetros próprios das variantes: $\alpha_2 \in \{0,0; \dots; 1,0\}$ (ERMCGP) e $\Psi \in \{0,0; 0,5; \dots; 4,5\}$ (RGP).

1. **Comparação principal:** avalia EGP, RGP e ERMCGP contra o DTW sobre as três famílias de sinais e os três cenários, com $N = 100$ e 5 sementes por combinação.
2. **Severidade:** avalia os três modelos contra o DTW sob intensidade crescente de perturbação, em duas varreduras independentes: número de outliers ($\{0, 10, 20\}$) e magnitude do deslocamento ($s \in \{4, 8, 16\}$). Sobre três famílias de sinais, com $N = 100$ e 5 sementes por configuração.

3. **Escalabilidade:** avalia o custo computacional do EGP contra o DTW e a perda de qualidade em função do comprimento das séries, variando $N \in \{100, 500, 1000, 2000, 2700, 5000, 10000\}$ com o solver hierárquico, na família *multisine* e com três sementes por valor de N . Adota-se apenas o cenário *outlier*, com número de *outliers* proporcional ao tamanho da série ($\max(5, \lceil N/100 \rceil)$), mantendo a densidade de contaminação constante.

Salvo quando explicitamente variados, os parâmetros dos modelos permanecem fixos nos valores determinados no Bloco 0.

6 Resultados e Discussão

Nos experimentos adotou-se $W = 10$, tendo em vista a diminuição do tempo de resolução e o escopo dos problemas avaliados. Também foi imposto um limite de tempo de resolução de $TLIM = 20s$ por instância; instâncias que não convergem nesse intervalo são descartadas e não entram nas médias. Esse limite não se aplica à análise de escalabilidade, cujo objetivo é justamente medir o tempo de resolução: nela, cada instância é resolvida até a conclusão. As tabelas reportam, para cada configuração, as médias das seguintes métricas sobre as instâncias resolvidas: n , o número de instâncias efetivamente resolvidas (sobre as quais as médias são calculadas); ε_w (*warp_err*), o erro de alinhamento posicional; *cov* (cobertura), a fração de pontos que recebem correspondência; F1, precisão e revocação; R^2 ; MAE; DW; e tempo. As métricas de rejeição (F1, precisão e revocação) são indefinidas em cenários sem *outliers*, indicadas por “—”.

6.1 Parâmetros escolhidos

Esta seção apresenta a calibração dos quatro parâmetros (w_1 , α , α_2 e ψ). Os parâmetros são analisados na ordem $w_1 \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \psi$, os valores adotados resumem-se ao final e as tabelas com os resultados encontram-se no apêndice.

A calibração de w_1 parte do cenário *outlier* (Tabela 1), o *recall* atinge o teto de 1,0 para todos os valores de w_1 : o modelo rejeita todos os *outliers* verdadeiros, sem deixar nenhum passar. Isoladamente isso seria desejável, porém, com o *recall* fixo em 1,0, a qualidade da rejeição passa a depender inteiramente da precisão, ou seja, de quantos dos pontos rejeitados eram de fato *outliers*. Uma precisão baixa indica que, além dos

outliers verdadeiros, o modelo rejeita também muitos pontos legítimos (falsos positivos). As métricas secundárias (R^2 , MAE e DW) permanecem praticamente constantes, indicando que w_1 não afeta a qualidade da reconstrução; seu efeito concentra-se na rejeição de pontos. O F1 atinge o máximo em $w_1 = 0,7$ (0,7024) e cai de forma clara a partir de $w_1 = 0,9$, colapsando em $w_1 = 1,0$ (F1 = 0,4699, precisão = 0,3105). Esse colapso tem explicação estrutural: como $w_2 = 1 - w_1$, em $w_1 = 1,0$ anula-se o termo que equilibra a penalização de rejeição, levando o modelo a rejeitar pontos em excesso e derrubando a precisão. Por isso, $w_1 = 0,7$ é adotado como o melhor valor dentro dessa faixa estável. O tempo de resolução cai de forma constante à medida que w_1 aumenta (de 18,5s a 3,0s), pois dar mais prioridade à reconstrução simplifica o problema.

No cenário *shift* (Tabela 2), o erro de alinhamento ε_w varia em uma faixa estreita (0,1429 a 0,1719) e sem um padrão regular; $w_1 = 0,7$ apresenta o menor valor, mas a diferença para os demais é pequena e não cresce nem decresce de forma consistente com w_1 , o que indica que, neste cenário, w_1 tem pouca influência. O resultado serve, portanto, apenas como reforço da escolha, e não como evidência independente. As métricas secundárias mantêm-se constantes e a cobertura permanece estável ($\approx 0,96$), com leve queda apenas em $w_1 = 1,0$.

Em síntese, a escolha de $w_1 = 0,7$ apoia-se sobretudo no F1 do cenário *outlier*, único caso em que w_1 realmente influencia o resultado, com o erro de alinhamento do *shift* como reforço secundário.

Fixado w_1 , passa-se à calibração de α (Tabela 3). Como no caso anterior, a revocação satura em 1,0 e as métricas secundárias variam pouco, de modo que a seleção recai sobre o F1. O máximo ocorre em $\alpha = 0,1$ (0,7032), e os valores vizinhos diferem apenas na terceira casa decimal, sem padrão consistente com α . Observa-se que, a partir de $\alpha = 0,5$, o número de instâncias resolvidas decai (de $n = 15$ para $n \leq 11$, chegando a $n = 2$ em $\alpha = 0,8$): pesos elevados sobre o termo de minimização do desvio máximo encarecem as variantes de GP e elevam a taxa de descarte por TLIM, tornando as médias dessas linhas pouco confiáveis e não comparáveis às demais. Os valores $\alpha = 0,9$ e $\alpha = 1,0$ foram igualmente avaliados, mas não constam das tabelas por não terem produzido nenhuma instância resolvida dentro do limite de tempo ($n = 0$). Por isso, e pela convergência da solução em todas as combinações, adota-se $\alpha = 0,1$ ($n = 15$). No cenário *shift* (Tabela 4),

$\alpha = 0,1$ também apresenta o menor erro de alinhamento ($\varepsilon_w = 0,1429$), reforçando a escolha.

Em seguida, o parâmetro α_2 (Tabela 5) mostra-se indiferente: o F1 oscila ao longo de toda a faixa, sem tendência, e as métricas secundárias permanecem essencialmente constantes. Tal comportamento indica que o termo de correção robusta não é acionado no porte de segmento considerado, coerente com a quase nulidade da divergência entre as variantes observada na comparação principal. Adota-se $\alpha_2 = 0,1$, valor que maximiza nominalmente o F1 sem introduzir efeitos colaterais.

Por fim, ψ (Tabela 6) é o parâmetro de maior sensibilidade. O F1 mantém-se elevado apenas na vizinhança de valores baixos, com máximo em $\psi = 0,5$, e degrada de forma acentuada a partir de $\psi = 2,0$, caindo a 0,1460 em $\psi = 4,5$, acompanhado pelo colapso da cobertura e do R^2 . Valores altos de ψ amplificam excessivamente a margem de robustez, induzindo rejeição indiscriminada: a precisão desaba enquanto a revocação permanece em 1,0, sinalizando que o modelo passa a rejeitar bem além dos *outliers* verdadeiros. Adota-se $\psi = 0,5$, que maximiza o F1 e preserva cobertura e qualidade de reconstrução.

Em resumo, adotam-se $w_1 = 0,7$, $\alpha = 0,1$, $\alpha_2 = 0,1$ e $\psi = 0,5$.

6.2 Comparação Principal

Fixados os parâmetros, comparam-se as três variantes propostas (EGP, RGP e ERMCGP) frente ao DTW, como descrito na seção 5.2.

No cenário *shift* (Tabela 7), em que não há *outliers*, todos os métodos alinham bem: EGP e RGP apresentam os menores erros ($\varepsilon_w = 0,1429$ e $0,1348$), inferiores ao do próprio DTW ($0,2257$), enquanto o ERMCGP destoa ($\varepsilon_w = 0,3095$) e resolve uma instância a menos ($n = 14$). As métricas de reconstrução são quase equivalentes entre todos os métodos ($R^2 \approx 0,96$).

O cenário *outlier* (Tabela 8) evidencia o principal diferencial das formulações propostas. O DTW, por não rejeitar pontos, é forçado a alinhar os *outliers*, o que degrada drasticamente seu desempenho: o erro de alinhamento sobe para $\varepsilon_w = 2,0307$ e o R^2 cai para $0,5245$, contra $\varepsilon_w \approx 0,48$ e $R^2 \approx 0,96$ das variantes GP. A capacidade de rejeição, ausente no DTW, traduz-se em F1 em torno de $0,70$ para EGP e RGP. Entre as variantes

GP, EGP e RGP são praticamente indistinguíveis ($F1 = 0,7032$ e $0,7026$); o ERMCGP apresenta $F1$ ligeiramente inferior ($0,6871$) e maior taxa de descarte ($n = 12$).

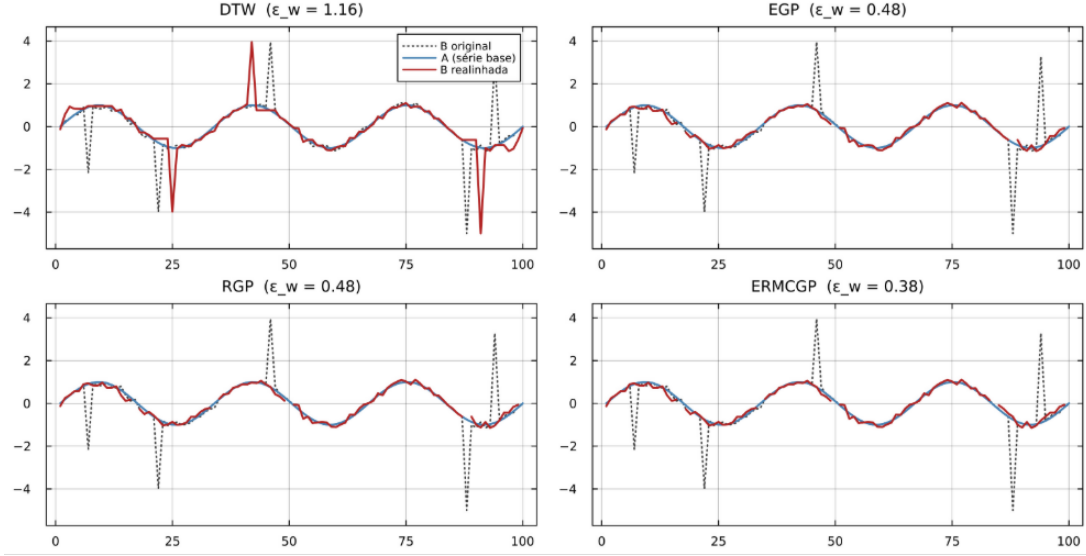


Figura 3: Alinhamento no cenário *outlier*. O DTW segue os *outliers*, enquanto as variantes de GP os rejeitam

No cenário *mixed* (Tabela 9), mantém-se a superioridade das variantes GP sobre o DTW nas métricas de alinhamento e reconstrução ($R^2 \approx 0,92$ contra $0,5285$). Contudo, a qualidade da rejeição cai expressivamente para todos os métodos ($F1 \approx 0,35$, precisão $\approx 0,21$): a coexistência de deslocamento e *outliers* dificulta a distinção entre pontos genuinamente anômalos e desvios decorrentes do desalinhamento, elevando a taxa de falsos positivos. A revocação permanece próxima de 1,0, indicando que os *outliers* verdadeiros continuam sendo capturados, ao custo da precisão.

Os resultados sustentam que a vantagem das formulações por metas sobre o DTW reside na rejeição de *outliers*, inexistente no DTW, sendo mais expressiva no cenário *outlier* puro. Essa vantagem, contudo, tem um custo computacional expressivo: enquanto o DTW resolve cada instância em frações de milissegundo, as variantes por metas exigem da ordem de segundos a dezenas de segundos, uma diferença de várias ordens de magnitude, decorrente da natureza combinatória das variantes de GP frente à programação dinâmica do DTW. As formulações propostas, portanto, não competem com o DTW em velocidade, mas oferecem uma capacidade que ele não possui, a rejeição de *outliers*, sendo indicadas quando a robustez a pontos anômalos é prioritária frente ao tempo de

resolução. Entre as variantes, EGP e RGP exibem desempenho consistentemente equivalente, ao passo que o ERMCGP não apresenta ganho que justifique seu maior custo computacional e sua maior taxa de descarte no regime avaliado.

6.3 Severidade

Enquanto a comparação principal avaliou um nível fixo de perturbação, esta seção examina como os métodos se comportam à medida que a perturbação se intensifica.

A primeira varredura (Tabela 10) aumenta o número de *outliers*, e nela o contraste entre as formulações por metas e o DTW amplia-se com a severidade. Na ausência de *outliers* ($n_{\text{out}} = 0$) todos os métodos são quase equivalentes ($R^2 \approx 0,98$). À medida que se inserem *outliers*, porém, o DTW degrada de forma acentuada: o erro de alinhamento sobe de 0,32 para 2,75 e o R^2 cai de 0,99 para $-0,58$ em $n_{\text{out}} = 20$. As variantes GP, em contraste, mantêm $R^2 \geq 0,86$ e erro de alinhamento aproximadamente metade do observado para o DTW. A capacidade de rejeição traduz-se em F1 estável em torno de 0,70–0,73 para as três variantes, com revocação próxima de 1,0; a cobertura inferior a 1,0 dos métodos GP é justamente o reflexo da rejeição dos pontos anômalos, ao passo que a cobertura unitária do DTW decorre de sua incapacidade de rejeitar, e não de superioridade. Entre as variantes, EGP, RGP e ERMCGP produzem resultados muito próximos em todas as métricas de qualidade, sem que nenhuma se destaque; o ERMCGP, porém, é sistematicamente o mais lento.

A segunda varredura (Tabela 11) aumenta a magnitude do deslocamento. Para deslocamentos dentro da janela ($s = 4$ e $s = 8$), os métodos GP alinham com erro inferior ao do DTW (em $s = 8$, $\varepsilon_w \approx 0,14$ para EGP/RGP contra 0,23 do DTW), exceto o ERMCGP, que novamente destoa ($\varepsilon_w = 0,31$). A coluna $s = 16$, no entanto, exige interpretação cuidadosa: como o deslocamento excede a janela $W = 10$, o alinhamento correto torna-se inviável por construção, nenhum par (i, j) com $|i - j| > W$ é admissível, de modo que os métodos GP são forçados a soluções ,falsas com $\varepsilon_w \approx 12,5$ e $R^2 \approx 0,40$. O desempenho aparentemente superior do DTW nesse ponto ($\varepsilon_w = 0,68$, $R^2 = 0,88$) não reflete maior robustez, mas a ausência de restrição de janela: o DTW pode representar deslocamentos arbitrários. Esse contraste evidencia o *trade-off* central da formulação: a janela finita reduz o custo computacional e restringe o espaço de busca, mas impõe um

teto ao deslocamento representável. A escolha de W é, portanto, um compromisso entre eficiência e amplitude de deformação admissível, e o valor $W = 10$ adotado pressupõe deslocamentos compatíveis com essa ordem de magnitude.

Em síntese, a varredura de severidade confirma e reforça as conclusões da comparação principal: a vantagem das formulações por metas concentra-se na presença de *outliers*, onde a rejeição evita a degradação catastrófica observada no DTW, e amplia-se com a intensidade da contaminação. Entre as variantes, não se observa ganho do ERMCGP que justifique seu maior custo computacional, mesmo sob severidade elevada o termo de correção robusta adicional não se traduz em melhoria mensurável no regime avaliado.

6.4 Escalabilidade

Por fim, avalia-se o comportamento dos métodos à medida que o comprimento das séries cresce, de $N = 100$ a $N = 10000$, no cenário *outlier* com contaminação proporcional ao tamanho da série. Para $N \leq 2700$, cada instância é resolvida sem recursão; para $N = 5000$ e $N = 10000$, aciona-se o solver hierárquico, que particiona a série, resolve os segmentos e costura as soluções parciais. Reporta-se apenas o EGP, formulação base sobre a qual RGP e ERMCGP são construídos: por ser o experimento de maior custo computacional, restringir a análise a uma única formulação mantém o tempo de execução tratável.

Quanto à qualidade (Tabela 12), o EGP mantém desempenho estável em toda a faixa de N : o erro de alinhamento permanece entre 0,21 e 0,42 e o R^2 entre 0,95 e 0,98, sem tendência de degradação com o aumento de N . Em particular, a transição para o solver hierárquico (de $N = 2700$ para $N = 5000$) não introduz perda perceptível de qualidade, indicando que o particionamento e a costura das soluções parciais preservam a precisão do alinhamento. O DTW, em contraste, apresenta desempenho marcadamente inferior em $N = 100$ ($R^2 = 0,58$, $\varepsilon_w = 1,45$), ponto em que a densidade relativa de *outliers* é maior, confirmando, também neste experimento, sua fragilidade diante de pontos anômalos; para $N \geq 500$ seu R^2 estabiliza em torno de 0,92, ainda inferior ao do EGP ($\approx 0,98$). Nas demais métricas secundárias o quadro é semelhante: o EGP apresenta DW consistentemente menor, e os valores de MAE são próximos entre os dois métodos, com

leve vantagem do DTW em alguns valores de N diferenças pequenas que não reverterem a superioridade do EGP nas métricas principais.

Quanto ao tempo, o quadro inverte-se, o EGP cresce de menos de 1 s em $N = 100$ para cerca de 31 s em $N = 10000$. Ajustando-se uma lei de potência tempo $\approx a N^k$, obtém-se $k = 0,82$ (ainda que com ajuste imperfeito, $R^2 = 0,89$), isto é, crescimento aproximadamente linear com N . Esse comportamento controlado é consequência do solver hierárquico, que opera sobre segmentos de tamanho limitado. O DTW, embora resolva todas as instâncias em frações de segundo a poucos segundos (no máximo 2,5 s em $N = 10000$), escala de forma aproximadamente quadrática ($k = 2,1$): permanece muito mais rápido em valor absoluto, mas sua vantagem relativa diminui à medida que N cresce.

Em síntese, o EGP escala de forma satisfatória tanto em qualidade, mantendo precisão constante, sem degradação ao acionar a estratégia hierárquica, quanto em custo, com tempo crescendo de forma aproximadamente linear com N .

7 Conclusão

Os resultados experimentais permitem três conclusões principais.

Primeiro, quanto à qualidade do alinhamento, as formulações por metas superam o DTW, e essa vantagem concentra-se na presença de *outliers*: por dispor de um mecanismo de rejeição, evitam a degradação acentuada que o DTW sofre diante de pontos anômalos, degradação que se agrava à medida que a contaminação aumenta. Em cenários sem *outliers*, os dois métodos são quase equivalentes em qualidade.

Segundo, quanto ao tempo, o DTW permanece substancialmente mais rápido em valor absoluto, resolvendo em frações de segundo o que as formulações por metas resolvem em segundos ou dezenas de segundos, consequência da natureza combinatória do problema, frente à programação dinâmica do DTW.

Terceiro, entre as variantes de GP, o EGP e o RGP destacam-se. O RGP apresentou desempenho praticamente idêntico ao do EGP, pois sua formulação mais complexa não foi plenamente explorada no experimento; ainda assim, ela tem grande potencial, por modelar a incerteza dos valores de forma similar à coleta de dados por *wearables*. O ERMCGP, por sua vez, além de não superar os demais em qualidade, foi sistematicamente o mais lento e o mais sujeito a descartes por tempo.

Em suma, GP e DTW não são concorrentes diretos, mas opções com perfis distintos: o DTW é a escolha natural quando a velocidade é prioritária e os dados são limpos, ao passo que as formulações por metas, em particular o EGP e RGP, são preferíveis quando a robustez a *outliers* é essencial. As conclusões aqui apresentadas restringem-se ao regime experimental adotado dados sintéticos, parâmetros calibrados e cenários específicos e diversos caminhos permanecem abertos para trabalhos futuros: a avaliação sobre dados reais, a incorporação de novas restrições e variantes da formulação.

Referências

- Abraham Charnes and William W. Cooper. *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. Wiley, New York, 1961.
- Dave Deriso and Stephen Boyd. A general optimization framework for dynamic time warping. *Optimization and Engineering*, 24(2):1411–1432, 2023.
- Dylan Jones, Graham Wall, and Mohammad Ali Yaghoobi. Extended revised multi-choice goal programming and its application to renewable energy planning. *Journal of the Operational Research Society*, 2026.
- Nico Kaempchen and Klaus Dietmayer. Data synchronization strategies for multi-sensor fusion. In *Proceedings of the IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, volume 85, pages 1–9, 2003.
- Hao-Chun Lu and Shing Chih Tsai. Generalized robust goal programming model. *European Journal of Operational Research*, 2024.
- Carlos Romero. Extended lexicographic goal programming: a unifying approach. *Omega*, 2001.
- Pavel Senin. Dynamic time warping algorithm review. *Information and Computer Science Department University of Hawaii at Manoa Honolulu, USA*, 855(1-23):40, 2008.
- Renjie Wu and Eamonn J Keogh. Fastdtw is approximate and generally slower than the algorithm it approximates. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 34(8):3779–3785, 2020.

Apêndice 1 - Tabelas dos resultados experimentais

Tabela 1: Sensibilidade do parâmetro w_1 no cenário *outlier*.

w_1	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
0,5	10	0,5000	0,9500	0,6762	0,5111	1,0	0,9694	0,0980	0,0597	18,5277
0,6	14	0,5165	0,9500	0,6837	0,5198	1,0	0,9647	0,1024	0,0591	12,1166
0,7	14	0,4639	0,9500	0,7024	0,5431	1,0	0,9636	0,1029	0,0594	11,0540
0,8	14	0,4852	0,9493	0,6871	0,5238	1,0	0,9639	0,1025	0,0594	10,5686
0,9	15	0,4631	0,9447	0,6549	0,4884	1,0	0,9637	0,1009	0,0592	7,9736
1,0	15	0,6611	0,8967	0,4699	0,3105	1,0	0,9654	0,0970	0,0654	2,9835

Tabela 2: Sensibilidade do parâmetro w_1 no cenário *shift*.

w_1	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
0,5	14	0,1719	0,9596	—	—	—	0,9601	0,0650	0,0546	5,5749
0,6	14	0,1484	0,9589	—	—	—	0,9588	0,0650	0,0546	1,5289
0,7	15	0,1429	0,9609	—	—	—	0,9589	0,0650	0,0546	1,1997
0,8	15	0,1543	0,9609	—	—	—	0,9589	0,0650	0,0546	1,0565
0,9	15	0,1632	0,9580	—	—	—	0,9594	0,0650	0,0546	0,9746
1,0	15	0,1498	0,9420	—	—	—	0,9586	0,0647	0,0548	0,6772

Tabela 3: Sensibilidade do parâmetro α no cenário *outlier*.

α	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
0,0	14	0,4571	0,9500	0,6978	0,5367	1,0	0,9628	0,1029	0,0594	8,6684
0,1	15	0,4779	0,9500	0,7032	0,5439	1,0	0,9631	0,1026	0,0584	10,0056
0,2	14	0,5068	0,9500	0,6939	0,5317	1,0	0,9658	0,1024	0,0591	9,1812
0,3	13	0,4980	0,9500	0,6850	0,5214	1,0	0,9666	0,1028	0,0601	7,9400
0,4	13	0,5255	0,9500	0,6886	0,5256	1,0	0,9669	0,1004	0,0582	9,7178
0,5	11	0,4900	0,9500	0,6797	0,5152	1,0	0,9683	0,0995	0,0594	8,9165
0,6	11	0,4871	0,9500	0,6797	0,5152	1,0	0,9685	0,0996	0,0594	12,8910
0,7	7	0,4090	0,9500	0,6667	0,5000	1,0	0,9701	0,0974	0,0599	20,7413
0,8	2	0,4368	0,9500	0,6905	0,5278	1,0	0,9710	0,1066	0,0590	28,4320

Tabela 4: Sensibilidade do parâmetro α no cenário *shift*.

α	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
0,0	15	0,1975	0,9645	—	—	—	0,9540	0,0650	0,0546	1,0680
0,1	15	0,1429	0,9609	—	—	—	0,9589	0,0650	0,0546	0,9195
0,2	15	0,1629	0,9594	—	—	—	0,9589	0,0650	0,0546	1,0716
0,3	15	0,1510	0,9587	—	—	—	0,9586	0,0650	0,0546	1,2854
0,4	15	0,1502	0,9587	—	—	—	0,9585	0,0650	0,0546	1,6857
0,5	14	0,1584	0,9589	—	—	—	0,9594	0,0650	0,0546	1,6121
0,6	14	0,1930	0,9565	—	—	—	0,9594	0,0652	0,0546	2,9196
0,7	12	0,1795	0,9520	—	—	—	0,9602	0,0650	0,0547	10,6187
0,8	1	0,1685	0,9674	—	—	—	0,9941	0,0382	0,0309	28,5950

Tabela 5: Sensibilidade de α_2 no cenário *outlier*.

α_2	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
0,0	12	0,5289	0,9500	0,6825	0,5185	1,0	0,9679	0,1032	0,0603	8,9746
0,1	10	0,5095	0,9500	0,6912	0,5292	1,0	0,9694	0,1029	0,0597	10,3809
0,2	12	0,5228	0,9500	0,6871	0,5243	1,0	0,9674	0,1038	0,0598	9,1268
0,3	12	0,5333	0,9500	0,6865	0,5231	1,0	0,9696	0,1022	0,0604	8,0792
0,4	12	0,5096	0,9500	0,6871	0,5243	1,0	0,9674	0,1034	0,0598	8,9209
0,5	12	0,5175	0,9500	0,6825	0,5185	1,0	0,9674	0,1034	0,0598	7,7244
0,6	11	0,4909	0,9500	0,6846	0,5215	1,0	0,9693	0,1022	0,0601	8,3769
0,7	12	0,4798	0,9500	0,6832	0,5197	1,0	0,9665	0,1033	0,0598	8,0032
0,8	12	0,4772	0,9500	0,6911	0,5289	1,0	0,9667	0,1033	0,0598	6,9902
0,9	12	0,4947	0,9500	0,6825	0,5185	1,0	0,9667	0,1033	0,0598	7,4783
1,0	12	0,4833	0,9500	0,6911	0,5289	1,0	0,9667	0,1033	0,0598	6,6864

Tabela 6: Sensibilidade de ψ no cenário *outlier*.

ψ	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
0,0	10	0,4516	0,9500	0,6762	0,5111	1,0	0,9676	0,1009	0,0603	9,5173
0,5	15	0,4758	0,9500	0,7026	0,5426	1,0	0,9629	0,1026	0,0584	6,7873
1,0	15	0,4907	0,9493	0,6926	0,5306	1,0	0,9630	0,1022	0,0585	8,4198
1,5	15	0,4729	0,9487	0,6973	0,5370	1,0	0,9626	0,1020	0,0585	9,0646
2,0	15	0,5119	0,9373	0,6234	0,4579	1,0	0,9636	0,0998	0,0608	7,1528
2,5	15	0,6555	0,8827	0,4561	0,3013	1,0	0,9647	0,0983	0,0659	6,4485
3,0	15	0,7039	0,7760	0,3128	0,1885	1,0	0,9526	0,1106	0,0845	8,5061
3,5	15	0,7905	0,6633	0,2344	0,1339	1,0	0,9253	0,1399	0,1184	7,7095
4,0	15	0,9715	0,5300	0,1799	0,0993	1,0	0,8596	0,1982	0,1821	6,0335
4,5	15	1,2597	0,4027	0,1460	0,0790	1,0	0,7428	0,2767	0,2670	4,4952

Tabela 7: Comparação principal - cenário *shift*.

modelo	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
EGP	15	0,1429	0,9609	—	—	—	0,9589	0,0650	0,0546	1,0823
RGP	15	0,1348	0,9630	—	—	—	0,9579	0,0650	0,0546	0,9282
ERMCGP	14	0,3095	0,9612	—	—	—	0,9607	0,0675	0,0560	2,2741
DTW	15	0,2257	1,0000	—	—	—	0,9587	0,0595	0,0454	0,0011

Tabela 8: Comparação principal - cenário *outlier*.

modelo	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
EGP	15	0,4779	0,9500	0,7032	0,5439	1,0	0,9631	0,1026	0,0584	10,9773
RGP	15	0,4758	0,9500	0,7026	0,5426	1,0	0,9629	0,1026	0,0584	7,6724
ERMCGP	12	0,5447	0,9500	0,6871	0,5243	1,0	0,9695	0,1026	0,0604	10,4424
DTW	15	2,0307	1,0000	—	—	—	0,5245	0,1913	0,1289	0,0002

Tabela 9: Comparação principal - cenário *mixed*.

modelo	n	warp_err	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
EGP	12	1,0732	0,9176	0,3537	0,2158	0,9833	0,9225	0,1341	0,0919	8,4197
RGP	15	1,1064	0,9174	0,3544	0,2156	1,0000	0,9251	0,1310	0,0903	5,5784
ERMCGP	12	1,1101	0,9176	0,3531	0,2146	1,0000	0,9300	0,1361	0,0929	12,2496
DTW	15	1,7330	1,0000	—	—	—	0,5285	0,2199	0,1369	0,0002

Tabela 10: Severidade sob número crescente de *outliers*.

modelo	n_{out}	ε_w	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
EGP	0	0,0000	1,0000	—	—	—	0,9802	0,0841	0,0388	4,0372
	10	1,0414	0,9000	0,7012	0,5402	1,0000	0,9451	0,1196	0,0889	11,0123
	20	1,7110	0,8053	0,7297	0,5806	0,9833	0,8620	0,1693	0,1478	9,9211
RGP	0	0,0135	0,9993	—	—	—	0,9804	0,0836	0,0389	3,2897
	10	0,9867	0,9000	0,7103	0,5515	1,0000	0,9387	0,1228	0,0867	7,8787
	20	1,7259	0,8013	0,7280	0,5729	1,0000	0,8792	0,1663	0,1487	1,8813
ERMCGP	0	0,0000	1,0000	—	—	—	0,9802	0,0841	0,0388	8,1783
	10	0,9576	0,9000	0,6967	0,5349	1,0000	0,9555	0,1230	0,0889	8,8853
	20	1,6862	0,8027	0,7275	0,5745	0,9933	0,8984	0,1707	0,1477	10,8268
DTW	0	0,3227	1,0000	—	—	—	0,9867	0,0670	0,0354	0,0002
	10	2,1567	1,0000	—	—	—	0,1513	0,2979	0,1999	0,0022
	20	2,7467	1,0000	—	—	—	-0,5788	0,4641	0,3075	0,0002

Tabela 11: Severidade sob magnitude crescente de deslocamento

modelo	s	ε_w	cov	R^2	MAE	DW	tempo
EGP	4	0,0355	0,9875	0,9882	0,0364	0,0264	0,7338
	8	0,1429	0,9609	0,9589	0,0650	0,0546	0,9411
	16	12,5708	0,8810	0,4035	0,4500	0,1132	5,6341
RGP	4	0,0348	0,9875	0,9880	0,0364	0,0264	0,4769
	8	0,1348	0,9630	0,9579	0,0650	0,0546	0,8078
	16	12,4295	0,8452	0,4691	0,4253	0,1369	3,4425
ERMCGP	4	0,0558	0,9882	0,9897	0,0369	0,0264	1,5026
	8	0,3095	0,9612	0,9607	0,0675	0,0560	2,1091
	16	12,5346	0,8828	0,3793	0,4610	0,1101	6,6243
DTW	4	0,0868	1,0000	0,9764	0,0452	0,0332	0,0002
	8	0,2257	1,0000	0,9587	0,0595	0,0454	0,0002
	16	0,6770	1,0000	0,8841	0,1121	0,0836	0,0002

Tabela 12: Escalabilidade

modelo	N	w	cov	F1	prec	rec	R^2	MAE	DW	tempo
EGP	100	0,4170	0,9833	0,7937	0,6614	1,0000	0,9540	0,1076	0,0564	0,8771
	500	0,2623	0,9913	0,6246	0,4722	0,9333	0,9591	0,0881	0,0267	1,5472
	1000	0,2576	0,9977	0,8575	0,7509	1,0000	0,9835	0,0773	0,0221	2,3545
	2000	0,2100	0,9950	0,7608	0,6240	0,9833	0,9753	0,0830	0,0206	4,7171
	2700	0,3113	0,9942	0,7292	0,5873	0,9877	0,9793	0,0817	0,0205	7,9402
	5000	0,3095	0,9947	0,7412	0,5986	0,9733	0,9779	0,0798	0,0195	17,9192
	10000	0,2767	0,9954	0,7587	0,6169	0,9867	0,9794	0,0811	0,0191	31,4013
	10000	0,2767	0,9954	0,7587	0,6169	0,9867	0,9794	0,0811	0,0191	31,4013
DTW	100	1,4483	1,0000	—	—	—	0,5805	0,1917	0,1390	0,0001
	500	0,4450	1,0000	—	—	—	0,9600	0,0784	0,0309	0,0042
	1000	0,4567	1,0000	—	—	—	0,9141	0,0816	0,0319	0,2187
	2000	0,5055	1,0000	—	—	—	0,9271	0,0847	0,0296	0,0641
	2700	0,4765	1,0000	—	—	—	0,9231	0,0853	0,0301	0,1209
	5000	0,4725	1,0000	—	—	—	0,9242	0,0848	0,0281	1,0460
	10000	0,4987	1,0000	—	—	—	0,9170	0,0854	0,0281	2,4584
	10000	0,4987	1,0000	—	—	—	0,9170	0,0854	0,0281	2,4584