



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



LUCAS CARVALHO ROSA TRUZZI

## **Cálculo de variações e problemas de controle ótimo: teoria e aplicações numéricas**

Campinas  
25/06/2025

LUCAS CARVALHO ROSA TRUZZI

## **Cálculo de variações e problemas de controle ótimo: teoria e aplicações numéricas\***

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina de Projeto Supervisionado I, sob a orientação do João Vitor da Silva.

---

\*Este trabalho foi financiado pela PIBIC, projeto 45122/2023.

## Resumo

O objetivo final do projeto Truzzi [2023a] durante a vigência da bolsa PIBIC foi de estudar um Método Variacional para resolução de um Problema de Valor de Contorno não-linear específico, no qual utilizou-se do Teorema do Passo da Montanha (TPM) para condicionar a existência de pontos críticos para um funcional que era associado ao problema.

A fim de compreender o Método Variacional supracitado, estudou-se o Cálculo Variacional e algumas de suas aplicações, tal como o problema da Braquistócrona.

Neste trabalho, objetivou-se introduzir o leitor à teoria do Cálculo de Variações e resolver o problema da Braquistócrona de duas maneiras: de forma analítica, usando a equação de Euler-Lagrange, e de forma numérica, na linguagem de programação Julia. Finalmente, foi apresentada a teoria de Métodos Variacionais e a aplicação do método que usa o Teorema do Passo da Montanha a um PVC.

## Abstract

The main objective of the project Truzzi [2023a], developed under the PIBIC scholarship program, was to study a Variational Method for solving a specific nonlinear Boundary Value Problem (BVP), where the Mountain Pass Theorem (MPT) was used to ensure the existence of critical points for a functional associated with the problem.

In order to understand the aforementioned Variational Method, the Calculus of Variations and some of its applications were studied, such as the Brachistochrone problem.

This work aims to introduce the reader to the theory of the Calculus of Variations and to solve the Brachistochrone problem in two ways: analytically, using the Euler-Lagrange equation, and numerically, using the Julia programming language. Finally, the theory of Variational Methods and the application of the method that employs the Mountain Pass Theorem to a BVP were presented.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Cálculo Variacional</b>	<b>7</b>
2.1	Teorema Fundamental do Cálculo Variacional (TFCV)	9
2.2	A equação de Euler Lagrange	9
<b>3</b>	<b>Problema Variacional - A Braquistócrona</b>	<b>11</b>
3.1	Solução Analítica - Braquistócrona	12
3.2	Solução Numérica - Braquistócrona	14
3.3	Discussão dos Resultados - Braquistócrona	18
3.4	Código - Braquistócrona	18
<b>4</b>	<b>Outros Problemas Variacionais</b>	<b>20</b>
4.1	A Catenóide	20
4.2	As Geodésicas no Plano	22
<b>5</b>	<b>Métodos Variacionais</b>	<b>24</b>
5.1	$\sigma$ -álgebra e Espaço de Lebesgue	24
5.2	Solução Fraca	26
5.3	Espaços de Banach e Sobolev	27
5.4	Funcional associado ao problema	28
5.5	Condição de Palais-Smale	30
5.6	Teorema do Passo da Montanha	30
<b>6</b>	<b>Aplicação do Método Variacional usando TPM</b>	<b>32</b>
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>36</b>

# 1 Introdução

O cálculo variacional é a área da matemática que trata de problemas de otimização (problemas de máximo ou mínimo) em espaços de funções. É uma generalização da otimização do Cálculo Diferencial, uma vez que trata de funções cujo domínio é constituído por um conjunto de curvas admissíveis (baseado em Flores [2011] e Costa [2018]).

No século XVII, vários problemas de otimização foram apresentados por matemáticos da época, como o que foi tratado neste trabalho: A Braquistócrona - curva que liga dois pontos, sob força gravitacional constante e sem considerar influências externas, no menor tempo possível. Esses problemas não eram possíveis de serem solucionados pelo Cálculo Elementar. Nesse contexto surgiu o Cálculo Variacional, cujos inventores foram Jackes (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748) e contou com avanços de L. Euler (1701-1783) e J. L. Lagrange (1736-1813). Estes dois últimos criaram a importante equação que determina os pontos críticos de funcionais - A Equação de Euler-Lagrange.

Em meados do século XIX, através de Dirichlet e Riemann, houve a tentativa de desenvolver um método capaz de solucionar equações diferenciais mais robustas, como o problema de Dirichlet para a equação de Laplace, com conceitos do Cálculo de Variações (vide em de Figueiredo [1988]).

Após muitos avanços no desenvolvimento das áreas de Otimização, Análise Funcional e Topologia, na metade do século XX Ambrosetti e Rabinowitz desenvolveram o teorema mais importante deste trabalho: o Teorema do Passo da Montanha (TPM), tal que garante a existência de ponto crítico do tipo minmax para um funcional diferenciável definido no Espaço de Banach, satisfazendo algumas condições, como a condição de Palais-Smale. O Problema de Valor de Contorno (PVC) não linear:

$$\begin{cases} -p(t)u''(t) - p'(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t, u) & \text{em } (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

pode ser estudado por meio de uma abordagem variacional. Neste trabalho, investigamos a aplicação do Teorema do Passo da Montanha à equação (1), utilizando-o como método para demonstrar a existência de soluções sob hipóteses adequadas.

## 2 Cálculo Variacional

Inicialmente, serão apresentados conceitos fundamentais do Cálculo Variacional. O conteúdo desta seção provém de Truzzi [2023b].

**Definição 2.1:** *Seja  $\nu$  uma classe de funções  $y(x)$ . Se toda função  $y(x) \in \nu$  se corresponde segundo uma regra a um determinado número real  $\Phi$ , dizemos que na classe  $\nu$  está definido um **funcional**  $\Phi$  e escrevemos*

$$\Phi = \Phi[y(x)] \quad (2)$$

Podemos dizer que um funcional é "uma função de uma função", pois  $\Phi$  é função de  $y$ , que por sua vez é função de  $x$ .

Essencialmente, os problemas variacionais tratados serão da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \Phi[y(x)] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx \\ \text{sujeito a:} \\ y \in Y_{ad} = \{y \in C^1[a, b] \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\} \end{array} \right. \quad (3)$$

tal que  $Y_{ad}$  é o conjunto das funções admissíveis: funções contínuas, com primeira derivada contínua e com condições de contorno definidas em  $[a, b]$  (baseado em Leitao [2001]).

O incremento de um funcional  $\Phi$  é denotado por  $\Delta\Phi$ , dado por

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi[y(x)] = \Phi[y(x) + \delta y] - \Phi[y(x)] \quad (4)$$

tal que  $\delta y(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ ,  $\delta y(x)$  é dito variação da função  $y(x)$ ,  $\tilde{y}(x)$  representa o caminho variado da função real  $y(x)$  e a variação da função nos extremos do intervalo é nula, isto é,  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ , como indicado na figura abaixo:

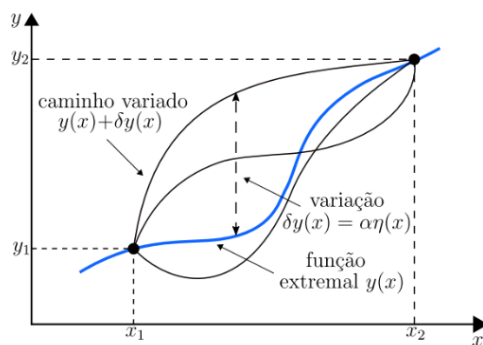


Figura 1: Variação de uma função, retirado de Costa [2018] - página 16

**Definição 2.2.** Se o incremento do funcional  $\Delta\Phi$  puder ser escrito na forma:

$$\Delta\Phi = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\|\delta y\|, \quad (5)$$

onde  $L[y(x), \delta y]$  é um funcional linear com respeito a  $\delta y$  e  $\beta(y(x), \delta y)$  tende a zero quando  $\|\delta y\| \rightarrow 0$ , então  $L[y(x), \delta y]$  é chamado de **variação do funcional**  $\Phi$ , representado por  $\delta\Phi$ .

Neste caso, dizemos que  $\Phi[y(x)]$  é diferenciável no ponto  $y(x)$ .

**Definição 2.3:** Um funcional  $\Phi$  com domínio  $\nu$  tem um extremo relativo em  $y^*$  se existe um  $\epsilon > 0$  tal que, para todas as funções  $y \in \nu$  que satisfaçam  $\|y - y^*\| < \epsilon$ , o incremento de  $\Phi$  tem o mesmo sinal.

- Se  $\Delta\Phi = \Phi(y) - \Phi(y^*) \geq 0$ ,  $y$  é um mínimo relativo.
- Se  $\Delta\Phi = \Phi(y) - \Phi(y^*) \leq 0$ ,  $y$  é um máximo relativo.

Caso a desigualdade seja satisfeita para todo  $\epsilon > 0$ , então  $\Phi(y^*)$  é um mínimo ou máximo absoluto. Seguem o **Lema de du Bois-Reymond** e uma propriedade do operador variacional ( $\delta$ ), que serão fundamentais para dedução da Equação de Euler-Lagrange na seção 2.2.

**Lema 2.1:** Seja  $f \in C[a, b] \rightarrow R$  tal que para todo  $v \in C^1[a, b]$  com  $v(a) = v(b) = 0$  tenhamos

$$\int_a^b f(x)v(x)dx = 0$$

. Então  $f \equiv 0$  em  $[a, b]$ .

**Propriedade 2.1:** O operador variacional  $\delta$  é comutativo com o operador diferencial e com o operador integral, isto é:

1.  $\delta\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = \frac{d}{dx}(\delta y(x))$
2.  $\delta\left(\int y(x)dx\right) = \int \delta y(x)dx$

## 2.1 Teorema Fundamental do Cálculo Variacional (TFCV)

**Teorema 2.1:** *Seja  $y$  uma função em  $\nu$  e  $\Phi(y)$  um funcional diferenciável em  $y$ . Suponha que todas as funções em  $\nu$  não sejam limitadas. Se  $y^*$  é um extremo, a variação de  $\Phi$  deve se anular em  $y^*$ , isto é,  $\delta\Phi(y, \delta y) = 0$  para todo  $\delta y$  admissível.*

O TFCV é de suma importância para o cálculo variacional, pois condiciona encontrar extremos de funcionais.

A prova do teorema é feita por contradição. Supomos que  $y^*$  é um extremo com  $\delta\Phi(y^*, \delta y) \neq 0$  e verificamos que  $\delta\Phi(y^*, \delta y)$  troca de sinal numa vizinhança de  $y^*$ . Pela definição (3.2),  $y^*$  não será um extremo.

Logo, se  $y^*$  é um extremo, então  $\delta\Phi(y, \delta y) = 0$  para todo  $\delta y$  admissível, e o teorema é provado.

## 2.2 A equação de Euler Lagrange

A equação de Euler-Lagrange é fundamental para resolver problemas do cálculo variacional, pois é possível encontrar extremos de funcionais de problemas como (3) através de sua aplicação.

A seguir, a demonstração da Equação de Euler-Lagrange.

Ao considerar o funcional

$$\Phi[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx \quad (6)$$

tal que  $y(x) \in Y_{ad}$ , pode-se determinar o incremento do funcional (6) através da equação (4) por:

$$\Delta\Phi[y(x)] = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')dx \quad (7)$$

Usando o polinômio de Taylor de primeira ordem para 2 variáveis ( $y$  e  $y'$ ) na função  $F(x, y, y')$ , além do fato que  $\Phi$  é diferenciável em  $C^1[a, b]$ , pode-se expressar a variação do funcional  $\delta\Phi$  por:

$$\delta\Phi = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (8)$$

Agora, suponha que temos o problema identificado em (3).

Pode-se manipular a expressão em (8) de modo a obter, pela comutatividade do operador variacional ( $\delta$ ) com o operador diferencial (propriedade 2.1):

$$\delta\Phi = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx \quad (9)$$

Integrando por partes o segundo termo de (9), obtém-se:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right) dx \quad (10)$$

Por  $\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0$ , tem-se, na substituição de (10) em (8):

$$\delta\Phi = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx. \quad (11)$$

Como se anseia minimizar (ou maximizar, a depender do problema) o funcional  $\Phi$ , aplica-se o Teorema Fundamental do Cálculo Variacional em (11)

$$\delta\Phi = 0 \implies \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx = 0 \quad (12)$$

Como a variação da função ( $\delta y$ ) se anula em  $a$  e em  $b$ , chamando  $g(x) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$  e  $h(x) = \delta y$  e aplicando o Lema de du Bois-Reymond (Lema 2.1), tem-se, finalmente:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0. \quad (13)$$

A equação em (13) é conhecida como a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional (6), e a função  $F(x, y, y') = L(x, y, y')$  é chamada de função Lagrangeana.

**A segunda forma da equação de Euler-Lagrange:** *Se a função Lagrangiana independe de  $x$  explicitamente, então a equação de Euler-Lagrange se reduz a*

$$L(y, y') - y' \frac{\partial L(y, y')}{\partial y'} = c \quad (= \text{constante}). \quad (14)$$

### 3 Problema Variacional - A Braquistócrona

O problema da braquistócrona se resume em encontrar a curva que liga um ponto até outro ponto, e que ao colocar uma partícula maciça (massa  $m$ ) em tal curva com comprimento  $S$ , sem influências externas, sendo o ponto inicial (ponto A) da trajetória da partícula na curva acima do ponto final (ponto B), sob força gravitacional constante, ela percorra o caminho entre estes pontos no menor tempo possível. A terminologia do nome braquistócrona vem do grego: "brakhisto": menor, "chronos": tempo.

Johann Bernoulli propôs este problema em Junho de 1696, que foi publicado na *Acta Eruditorum de Leipzig*. Ele desafiou os cientistas da época a chegarem no resultado do problema em 6 meses. Ao todo, foram apresentadas 4 soluções para o problema: pelo próprio Johann, por seu irmão (Jacob Bernoulli), Newton e por Leibniz. Entretanto, não foram encontradas no prazo estipulado, este que foi prolongado a pedido de Leibniz (retirado de Tagliolatto [2015]).

Abaixo, tem-se uma ilustração da cicloide, tal qual se uma bola percorrer uma linha em forma de cicloide, seu percurso resultará na curva braquistócrona.

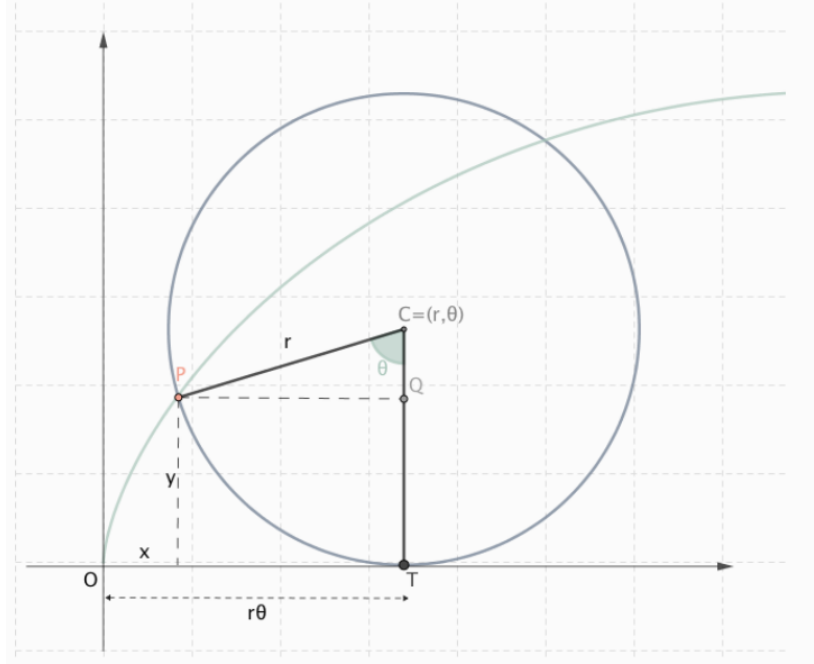


Figura 2: A cicloide

### 3.1 Solução Analítica - Braquistócrona

Como não há influências externas, a partícula sofre ação apenas da força peso ( $\vec{F}$ ) durante o trajeto.

Sendo a força  $\vec{F}$  conservativa, então  $\vec{F}$  equivale a menos o gradiente da energia potencial ( $-\vec{\nabla}U$ ). Logo,

$$\vec{F} = mg\hat{y} = -\vec{\nabla}U \implies mg = -\frac{dU}{dy} \implies \int_A^B dU = \int_0^y -mgdy \quad (15)$$

Integrando (15), tem-se que  $U(B) - U(A) = \Delta U = -mgy$ .

Pela conservação de energia mecânica, tal que  $T$  é a energia cinética e  $v$  a velocidade da partícula:

$$\Delta U + \Delta T = 0 \iff -mgy + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \implies v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \implies dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \quad (16)$$

Finalmente, pode-se definir o tempo total que a partícula leva para completar

a trajetória por:

$$T = \int_0^t dt = \int_C \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \quad (17)$$

Como objetiva-se minimizar o tempo ( $T$ ), então definimos a função Lagrangeana por

$$L(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \text{ e o funcional associado a ela por } \Phi(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx.$$

Portanto, o problema se resume em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \Phi[y(x)] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \\ \text{sujeito a} \\ y \in \{C^1[0, x_1] | y(0) = 0, y(x_1) = y_1.\} \end{array} \right. \quad (18)$$

É possível observar que  $L$  independe da variável  $x$  explicitamente. Pode-se, então, aplicar a segunda forma da equação de Euler-Lagrange (equação (2.2)) para encontrar os extremos de  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left( \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \right) = c \\ \implies & \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \frac{(1+y'^2) - y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = c \\ \implies & \sqrt{y(1+y'^2)} = \frac{1}{c} \iff y(1+y'^2) = \frac{1}{c^2} = c_1 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $\frac{dy}{dx} = y' = \cot g(t) \implies y = \frac{c-1}{1+\cot g^2(t)}$ , consegue-se obter, através de relações trigonométricas e alguns passos de manipulação algébrica, a solução

$$y = c_1 \operatorname{sen}^2(t) = \frac{c_1}{2}(1 - \cos(2t)) \quad (19)$$

Note ainda que  $dy = c_1 \operatorname{sen}(2t) dt = 2c_1 \operatorname{sen}(t) \cos(t) dt$ , e que portanto, obtém-se

a diferencial de  $x$  por:

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} \implies dx = \frac{dy}{y'} &= \frac{2c_1 \operatorname{sen}(t) \cos(t)}{\operatorname{cotg}(t)} dt = \frac{2c_1 \operatorname{sen}(t) \cos(t)}{\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}} dt \\ &= 2c_1 \operatorname{sen}^2(t) dt = c_1(1 - \cos(2t)) dt \end{aligned} \quad (20)$$

Integrando (20), a fim de obter a equação em  $x$ :

$$x(t) = c_1 \int (1 - \cos(2t)) dt = c_1 \left[ t - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) \right] + c_2 \implies x(t) = \frac{c_1}{2} [2t - \operatorname{sen}(2t)] + c_2 \quad (21)$$

De 19 e 21 as equações paramétricas da curva são:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{c_1}{2} [2t - \operatorname{sen}(2t)] + c_2 \\ y(t) = \frac{c_1}{2} (1 - \cos(2t)) \end{array} \right. \xrightarrow{(22)} \begin{array}{l} \text{Mudanças de variáveis} \\ 2t \rightarrow \theta \\ \frac{c_1}{2} \rightarrow r \end{array} \implies \left\{ \begin{array}{l} x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}(\theta)) \\ y(\theta) = r(1 - \cos(\theta)) \end{array} \right. \quad (23)$$

Partiu-se da origem  $x(0) = 0$ , implica que  $c_2 = 0$ . Aplica-se as mudanças de variáveis adequadas em (22) para obter as equações (23), estas que representam uma cicloide de raio  $r$  e ângulo  $\theta$ , vide em Figura 3.

### 3.2 Solução Numérica - Braquistócrona

O algoritmo a seguir foi implementado em Julia, utilizando as bibliotecas Roots e Plots. O código está na última subseção desta seção (Listing 1).

A ideia foi comparar o tempo que uma partícula leva para percorrer a Braquistócrona com o tempo que esta mesma leva para percorrer uma reta, partindo da origem do sistema cartesiano de coordenadas até um ponto final em comum.

Como partiu-se da origem (na verdade, do ponto  $(10^{-6}, 0)$  para evitar a divisão por 0 na equação 24), então o ângulo inicial de abertura da cicloide é zero. Para calcular o ângulo total de abertura, consideramos a posição final da partícula  $(x_f, y_f)$  nas equações paramétricas 23, como segue:

$$\frac{x_f(\theta_f)}{y_f(\theta_f)} = \frac{1 - \cos \theta_f}{\theta - \sin \theta_f} \implies f(\theta) = \frac{1 - \cos \theta_f}{\theta - \sin \theta_f} - \frac{x_f(\theta_f)}{y_f(\theta_f)} \quad (24)$$

Ou seja, basta encontrar o zero da função  $f$ . Para encontrá-lo, utilizou-se a função `find_zero(f, valor/intervalo)` de Roots, em Julia, tal que procura o zero de uma função  $f$  dado um intervalo ou um valor inicial de busca.

Embora limitar o intervalo tenha mais garantia de sucesso na busca, especialmente quando  $y_f \gg x_f$ , utiliza do método da bissecção (padrão) para encontrar os zeros da função. Isto significa que devem existir pelo menos dois pontos  $a, b$  tal que  $f(a).f(b) < 0$ . Já quando se passa um valor inicial de busca como argumento, o método utilizado é o Método da Secante de Ordem 0 (padrão), que é mais rápido e robusto, mas se não convergir rapidamente para a solução, recua para a bissecção clássica, porém com ausência de intervalo limitado (retirado de Sarnoff and contributors [2025]).

O intervalo  $[10^{-6}, \pi]$  foi utilizado no argumento de `find_zero` do algoritmo. Porém, para cumprir a restrição, é necessário que existam pelo menos 1 valor negativo e 1 valor positivo de  $f$  no intervalo considerado.

Entretanto, note que

$$f(10^{-6}) \approx 3,000.10^6 - \frac{y_f}{x_f}$$

$$f(\pi) \approx 0,637 - \frac{y_f}{x_f}$$

Logo, se  $\frac{y_f}{x_f} < 0,637$  ou  $\frac{y_f}{x_f} > 3,000.10^6$ , então só existirão valores positivos ou negativos, respectivamente para cada caso, pois a função  $f$  é monótona decrescente em  $(0, \pi]$ .

Por isso, aplicou-se a seguinte verificação:

- Se  $y_f < x_f$ , então usa-se o intervalo  $[10^{-6}, \pi]$  como argumento da função `find_zero`;
- Senão, parte-se do ponto 2 com o Método da Secante.

O caso  $\frac{y_f}{x_f} > 3,000.10^6$  não foi considerado, pois não se trabalhou com valores muito grandes de  $x$  e  $y$ .

Prosegue-se calculando o raio da cicloide pela substituição de  $x_f, \theta_f$  na equação paramétrica de  $x$ , e divide-se os ângulos em `num_iter + 1` subintervalos iguais, a fim de avaliar cada par  $(x, y)$  pelas paramétricas, e posteriormente plotar num gráfico que os ligará por retas.

Calcula-se o tempo aproximado para completar a trajetória de duas formas: a primeira, considerando o algoritmo iterativo acima, consiste em aproximar o tempo total percorrido pela partícula somando os tempos em pequenos trechos da curva. Para isso, calcula-se a distância  $ds$  entre dois pontos consecutivos da trajetória e a velocidade média aproximada entre eles, assumindo conservação da energia mecânica. O tempo em cada trecho é estimado por  $dt = \frac{ds}{v}$ , e a soma desses valores fornece uma estimativa do tempo total de descida.

A segunda forma utiliza a fórmula analítica do tempo de descida na cicloide, dada por:

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \theta_f \quad (25)$$

onde  $R$  é o raio da cicloide calculado anteriormente e  $\theta_f$  é o ângulo total da curva. Esta expressão deriva diretamente da solução do problema da braquistócrona via cálculo variacional, sendo exata sob as hipóteses ideais (ausência de atrito, partícula pontual e aceleração gravitacional constante). Uma vez que foram realizadas muitas iterações ( $10^5$ ) para cada teste, o tempo aproximado por retas ficou muito próximo do tempo pela fórmula analítica (erro na ordem de  $10^{-5}$  aproximadamente).

Foram realizados 3 testes: com  $x_f < y_f$ ,  $x_f = y_f$  e  $x_f > y_f$ , com  $num\_iter = 100000$  em todos. Os valores de tempo obtidos para cada teste seguem tabelados e as trajetórias graficadas:

Teste	$x_f$	$y_f$	$T_{braq}(s)$	$T_{reta}(s)$	$\frac{T_{reta}}{T_{braq}} - 1$
1	5	10	1.552	1.596	2.88%
2	10	10	1.843	2.019	9.55%
3	20	10	2.547	3.193	25.33%

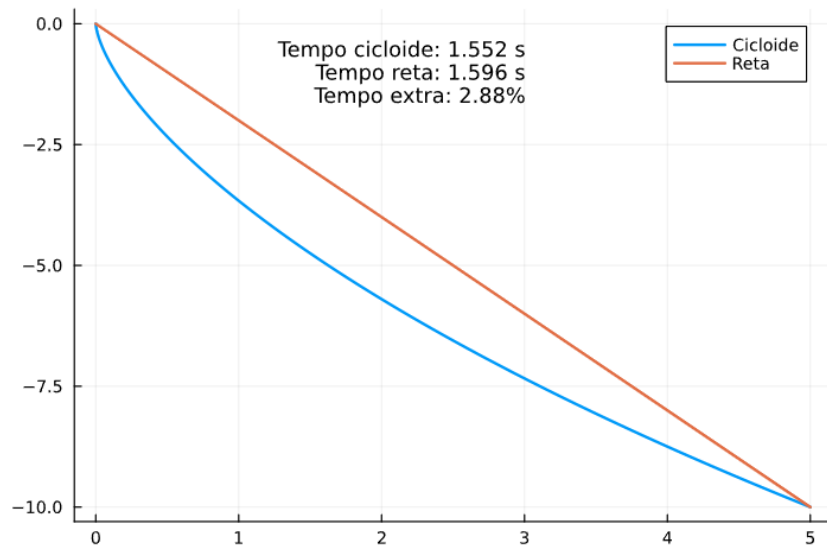


Figura 3: Teste 1 - Braquistócrona e Reta

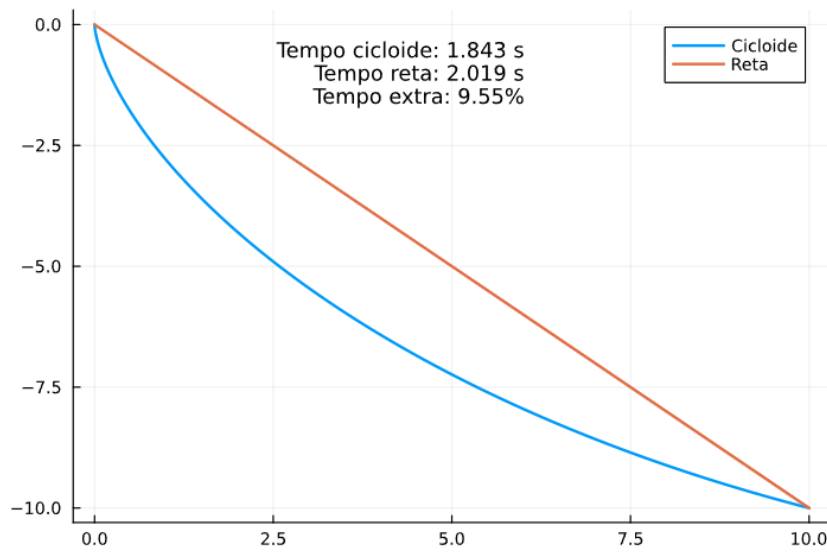


Figura 4: Teste 2 - Braquistócrona e Reta

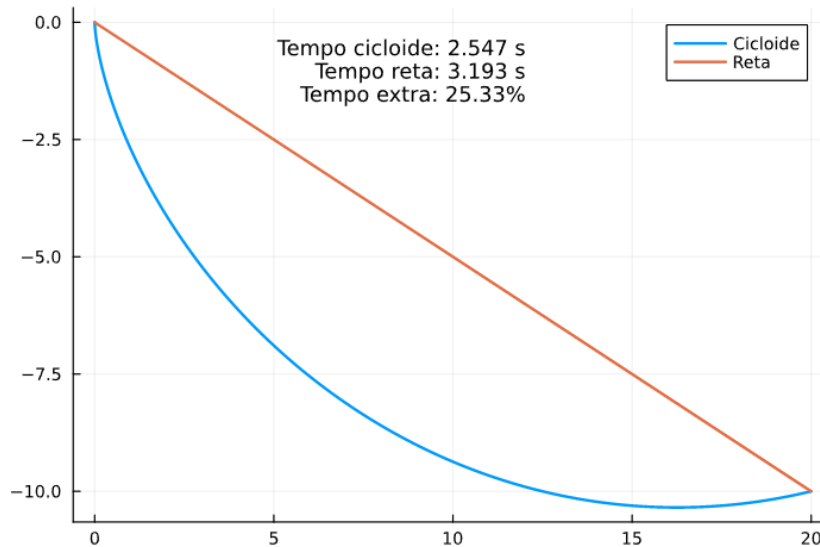


Figura 5: Teste 3 -Braquistócrona e Reta

**Observação:** O eixo  $y$  está invertido no gráfico, considerando a força gravitacional atuando de cima para baixo.

### 3.3 Discussão dos Resultados - Braquistócrona

Conforme o esperado, os resultados apresentados na Tabela relatam que o tempo de descida ao longo da cicloide é menor do que o tempo correspondente ao percurso pela reta que conecta os mesmos pontos iniciais e finais, especialmente conforme a razão  $\frac{x_f}{y_f}$  aumenta, devido ao incremento da curvatura da cicloide.

Além disso, a comparação entre os dois métodos utilizados para calcular o tempo da cicloide — o método iterativo, baseado na soma dos tempos aproximados em pequenos segmentos da curva, e a fórmula analítica (25) — mostrou resultados muito próximos, o que indica que a discretização adotada é adequada para a representação numérica da trajetória. Essa aproximação confirma a robustez do método numérico empregado.

### 3.4 Código - Braquistócrona

Listing 1: Algoritmo em Julia para comparação entre cicloide e reta

```
1 const gravidade = 9.81
```

```

2 using Roots, Plots
3
4 function Cicloide(xf, yf, max_iter)
5     f( $\theta$ ) = (1 - cos( $\theta$ ))/( $\theta$  - sin( $\theta$ )) - yf/xf
6     if xf < yf
7          $\theta$ f = find_zero(f, (1e-6, \pi))
8     else
9          $\theta$ f = find_zero(f, 2)
10    end
11    R = xf/( $\theta$ f - sin( $\theta$ f))
12     $\theta$  = range(0,  $\theta$ f, length = max_iter + 1)
13    x = R .* ( $\theta$  .- sin. ( $\theta$ ))
14    y = -R .* (1 .- cos. ( $\theta$ ))
15    return x, y, R,  $\theta$ f
16 end
17
18 function Reta(xf, yf)
19     return [0, xf], [0, -yf]
20 end
21
22 function Tempo_aproximado(x, y)
23     T = 0.0
24     for i in 1:length(x)-1
25         dx = x[i+1] - x[i]
26         dy = y[i+1] - y[i]
27         ds = sqrt(dx^2 + dy^2)
28         h = (y[i] + y[i+1]) / 2
29         v = sqrt(2 * gravidade * abs(h))
30         T += ds / v
31     end
32     return T
33 end
34
35 function Tempo_Cicloide(R,  $\theta$ f)
36     return sqrt(R/gravidade)* $\theta$ f
37 end
38

```

```

39 function tempo_Reta(xf, yf)
40     L = sqrt(xf^2 + yf^2)
41      $\theta$  = atan(abs(yf) / abs(xf))
42     a = gravidade * sin( $\theta$ )
43     t = sqrt(2 * L / a)
44     return t
45 end
46
47 xf = 20
48 yf = 10
49 max_iter = 100000
50 x_cicloide, y_cicloide, R,  $\theta$ f = Cicloide(xf, yf, max_iter)
51 t_cicloide_aprox = Tempo_aproximado(x_cicloide, y_cicloide)
52 t_cicloide = Tempo_Cicloide(R,  $\theta$ f)
53
54 x_reta, y_reta = Reta(xf, yf)
55 t_reta = tempo_Reta(xf, yf)
56
57 xf/yf
58 t_reta/t_cicloide - 1
59
60 plot(x_cicloide, y_cicloide, label="Cicloide",lw=2)
61 plot!(x_reta, y_reta, label="Reta",lw=2)

```

## 4 Outros Problemas Variacionais

Nesta seção serão apresentados outros dois problemas variacionais resolvidos analiticamente: A Catenóide (superfície mínima de revolução) e as Geodésicas no Plano.

### 4.1 A Catenóide

O problema consiste em determinar a superfície mínima de rotação, ou seja, a superfície que para um dado um volume apresenta a menor área superficial possível.

Em 1740, Euler resolveu este problema (Costa [2018]). Sabe-se que a área de

uma superfície de revolução é dada por

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (26)$$

Desta forma, o funcional a ser minimizado é:

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (27)$$

A Lagrangeana é dada por  $L(x, y, y') = 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}$ . Aplicando a equação de E-L para  $L(x, y, y') = 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (2\pi y(x) \sqrt{1 + y'^2}) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial}{\partial y'} (2\pi y \sqrt{1 + y'^2}) \right] &= 0 \\ \implies 2\pi \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{2\pi y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) &= 0 \\ \implies 2\pi \sqrt{1 + y'^2} - 2\pi \left[ \frac{\frac{d}{dx}(y y') \sqrt{1 + y'^2} - y y' \frac{d}{dx} \sqrt{1 + y'^2}}{1 + y'^2} \right] &= 0 \\ \implies 2\pi \sqrt{1 + y'^2} - 2\pi \left[ \frac{y'^2 + y y'' \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2 y y''}{\sqrt{1 + y'^2}}}{1 + y'^2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação e agrupando todos os termos comuns, obtém-se que a equação de Euler-Lagrange associada ao problema será:

$$2\pi \left[ \frac{1 + y'^2 - y''}{(1 + y')^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \quad (28)$$

Multiplicando toda a equação (28) por  $y'$ , pode-se escrevê-la como:

$$2\pi \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0. \quad (29)$$

Portanto, o candidato a extremo para o problema será:

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C_1 \quad (30)$$

Para resolver a equação diferencial  $\frac{y(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C_1$ , usar-se-á a substituição  $\frac{dy}{dx} = \sinh(s)$ . Então  $y(x) = C_1 \sqrt{1 + \sinh(s)^2} = C_1 \cosh(s)$ , e

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \rightarrow dx = \frac{dy}{y'(x)} = \frac{C_1 \sinh(s)}{\sinh(s)} ds \rightarrow x = C_1 s + C_2.$$

A superfície buscada é formada pela revolução de uma curva na forma paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= C_1 s + C_2 \\ y &= C_1 \cosh(s), \\ y(x) &= C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

As superfícies geradas pela curva (31) são os catenóides.  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno.

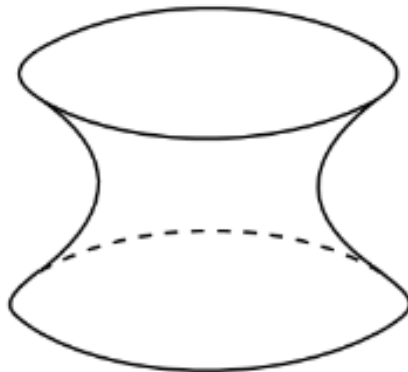


Figura 6: Imagem de uma Catenóide - retirada de Costa [2018]

## 4.2 As Geodésicas no Plano

O problema das Geodésicas no plano é determinar a família de curvas de menor comprimento que une dois pontos, sejam eles  $P_0 = (t_0, y_0)$  e  $P_1 = (t_1, y_1)$ .

Para solucionar o problema variacional, é necessário parametrizar as curvas

admissíveis no plano que unem estes dois pontos  $P_0$  e  $P_1$ .

Considere a seguinte parametrização:

$$y = y(t), x \in [t_0, t_1]$$

$$y(t_0) = y_0; y(t_1) = y_1$$

Pode-se encontrar o comprimento de uma curva no plano através da fórmula:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt \quad (32)$$

Define-se então o funcional do problema como sendo

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt \quad (33)$$

Assim, o problema variacional se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(y) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in \{C^1[t_0, t_1] | y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1\} \end{array} \right. \quad (34)$$

Com a Lagrangeana associada  $L(t, y, y') = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$ . Portanto, através da equação de Euler-Lagrange, para encontrar os extremos deste funcional, obtém-se

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \rightarrow 0 - \frac{d}{dt} \left[ \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0 \quad (35)$$

Integrando a equação (35)

$$\frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = C \quad (36)$$

onde  $C$  é uma constante. Daí,  $y'$  deve ser constante, ou seja,  $y(t) = At + B$ , onde  $A$  e  $B$  são constantes.

Logo, a família de soluções do problema variacional são as retas admissíveis, tais quais cumprem as condições de contorno  $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$ .

## 5 Métodos Variacionais

Nesta seção serão apresentados os principais teoremas, definições e resultados estudados, que servirão como base para solucionar o problema em (1). O conteúdo desta seção foi baseado em Carvalho [2021] e Furtado [2004].

### 5.1 $\sigma$ -álgebra e Espaço de Lebesgue

**Definição 4.1:** O conjunto das partes de um certo conjunto  $X$ , denotado por  $\wp(X)$ , é o conjunto formado por todos os subconjuntos de  $X$ .

**Definição 4.2:** A  $\sigma$ -álgebra de um conjunto  $X$  é um subconjunto  $A$  do conjunto  $\wp(X)$  tal que satisfaz as seguintes condições:

- $\emptyset, X \in A$ ;
- Se  $E \in A$ , então  $E^c \in A$ ;
- Considerando uma sequência  $(E_n) \in A$ , então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in A$ .

**Definição 4.3:** Considere  $S$  a família de intervalos abertos em  $\mathbb{R}$ . A  $\sigma$ -álgebra gerada por  $S$ , denotada por  $\mathbb{B}$ , é denominada  **$\sigma$ -álgebra de Borel**, e seus elementos chamados de borelianos.

#### Definição 4.4 - Medida de uma $\sigma$ -álgebra:

Seja  $A$  uma  $\sigma$ -álgebra. Chama-se medida em  $A$  uma função  $\mu : A \rightarrow [0, +\infty]$  que satisfaz:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2. Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos em  $A$ , então:

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n). \quad (37)$$

#### Exemplo de medida de $\sigma$ -álgebra: Medida de Lebesgue:

Considere  $X = \mathbb{R}$  e  $A = \mathbb{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel. Existe uma única medida definida em  $\mathbb{B}$  tal que  $\mu(a, b) = b - a$  para todo intervalo aberto  $(a, b)$ . Essa medida é chamada de medida de Lebesgue.

**Definição 4.5:** Uma função que assume valores reais é dita **simples** se ela possui um número finito de valores.

Um exemplo de **função simples mensurável** é:

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j X_{E_j} \quad (38)$$

tal que  $a_j \in \mathbb{R}$  e  $X_{E_j}$  é a função característica de um conjunto  $E_j$  em  $X$ . Entre todas as representações possíveis de  $\varphi$ , existe uma **representação padrão** caracterizada pelo fato de  $a_j$  serem distintos e  $E_j$  serem disjuntos e não vazios, tal que  $X = \bigcup_{j=1}^n E_j$ .

**Definição 4.6 - A integral de Lebesgue da função mensurável simples padrão:**

Seja  $\mathbb{B}$  a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos e  $\mu$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{B}$ . Se  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável simples padrão, então a integral de Lebesgue de  $\varphi$  sobre  $\Omega$  é definida por:

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(X_{E_j}) \quad (39)$$

**Definição 4.7 - Integral de Lebesgue de funções positivas:**

Se  $f$  pertence ao conjunto das funções reais mensuráveis positivas  $M^+(X, \mathbf{X})$ , então extendemos a definição da Integral de Lebesgue de  $f$  para

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup \int_{\Omega} \varphi d\mu \quad (40)$$

Onde o supremo estende-se a todas as funções simples  $\varphi$  definidas em  $M^+(X, \mathbf{X})$ .

Seja  $f(x)$  uma função que admite valores reais, e defina:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Como  $f^+(x), f^-(x) \in M^+(X, \mathbf{X})$ , então a extensão da definição da Integral de Lebesgue para funções reais é dada por:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu \quad (41)$$

Segue um teorema fundamental para a integração em espaços de Lebesgue:

**Teorema 4.1:** *Toda função que é integrável à Riemann é também integrável à Lebesgue e as duas integrais são iguais.*

No entanto, nem toda função integrável à Lebesgue é também integrável à Riemann.

**Definição 4.8:** *Seja  $\Omega \in \mathbb{B}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$ . O **espaço  $L^p$**  é definido por:*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}. \quad (42)$$

**Definição 4.9:** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . Definimos a **norma de  $f$** , função com integral finita e que assume valores reais com respeito a  $\mu$  sobre  $X$  no espaço  $L^p$  como:*

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (43)$$

## 5.2 Solução Fraca

**Definição 4.10:** *Seja  $u \in L^p(\Omega)$ , em que  $\Omega \subset \mathbb{R}$  é um intervalo e  $1 \leq p < \infty$ .  $u$  é fracamente diferenciável se existir  $v \in L^p(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} u\varphi' d\mu = - \int_{\Omega} v\varphi d\mu, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega), \quad (44)$$

Chamamos  $v$  de **derivada fraca** de  $u$ , representada por  $v' = u$ .

**Teorema 4.2: Teorema de existência e unicidade:** *Quando a derivada fraca de uma função existe, então ela é única, com a exceção de conjuntos de Lebesgue de medida nula.*

Considere o PVC em (1) de tal forma que a EDO da segunda ordem  $-p(t)u''(t) - p'(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t, u)$  esteja na forma autoadjunta:

$$\begin{cases} -(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = f(t, u), \text{ em } (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (45)$$

em que  $u(t) \in C^2[a, b]$ ,  $f \in C[a, b]$ ,  $0 < p(t) \in C^1[a, b]$  e  $0 \leq q(t) \in C^0[a, b]$ .

Multiplicando (45) por  $v(t) \in C_0^1[a, b]$  e integrando, temos:

$$\int_{(a,b)} -(p(t)(u'(t))'v(t)d_{(a,b)} + \int_a^b q(t)u(t)v(t)d_{(a,b)} = \int_{(a,b)} f(t, u)v(t)d\mu \quad (46)$$

Integrando por partes o primeiro termo de (46) e usando  $v(a) = v(b) = 0$ , obtemos a seguinte equação integral:

$$\int_{(a,b)} p(t)u'(t)v'(t)d\mu + \int_{(a,b)} q(t)u(t)v(t)d\mu = \int_{(a,b)} f(t)u(t)v(t)d\mu, \forall v \in C_0^1[a, b] \quad (47)$$

**Definição 4.11 - Solução Fraca:** Dizemos que  $u \in C_0^1[a, b]$  é uma solução fraca da EDO em (45) se satisfaz (47).

Estamos procurando uma solução  $u(t) \in C^2[a, b]$  que satisfaça a relação em (13). Esta função  $u$  será chamada de *solução clássica* caso isto aconteça.

### 5.3 Espaços de Banach e Sobolev

**Definição 4.12:** Seja  $E$  um espaço vetorial com norma  $\|\cdot\|_E$ . Uma sequência  $(x_n) \subset E$  é chamada de **sequência de Cauchy** quando,  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : m, n > n_0 \implies \|x_m - x_n\|_E < \epsilon$ .

**Definição 4.13 - Espaço de Banach:** Denomina-se *Espaço de Banach* todo espaço vetorial normado completo. Um espaço vetorial normado é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

**Definição 4.14 - Espaço de Sobolev:** Sejam  $\Omega = (a, b) \cap \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $p \in \mathbb{R}$ , tal que  $1 < p < \infty$ . Considere a definição:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_{\Omega} u\varphi'd\mu = - \int_{\Omega} g\varphi d\mu, \right. \\ \left. \forall \varphi \in C_0^1(a, b) \right\}.$$

Este espaço  $(W^{1,p}(\Omega))$  é chamado de **espaço de Sobolev**. Para cada  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $g = u'$ .

O espaço de Sobolev é um exemplo de Espaço de Banach e será fundamental

para procurar soluções de algumas EDO's.

A norma no espaço de Sobolev é dada por:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u'\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} \quad (48)$$

No caso em que  $p = 2$ , temos que  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ , onde  $H^1(\Omega)$  é o **Espaço de Hilbert**.

**Lema 4.2:** *Seja  $\Omega$  um intervalo aberto limitado. Toda função  $H^1(\Omega)$  é uma função contínua, isto é, uma função em  $C^0$ . Mais do que isso,*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$$

e isso significa que existe uma constante  $A > 0$  tal que  $\|u\|_{C^0} \leq A\|u\|_{H^1}$ , onde  $\|u\|_{C^0} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ .

**Lema 4.3:** *Seja  $T \in L(E, \mathbb{R})$  um funcional linear contínuo. Então,  $\forall u \in E$ ,*

$$|T(u)| \leq \|T\|_{E^*} \|u\|_E$$

onde  $E^*$  representa o espaço dual de  $E$ .

## 5.4 Funcional associado ao problema

Deve-se associar a equação diferencial original a um funcional apropriado. Deste modo, pode-se reduzir o problema de encontrar a solução do PVC (45) a encontrar pontos críticos para o funcional associado.

Considere o seguinte funcional, onde  $p = p(t)$ ,  $u = u(t)$ ,  $f = f(t, u)$  são as funções do PVC:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{(a,b)} p|u'|^2 d\mu + \frac{1}{2} \int_{(a,b)} qu^2 d\mu - \int_{(a,b)} F(t, u) d\mu \quad (49)$$

tal que

$$F(t, u) = \int_0^u f(t, s) ds$$

A fim de encontrar os pontos críticos do funcional  $\Phi$ , denotar-se-á por  $\Phi'(u_0)v$  a derivada

do funcional  $\Phi$  na direção de  $v$ , dada pela seguinte expressão:

$$\Phi'(u_0)v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi(u_0 + sv) - \Phi(u_0)}{s} \quad (50)$$

Tomando  $\phi(u)$  da expressão em (6), temos:

$$\Phi(u_0 + sv) = \frac{1}{2} \int_{(a,b)} [p(u'_0 + sv')^2 + q(u_0 + sv)^2 - 2F(t, u_0 + sv)] d\mu \quad (51)$$

$$\Phi(u_0) = \int_{(a,b)} [p(u'_0)^2 + qu_0^2 - 2F(t, u_0)] d\mu \quad (52)$$

Calculando a derivada direcional, tal que (53) e (54) estão na mesma equação:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi(u_0 + sv) - \Phi(u_0)}{s} = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \int_{(a,b)} \frac{[p(2u'_0sv' + s^2v'^2) + q(2u_0sv + s^2v^2)]}{s} d\mu \quad (53)$$

$$- \lim_{s \rightarrow 0} \int_{(a,b)} \frac{[F(t, u_0 + sv) - F(t, u_0)]}{s} d\mu \quad (54)$$

Do termo à direita em (53), temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{(a,b)} \left[ p(u'_0v' - \frac{s}{2}(v')^2) + q(u_0v + \frac{s}{2}v^2) \right] d\mu = \int_{(a,b)} pu'_0v' d\mu + \int_{(a,b)} qu_0v d\mu \quad (55)$$

E da parcela da equação em (54),

$$\int_{(a,b)} \left[ \frac{d}{ds} F(t, u + sv) \right]_{s=0} d\mu = \int_{(a,b)} f(t, u) v d\mu. \quad (56)$$

A operação (55)-(56) resulta na expressão da *primeira variação do funcional*  $\Phi$ , análoga à derivada direcional do Cálculo elementar, tal qual é dada por:

$$\Phi'(u_0)(v) = \int_{(a,b)} pu'_0v' d\mu + \int_{(a,b)} qu_0v d\mu - \int_{(a,b)} f(t, u) v d\mu \quad (57)$$

Sob a hipótese de que  $u, v \in H_0^1$ , podemos denotar por  $\Phi'(u_0) = \nabla\Phi(u_0)$  a *derivada de Fréchet* de  $\Phi \implies \langle \nabla\Phi(u_0), v \rangle = \Phi'(u_0)v$ .

## 5.5 Condição de Palais-Smale

**Definição 4.15:** Chama-se  $(u_n) \subset E$  de *sequência de Palais-Smale* se

$$\Phi(u_n) \longrightarrow c \in \mathbb{R} \text{ e } \Phi'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty$$

Segue a Condição de Palais-Smale, presente nas hipóteses do TPM.

**Definição 4.16 - Condição de Palais-Smale:** O funcional  $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a Condição PS se, dada qualquer sequência  $(u_n) \subset E$  de Palais-Smale de  $\Phi$ , então  $(u_n)$  possui uma subsequência que converge em  $E$ .

## 5.6 Teorema do Passo da Montanha

**Teorema 4.3 - Teorema do Passo da Montanha:**

Seja  $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$  satisfazendo à condição de Palais-Smale, definindo num Espaço de Hilbert  $E$ . Suponha que  $\Phi(0) = 0$  e que existem constantes  $\rho, \alpha > 0$  tais que  $\Phi|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ . Suponha ainda que exista  $e \notin B_\rho$  tal que  $\Phi(e) \leq 0$ .  
Seja

$$\Gamma = \{ \gamma \in C^0([0, 1]; E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e \}$$

e defina

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0, 1])} \Phi(u).$$

Então  $c \geq \alpha$  é um valor crítico de  $\Phi$ .

Segue uma ilustração do Teorema do Passo da Montanha:

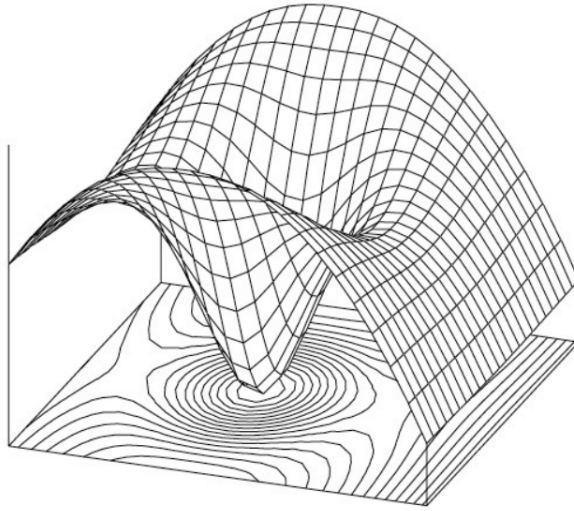


Figura 7: Considere dois vales A e B tais que A é cercado por uma cordilheira que o separa de B. Para ir de A a B, devemos cruzar a cadeia de montanhas. Se quisermos subir o mínimo possível, teremos que considerar a elevação máxima de cada caminho. O caminho com o mínimo (dessas elevações máximas) cruzará o passo da montanha. Retirado de Carvalho [2021] página 66

No resultado acima,  $\partial B_\rho$  representa a fronteira da bola fechada de raio  $\rho > 0$ , e portanto,  $\Phi|_{\partial B_\rho}$  são os pontos do funcional que estão na fronteira da bola;  $C^0([0, 1]; \mathbf{E})$  são as funções contínuas no intervalo  $[0, 1]$  para um Espaço de Banach  $E$ ; e  $\alpha, e$  constantes.

Segue um passo a passo de como aplicar o Teorema do Passo da Montanha (TPM) a um PVC como (45).

1. Encontrar a equação que define a Solução Fraca do problema, dada por (26).
2. Tomar um funcional adequado para o problema, pela equação (28), tal que seus pontos críticos são as soluções fracas do PVC.
3. Mostrar que o funcional obedece às condições de Palais-Smale (definição 4.16), ou seja, mostrar que existe uma sequência de Palais-Smale que é limitada.
4. Encontrar o número  $\gamma$  que se encontra no caminho  $\Gamma$ , onde a norma da solução clássica ( $u$ ) ser igual ao raio da bola fechada ( $\rho$ ), para algum  $\rho > 0$ , implica em  $\Phi(u) \geq \gamma$ .
5. Provar que para  $u \neq 0 \in H_0^1$ ,  $\Phi(su) \rightarrow -\infty$  quando  $s \rightarrow \infty$ .

Caso cumpridas as etapas acima, pode-se aplicar o TPM. Então  $u_0$  será solução fraca do PVC e  $\mathbf{c} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} \Phi(u)$  será o nível dessa solução.

## 6 Aplicação do Método Variacional usando TPM

Vamos considerar o seguinte PVC, retirado da referência Carvalho [2021], página 35:

$$\begin{cases} -u'' + u = t^2 u |u|^{3/2}, t \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (58)$$

Identificando as funções  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $f(t, u)$  como num problema em (45), tem-se que

$$p(t) = 1, q(t) = 1 \text{ e } f(t, u) = t^2 u |u|^{3/2}.$$

Vamos resolver o problema (58) usando o algoritmo da seção 5.9, pelo Teorema do Passo da Montanha.

1. A Solução Fraca será, através da equação (47),

$$\int_{(0,1)} u'(t)v'(t)d\mu + \int_{(0,1)} u(t)v(t)d\mu = \int_{(0,1)} t^2 u |u|^{3/2} v(t)d\mu, \forall v \in C_0^1(0, 1) \quad (59)$$

2. Define-se o funcional  $\Phi$  pela equação (50) com os dados do problema por:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{(0,1)} |u'|^2 d\mu + \frac{1}{2} \int_{(0,1)} u^2 d\mu - \int_{(0,1)} F(t, u) d\mu, \quad (60)$$

tal que

$$F(t, u) = \int_0^u t^2 s |s|^{3/2} ds = \int_0^u t^2 s^{5/2} ds = \frac{2}{7} t^2 |u|^{7/2}. \quad (61)$$

Substituindo a expressão de acima com  $u = |u|$  em (60), obtém-se:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{(0,1)} |u'|^2 d\mu + \frac{1}{2} \int_{(0,1)} u^2 d\mu - \frac{2}{7} \int_{(0,1)} t^2 |u|^{7/2} d\mu \quad (62)$$

De modo que a primeira variação do funcional  $\Phi(u)$  na direção de  $v$  ( $\Phi'(u)v$ ) tenha a mesma expressão que a solução fraca (equação 59).

Portanto, as soluções do problema (58) são pontos críticos do funcional  $\Phi$ .

3. Prova-se agora que o funcional  $\Phi$  satisfaz as condições PS, ou seja, que se  $\Phi(u_n) \rightarrow c$  e  $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então existe uma subsequência limitada.

Do fato que  $\|u\|_{H^1} = \left( \int_{(0,1)} (u')^2 d\mu + \int_{(0,1)} u^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$ , então pode-se reescrever o funcional como:

$$\Phi(u_n) = \frac{1}{2} \|u_n\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7} \int_{(0,1)} t^2 |u_n|^{7/2}. \quad (63)$$

A derivada do funcional na direção de  $u_n$  é dada por

$$\langle \nabla \Phi(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|_{H^1}^2 - \int_{(0,1)} t^2 u_n^2 |u_n|^{3/2}. \quad (64)$$

Pela combinação  $\Phi(u_n) - \frac{2}{7} \langle \nabla \Phi(u_n), u_n \rangle$  e pelo fato que  $u_n^2 = |u_n|^2$ ,

$$\frac{1}{2} \|u_n\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7} \int_{(0,1)} t^2 |u_n|^{7/2} - \frac{2}{7} \|u_n\|_{H^1}^2 + \frac{2}{7} \int_{(0,1)} t^2 |u_n|^{7/2} = \frac{3}{14} \|u_n\|_{H^1}. \quad (65)$$

Como  $\|\Phi'(u_n)\| \rightarrow 0$ , pois  $J'(u_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , pelo Lema 4.3, para algum  $\epsilon > 0$ , vale que:

$$-\Phi'(u_n)u_n \leq |\Phi'(u_n)u_n| \leq \|\Phi'(u_n)\|_{H^1} \|u_n\|_{H^1} \leq \epsilon \|u_n\|_{H^1} \leq \|u_n\|_{H^1}. \quad (66)$$

Logo, segue que

$$\Phi(u_n) - \frac{2}{7} \Phi'(u_n)u_n = \frac{3}{14} \|u_n\|_{H^1}^2 \leq \frac{2}{7} \|u_n\|_{H^1} + \Phi(u_n) \quad (67)$$

Como  $\Phi(u_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então  $(J(u_n))$  é uma sequência convergente, o que por sua vez implica que a sequência é limitada. Então, para algum  $D > 0$ ,

$$\frac{3}{14} \|u_n\|_{H^1}^2 \leq \frac{2}{7} \|u_n\|_{H^1} + D \quad (68)$$

Dividindo a equação acima por  $\|u_n\|_{H^1}^2$ , supondo por contradição que quando  $n \rightarrow \infty$  então  $\|u_n\|_{H^1} \rightarrow \infty$ , obtém-se:

$$\frac{3}{14} \leq \frac{2}{7 \|u_n\|_{H^1}} + \frac{D}{\|u_n\|_{H^1}^2} \quad (69)$$

o que é absurdo pois implicaria  $\frac{3}{14} \leq 0$ . Portanto  $(u_n)$  é uma sequência limitada, ou, da mesma maneira, possui uma subsequência que é limitada.

4. Agora, seja  $\gamma > 0$  tal que  $\Phi(u) \geq \gamma$  sempre que  $\|u\|_{H^1} = \rho$ ,  $\rho > 0$ .

Lembrando que o funcional era descrito por:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7} \int_{(0,1)} t^2 |u|^{7/2} d\mu. \quad (70)$$

Como a função  $t^2$  é limitada por  $0 < t^2 < 1$ , pois  $t \in (0, 1)$ , segue que:

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7} \int_{(0,1)} |u|^{7/2} d\mu. \quad (71)$$

onde a igualdade vale quando  $t = 1$ .

Pelo Lema 4.2,

$$\frac{2}{7} \int_{(0,1)} |u|^{7/2} d\mu \leq \frac{2}{7} (\max_{[0,1]} |u|)^{7/2} \int_{(0,1)} 1 d\mu = \frac{2}{7} \|u\|_{C^0}^{7/2} \leq \frac{2}{7} M \|u\|_{H^1}^{7/2} \quad (72)$$

$$\implies \frac{2}{7} \int_{(0,1)} |u|^{7/2} d\mu \leq \frac{2}{7} M \|u\|_{H^1}^{7/2}. \quad (73)$$

onde  $M > 0$ .

Pelas equações (71) e (73), resulta um limitante inferior para o funcional  $\Phi$ , tal que

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7} M \|u\|_{H^1}^{7/2}. \quad (74)$$

Seja  $\|u\|_{H^1} = \rho > 0$ . Então

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7} M \rho^{7/2}. \quad (75)$$

Como almeja-se um valor  $\gamma > 0$  que é limitante inferior do funcional quando a norma de  $u$  está na bola de raio  $\rho$ , então toma-se os valores estritamente positivos da expressão acima.

$$\Phi(u) > 0 \implies \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7} M \rho^{7/2} > 0 \implies \frac{1}{2} - \frac{2}{7} M \rho^{3/2} > 0 \quad (76)$$

As soluções possíveis para a inequação acima são os valores de  $\rho$  no intervalo  $0 < \rho <$

$(\frac{7}{4M})^{2/3}$ .

Portanto, dado  $\rho$  no intervalo citado,  $\gamma$  será:

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7}M\rho^{7/2} = \gamma \quad (77)$$

5. Por fim, prova-se que  $\Phi(su) \rightarrow -\infty$  quando  $s \rightarrow \infty$ .

Pela definição de  $\Phi$ , tem-se que:

$$\Phi(su) = \frac{1}{2} \int_{(0,1)} s^2 |u'|^2 d\mu + \frac{1}{2} \int_{(0,1)} s^2 u^2 d\mu - \frac{2}{7} \int_{(0,1)} t^2 s^{7/2} |u|^{7/2} d\mu = \quad (78)$$

$$\Phi(su) = \frac{s^2}{2} \int_{(0,1)} |u'|^2 d\mu + \frac{s^2}{2} \int_{(0,1)} u^2 d\mu - \frac{2s^{7/2}}{7} \int_{(0,1)} t^2 |u|^{7/2} d\mu.$$

Como  $\int_{(0,1)} |u'|^2 d\mu + \int_{(0,1)} u^2 d\mu = \|u\|_{H^1}^2$ , segue que:

$$\Phi(su) = \frac{s^2}{2} \|u\|_{H^1}^2 - \frac{2s^{7/2}}{7} \int_{(0,1)} t^2 |u|^{7/2} d\mu. \quad (79)$$

Lembrando que  $\int_{(0,1)} t^2 |u|^{7/2} d\mu$  é limitada por uma constante positiva, seja o valor da integral igual a  $A$ , e tomando  $\|u\|_{H^1}^2 = B$ , a equação (79) se torna:

$$\Phi(su) = A \frac{s^2}{2} - B \frac{2s^{7/2}}{7}. \quad (80)$$

Tomando o limite de  $s \rightarrow +\infty$ , por (80),

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Phi(su) = \lim_{s \rightarrow +\infty} A \frac{s^2}{2} - B \frac{2s^{7/2}}{7} = -\infty \quad (81)$$

Portanto cumpriram-se todas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha e pode-se afirmar que existe um ponto crítico do funcional  $\Phi$  (representado pela equação 62) que é Solução Fraca (59) do PVC (dado por (58)).

## 7 Conclusão

Em suma, a pesquisa na área do Cálculo Variacional em problemas físicos, como na Braquistócrona, e em equações diferenciais, por meio dos Métodos Variacionais, é fundamental para o avanço da área de otimização e para o conhecimento científico em geral.

Com relação ao problema da Braquistócrona, foi possível obter resultados bastante próximos da solução analítica por meio da discretização da curva cicloidal em segmentos de reta e do cálculo numérico do tempo de descida. Validou-se, no experimento, a superioridade da cicloide em relação à reta: o tempo de descida pela curva cicloidal foi consistentemente menor, conforme previsto teoricamente.

Finalmente, aplicou-se o Teorema do Passo da Montanha à resolução de um Problema de Valor de Contorno não linear como método variacional. Esta aplicação permitiu demonstrar, seguindo o algoritmo apresentado na página 27, a existência de soluções fracas associadas ao funcional correspondente, evidenciando a efetividade deste método na resolução da classe de equações diferenciais abordada.

## Referências

- Thafne Sirqueira Carvalho. Introdução aos métodos variacionais, 2021. Monografia (Graduação) — Universidade Federal do Tocantins, Campus Universitário de Araguaína, Curso de Matemática. 50 f.
- Rodrigo Costa. Introdução ao cálculo variacional e aplicações, 2018. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de Alagoas, Campus de Arapiraca.
- Djairo G. de Figueiredo. Métodos variacionais em equações diferenciais. *Matemática Universitária*, (7):21–47, junho 1988.
- Ana Paula Ximenes Flores. Cálculo variacional: aspectos teóricos e aplicações. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.
- Marcelo F. Furtado. Métodos variacionais — uma introdução, 2004. Trabalhos de Graduação em Matemática n<sup>o</sup> 2/96 — Universidade de Brasília (UnB).
- Antonio Leitao. *Cálculo variacional e controle ótimo*. IMPA, 2001. 23<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática - UFSC).
- Jeffrey Sarnoff and contributors. Roots.jl: Finding zeros of functions in julia. <https://juliamath.github.io/Roots.jl/stable/>, 2025. Accessed: 2025-06-21.
- Ana Luísa Sader Tagliolatto. Braquistócrona. 2015.
- Lucas Carvalho Rosa Truzzi. Métodos variacionais e suas aplicações à resolução de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Relatório Final de Atividades PIBIC – UNICAMP, 2023a.
- Lucas Carvalho Rosa Truzzi. Métodos variacionais e suas aplicações à resolução de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Relatório Parcial de Atividades PIBIC – UNICAMP, 2023b.