UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LIAN DE SOUZA LI

Método de Euler para P-Fuzzy sem Desfuzzificação

Campinas
25/06/2025

LIAN DE SOUZA LI

Método de Euler para P-Fuzzy sem Desfuzzificação

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Estevão Esmi Laureano.

Resumo

Em geral, modelagem de sistemas dinâmicos (fuzzy) não é uma tarefa fácil e requer um certo grau de treinamento em cálculo diferencial e integral. Uma das dificuldades consiste em como expressar o campo que rege a dinâmica do sistema através de uma fórmula explícita. Frequentemente, comportamentos de como uma certa dinâmica evolui podem ser descritos de maneira mais natural por um especialista, através de sistemas de regras, em que cada regra descreve, ainda que de maneira imprecisa e/ou com um certo grau de incerteza, o comportamento local de como o estado da variável de interesse varia de acordo com o seu valor atual. Neste contexto, os sistemas baseados em regras fuzzy surgem como uma ferramenta matemática capaz de, ao mesmo tempo, descrever e processar conjuntos de regras fuzzy e inferir saídas para entradas diferentes das entradas das regras fuzzy. Um sistema P-fuzzy nada mais é do que uma equação diferencial cujo campo é dado por um sistema baseado em regras fuzzy. Sistemas P-fuzzy podem ser resolvidos numericamente através de um método numérico, tal como o método de Euler. Neste trabalho, iremos considerar o método de Euler para um sistema P-fuzzy sem o módulo de desfuzzificação. A ideia é obter uma trajetória incerta que evolui levando em conta a natureza vaga do respectivo campo descrito através de um conjunto de regras fuzzy. Neste trabalho, introduziremos um método de Euler fuzzy baseado em sistemas baseados em regras fuzzy e aritmética interativa para conjuntos fuzzy, a fim de estimar a solução de um sistema P-fuzzy sem módulo de desfuzzificação.

Abstract

In general, modeling fuzzy dynamic systems is not an easy task and requires a certain level of training in differential and integral calculus. One of the main difficulties lies in how to express the field that controls the systems dynamics through an explicit formula. Frequently, the way how a certain dynamic behaves and evolves can be more naturally described by a specialist through rule-based systems, in which each rule describes, even if imprecisely and/or with a certain degree of uncertainty, the local behavior of how the state of the variable of interest changes according to its current value. In this context, fuzzy rule-based systems emerge as a mathematical tool capable of simultaneously describing and processing sets of fuzzy rules and inferring outputs for inputs different from those originally defined in the fuzzy rules. A P-fuzzy system is nothing more than a differential equation whose field is defined by a fuzzy rule-based system. P-fuzzy systems can be solved numerically using a numerical method, such as the Euler method. In this project, we consider the Euler method for a P-fuzzy system without applying the defuzzification module. The idea is to obtain an uncertain trajectory that evolves while accounting for the vagueness of the corresponding field described by a set of fuzzy rules. In this project, we introduce a fuzzy Euler method based on fuzzy rule-based systems and interactive arithmetic for fuzzy sets, in order to estimate the solution of a P-fuzzy system without the use of defuzzification.

Conteúdo

1 Introdução

Valores incertos e imprecisos são extremamente comuns no mundo real e na física. Em muitas situações do cotidiano, utilizamos conceitos com fronteiras incertas para descrever algo, como “em torno de zero” ou “temperatura alta”. Com o objetivo de modelar e descrever esse tipo de incerteza, surge a lógica fuzzy, que tem como objetivo descrever incertezas, sejam elas oriundas de medida imprecisa ou de conceitos subjetivos (Zadeh [1965]).

Sistemas dinâmicos são um campo da matemática que estuda sistemas que evoluem com o tempo, onde seu estado atual depende do seu estado anterior (Boyce and DiPrima [2008]). Eles são utilizados para descrever fenômenos que se alteram ao longo do tempo. Muitas vezes, esses fenômenos envolvem dados incertos, que podem resultar em diferentes resultados. É nesse contexto que entra a modelagem de sistemas dinâmicos fuzzy (Gomes et al. [2015]). Aqui focaremos em sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais.

Na literatura existem vários métodos numéricos para resolução de sistemas dinâmicos. Contudo, a aplicação desses métodos pressupõe o conhecimento prévio do campo vetorial que rege a dinâmica do sistema. Assim, uma vez que a equação diferencial que descreve uma dinâmica é conhecida, podemos utilizar métodos numéricos para obter soluções aproximadas da trajetória dessa dinâmica. Entretanto, a formulação de equações diferenciais que descrevem um fenômeno exige que o campo que rege a dinâmica seja conhecido explicitamente. De fato, para descrevê-la, é necessário que o especialista conheça matematicamente o campo que rege a equação diferencial, o que requer um certo grau de treinamento tanto em modelagem matemática quanto em equações diferenciais. Muitas vezes, temos apenas em mãos informações qualitativas e incertas sobre como o campo se comporta em certas regiões. Neste contexto, podemos recorrer ao uso de sistemas baseados em regras fuzzy, que nos permitem, com a ajuda de um especialista no assunto, criar um sistema que modele essa função e, assim, resolver o sistema. Essa abordagem de modelagem de sistemas dinâmicos fuzzy é chamada de sistemas P-fuzzy. O nome significa “parcialmente fuzzy”, no sentido de que o campo de direções do sistema é conhecido apenas parcialmente e de maneira incerta.

Na formulação clássica, sistemas P-fuzzy produzem uma solução crisp, ou seja, um número real. Neste projeto, temos como objetivo alterar os modelos P-fuzzy clássicos de modo que eles produzam uma solução fuzzy, permitindo acompanhar a incerteza da solução ao longo da trajetória da dinâmica. Para isso, consideraremos sistemas baseados em regras-fuzzy sem o módulo de defuzzificação.

2 Fundamentos matemáticos

Nesta seção, apresentaremos brevemente conceitos básicos da lógica fuzzy e da teoria de conjuntos fuzzy necessários para o entendimento deste trabalho.

2.1 Lógica Fuzzy

Uma t-norma é um operador $\triangle : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisfaz as seguintes proposições (Barros e Bassanezi [2010]):

(1) Elemento neutro: $\triangle(1, y) = 1 \triangle y = y$;

(2) Comutativa: $\triangle(x, y) = x \triangle y = y \triangle x = \triangle(y, x)$;

(3) Associativa: $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$;

(4) Monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \triangle y \leq u \triangle v$.

Alguns exemplos de t-normas encontradas amplamente na literatura são (Bede [2013]):

- t-norma do mínimo: $\triangle_M(x, y) = x \ \wedge \ y$, $\forall x, y \in [0, 1]$
- t-norma do produto: $\triangle.(x, y) = x \cdot y$, $\forall x, y \in [0, 1]$
- t-norma de Łukasiewicz: $\triangle_L = \max\{0, x + y - 1\}$, $\forall x, y \in [0, 1]$

Um operador $i : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definido por $i(x, y) = x \ \ i \ \ y$ é uma implicação fuzzy se satisfaz as seguintes condições:

(1) Reproduz a tabela de implicação clássica:
$i(0, 0) = i(0, 1) = i(1, 1) = 1$ e $i(1, 0) = 0$;

(2) É decrescente na primeira variável e é crescente na segunda variável.

Se i for dado por $i_{\triangle}(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid \triangle(x,z) \leq y\}$, onde $\triangle$ é uma t-norma, i será chamada de uma R-implicação, ou uma implicação residual (Bede [2013]). Alguns exemplos de R-implicações são:

- Implicação de Gödel

$$x \ i \ y = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ y, & \text{cc.} \end{cases}$$

- Implicação de Łukasiewicz

$$x \ i_L \ y = \min\{1, 1 - x + y\}.$$

2.2 Conjuntos fuzzy

2.2.1 Teoria de conjuntos fuzzy

A teoria dos conjuntos fuzzy foi criada com o objetivo de modelar incertezas e a subjetividade da linguagem. Ela se diferencia da teoria clássica dos conjuntos pelo fato de a teoria clássica ser uma teoria binária ou Booleana, isto é, um elemento ou pertence ao conjunto, ou não pertence.

Mais precisamente, um subconjunto clássico A de U pode ser caracterizado pela função característica de A dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} , \forall x \in U$$

A teoria de conjuntos fuzzy estende a teoria de conjuntos clássicos permitindo também graus de pertinência entre $[0,1]$.

Definição 1. *Seja U um conjunto universo. Um (sub)conjunto fuzzy A de U é identificado por uma função de pertinência:*

$$\mu_A : U \to [0,1]$$

onde para cada $x \in U$, o valor $\mu_A(x)$ representa o grau de pertinência de x ao conjunto fuzzy A.

Isso nos permite representar matematicamente conceitos vagos como "temperatura média", onde as fronteiras de classificação não são bem definidas. Quando $\mu_A(x) = 1$, o elemento x pertence completamente ao conjunto A; quando $\mu_A(x) = 0$, x não pertence a A; e valores intermediários representam pertinência parcial. Para facilitar a notação, denotaremos alternativamente μ_A simplesmente como A. A coleção dos conjuntos fuzzy de U é denotado por $\mathcal{F}(U)$.

2.2.2 Operações entre conjuntos fuzzy

Seja U um conjunto universo e A, B subconjuntos fuzzy de U. Podemos expressar a união fuzzy entre A e B pelo subconjunto fuzzy $A \cup B$ cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad \forall x \in U.$$

Analogamente, a interseção fuzzy entre A e B é dada pelo subconjunto fuzzy $A \cap B$ cuja função de pertinência

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad \forall x \in U.$$

Aqui os símbolos $\vee$ e $\wedge$ denotam, respectivamente, as operações de máximo e mínimo.

Definição 2. *(α-níveis): Seja $A : X \to [0,1]$ um conjunto fuzzy. Os α-níveis de A são conjuntos clássicos definidos por $A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$ para $\alpha \in (0,1]$. Se X é adicionalmente um espaço topológico, então $[A]_0$ é definido a partir do fecho do suporte de A, isto é, $[A]_0 = \overline{supp\ A}$ onde $supp\ A = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$(Bede [2013]).*

O Princípio de extensão de Zadeh é uma ferramenta matemática que transforma uma função clássica em uma função fuzzy.

Definição 3. *(Extensão de Zadeh) (Barros e Bassanezi [2010]) Sejam f uma função tal que $f : X \longrightarrow Y$, e $A \in \mathcal{F}(X)$. Uma função $F : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ é dita a extensão de*

Zadeh da função f, se para todo $A \in \mathcal{F}(X)$ temos que:

$$\mu_{F(A)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{z=f(x)} \mu_A(x), & se\ f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

2.3 Relações fuzzy

Definição 4. *Seja $U_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ conjuntos universos, uma relação fuzzy é qualquer $R \in \mathcal{F}(U_1 \times \ldots \times U_n)$.*

Duas relações fuzzy podem ser combinadas para formar uma nova relação fuzzy através das composições relacionais. Como será visto na próxima seção, as composições relacionais são fundamentais para os sistemas de base de regras, por conta do módulo de inferência. Neste trabalho, focaremos em dois tipos de composições, a saber, a composição sup-$\triangle$ e a inf-$i_\triangle$ respectivamente.

Definição 5. *(Bede [2013]) Dada $\triangle$ uma t-norma arbitrária, a relação* sup-$\triangle$ *entre $Q \in \mathcal{F}(X, Y)$ e $P \in \mathcal{F}(Y, Z)$ é a relação fuzzy $S \in \mathcal{F}(X, Z)$ dada por*

$$S(X, Z) = \bigvee_{y \in Y} Q(x, y) \triangle P(y, z), \ \ \forall (x, z) \in X \times Z.$$

Definição 6. *(Bede [2013]) Dado $i_\triangle$ uma implicação residual onde $x \ i_\triangle \ y = \sup\{z \in [0, 1] \mid x \triangle z \leq y\}$ com $\triangle$ uma t-norma arbitrária. A composição Inf-$i_\triangle$ entre $Q \in \mathcal{F}(X, Y)$ e $P \in \mathcal{F}(Y, Z)$ é a relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Z)$ dada por*

$$R(x, z) = \bigwedge_{y \in Y} \big(Q(x, y) \ i_\triangle \ P(y, z)\big), \ \ \forall (x, z) \in X \times Z.$$

2.4 Números fuzzy

Como estamos lidando com valores numéricos, é natural adotar a reta real $\mathbb{R}$ como conjunto universo dos conjuntos fuzzy considerados. Com isso, podemos definir formalmente o conceito de número fuzzy.

Definição 7. *Um subconjunto fuzzy A é um número fuzzy se $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, e satisfaz as seguintes condições:*

1 todos os α-níveis de A não são vazios;

2 todos os α-níveis de A são intervalos fechados na reta $\mathbb{R}$;

3 $suppA = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$ é limitado.

Definimos $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ como o conjunto dos números fuzzy (Barros e Bassanezi [2010]).

Os α-níveis de um número fuzzy A podem ser escritos na forma intervalar $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, onde a_α^- e a_α^+ são, respectivamente, os limites inferior e superior.

Os números fuzzy nos permitem representar quantidades imprecisas ou aproximadas em valores numéricos, como por exemplo "em torno de x", etc. As operações aritméticas entre números fuzzy podem ser definidas através de seus α-níveis utilizando o princípio da extensão de Zadeh. Sejam $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos (Barros e Bassanezi [2010]):

1 Adição Fuzzy:

$$[A+B]_\alpha = [A]_\alpha + [B]_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+], \ \ \forall \alpha \in [0,1].$$

2 Subtração Fuzzy:

$$[A-B]_\alpha = [A]_\alpha - [B]_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^-, a_\alpha^+ - b_\alpha^+], \ \ \forall \alpha \in [0,1].$$

3 Multiplicação por Escalar:

$$[\lambda A]_\alpha = \lambda [A]_\alpha = \begin{cases} [\lambda a_\alpha^-, \lambda a_\alpha^+], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_\alpha^-, \lambda a_\alpha^+], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}, \ \ \forall \alpha \in [0,1].$$

O teorema a seguir é de extrema importância, pois ele dá as condições para que o Princípio de extensão de Zadeh de um número fuzzy produza também um número fuzzy.

Teorema 1 (Teorema de Nguyen. (Bede [2013]))**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f pode ser estendida a uma função fuzzy $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ de tal forma que, dado $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, temos $B = F(A) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é dado pela extensão de Zadeh de f em A.*

2.4.1 Distribuição conjunta de possibilidade

A seguir, veremos algumas definições de distribuições conjuntas de possibilidades e como elas se relacionam com números fuzzy, além do conceito de interatividade entre números fuzzy. Esses conceitos são de extrema importância para este trabalho, já que o método modificado que foi desenvolvido envolve o uso de aritmética interativa.

Para poder definir o que é uma distribuição conjunta de possibilidades, é necessário primeiro definir o que é uma distribuição de possibilidades. Uma distribuição de possibilidades sobre $\Omega \neq \emptyset$ é uma função $\mu : \Omega \to [0,1]$ que satisfaz $\sup_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = 1$. O conjunto $D(\mathbb{R}^n)$ será definido como o conjunto das distribuições em $\mathbb{R}^n$.

Definição 8. *Seja J uma relação fuzzy, tal que $\mu_J = J \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ é dita ser uma distribuição de possibilidade conjunta de $A_1, A_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ se*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} J(x,y) = A_1(y), \forall x \in \mathbb{R} \quad e \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} J(x,y) = A_2(x), , \forall y \in \mathbb{R}.$$

Nesse caso, A_1 e A_2 são chamadas de distribuições marginais de J (Zadeh [1978]).

Com isso, é possível definir a interatividade entre números fuzzy como se segue.

Definição 9. *Dados dois números fuzzy quaisquer A_1 e A_2, e uma distribuição de possibilidade conjunta J entre eles. Dizemos que A_1 e A_2 são não interativos se, e somente se, $J(x,y) = A_1(x) \wedge A_2(y)$ (Zadeh [1978]). Dois números fuzzy são ditos interativos se eles não são não interativos.*

2.4.2 Operações entre números fuzzy interativos

A extensão de Zadeh para distribuições, também conhecida como extensão sup-J, é dada da seguinte maneira:

Seja J uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições marginais μ_A e μ_B, e seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. A extensão $\sup_J$ de f no par (A,B) é o conjunto fuzzy $F(J) = F_J(A,B)$, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{F_J(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{z=f(x,y)} \mu_J(x,y), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $f^{-1}(z) = \{(x,y) : f(x,y) = z\}$ (Barros e Bassanezi [2010]).

O teorema a seguir é de grande relevância, pois garante que, sob certas condições, o conjunto produzido pela extensão de Zadeh aplicada à distribuição J será um número fuzzy.

Teorema 2 (Oliveira Lopes [2019])**.** *Sejam $J \in D(\mathbb{R}^n)$ e $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $[J]_\alpha$ é um conjunto fechado, limitado e conexo para todo $\alpha \in [0,1]$, então a extensão $F(J)$ é um número fuzzy, isto é, $F(J) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.*

3 Sistemas de base de regras fuzzy e modelos P-fuzzy

As ações humanas controlam diversos sistemas no mundo real por meio de informações imprecisas. Os sistemas de base de regras fuzzy (ou SBRF) têm o objetivo de lidar com essa imprecisão e modelar um controlador que simule a ação humana por meio de variáveis linguísticas. Os SBRF são formados por 4 módulos (Barros e Bassanezi [2010]):

- Módulo de fuzzificação;
- Módulo de base de regras;
- Módulo de inferência;
- Módulo de desfuzzificação

Nesse trabalho, daremos mais importância para os módulos de base de regras e de inferência.

3.1 Regras fuzzy

3.1.1 Proposições fuzzy

Uma proposição é uma frase que afirma ou nega que um determinado objeto pertence a um certo grupo. Uma proposição assume apenas dois valores: verdadeiro ou falso. Já as proposições fuzzy estendem esse conceito, permitindo expressar o grau de pertinência com que o objeto pertence a um determinado conjunto. Esse tipo de proposição pode ser representado como (Carvalho Santos [2018]):

$$\text{“}x \text{ é } A\text{”}$$

em que $x \in U$ e A é um conjunto fuzzy em U. As proposições fuzzy são os blocos fundamentais para a construção das regras fuzzy.

3.1.2 Regras fuzzy

Uma regra fuzzy representa uma relação fuzzy entre dois conjuntos fuzzy, caracterizando, em particular, uma composição fuzzy entre esses conjuntos. As regras fuzzy são expressões condicionais que assumem o formato (Barros e Bassanezi [2010]):

$$\textit{Se} \text{ “}x \text{ é } A\text{” então “}y \text{ é } B\text{”}$$

Nessa estrutura, $A \in \mathcal{F}(U)$ é chamado de antecedente e $B \in \mathcal{F}(V)$, de consequente.

Além disso, x e y são ditas variáveis linguísticas da regra fuzzy, e tomam valores, respectivamente, nos universos U e V.

Nesse contexto, uma variável linguística x, definida em um universo U, pode ser vista como uma variável cujos valores assumidos são subconjuntos fuzzy de U (Barros e Bassanezi [2010]). Assim, variáveis linguísticas podem ser interpretadas como coleções de proposições fuzzy. Um exemplo seria o crescimento populacional, em que os valores são subconjuntos fuzzy que representam, em termos linguísticos, as categorias *baixa* (B), *média* (M) e *alta* (A). Essas variáveis linguísticas são bastante úteis para modelar sistemas baseados em regras.

3.2 Base de regras

3.2.1 Representação funcional

Uma regra fuzzy é, essencialmente, uma relação fuzzy entre dois conjuntos fuzzy. Por isso, ela também pode ser representada funcionalmente como uma composição de funções. Por exemplo, podemos expressar uma regra fuzzy $R(x, y)$ por meio de uma t-norma $\triangle$, da seguinte forma:

$$R(x, y) = A(x) \triangle B(y) = \mu_A(x) \triangle \mu_B(y),$$

onde $\triangle$ é uma t-norma arbitrária, e μ_A e μ_B são as funções de pertinência do antecedente A e do consequente B, respectivamente.

Cada regra pode ser vista como um pedaço de informação. Então, se tivermos uma base de regras $R_i(x, y) = A_i(x) \triangle B_i(y)$, $i = 1, \ldots, n$, onde cada regra carrega uma informação parcial, se agregarmos todas em um único conjunto, é possível obter uma imagem completa de um conjunto de base de regras. Essa agregação pode ser interpretada como uma relação fuzzy entre as variáveis linguísticas de entrada e saída. Por isso, a utilização de composições fuzzy torna-se natural nesse contexto, sendo comum modelar a base de regras como uma composição agregada, utilizando operadores como as composições *sup*-$\triangle$ ou inf-$i_\triangle$.

Um exemplo clássico é a base de regras de Mamdani (Bede [2013]), que utiliza a composição max-min, um caso particular da composição $\sup - \triangle$, em que a t-norma $\triangle$ é o mínimo e o número de regras é finito.

Considere um conjunto de regras $D = \{$"*Se* x é A_i então y é B_i", para $i = 1, \ldots, n\}$, também chamado de base de regras fuzzy. A base de regras de Mamdani define uma relação fuzzy $R(x, y)$ dada por:

$$R(x, y) = \bigvee_{i=1}^{n} \left(A_i(x) \wedge B_i(y) \right),$$

onde $\wedge$ representa a t-norma do mínimo. Para o propósito deste trabalho, é suficiente considerar a base de regras de Mamdani. O leitor interessado em outros tipos de bases de regras fuzzy pode consultar (Bede [2013]).

3.3 Módulo de inferência

O módulo de inferência é considerado o "cérebro"do sistema. Ele é responsável por relacionar a entrada fuzzificada com uma base de regras fuzzy, por meio de um mecanismo de inferência fuzzy.

A maneira como a inferência composicional relaciona as regras fuzzy com uma entrada específica é por meio de uma composição fuzzy, que pode adotar diferentes formas, como a composição sup-$\triangle$ ou inf-$i_\triangle$ (Bede [2013]).

Seja U o universo de entrada e V o universo de saída. Dado um conjunto fuzzy de entrada $X \in \mathcal{F}(U)$ e uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ originada de uma base de regras do tipo "Se x é A_i, então y é B_i", onde $A_i \in \mathcal{F}(U)$ e $B_i \in \mathcal{F}(V)$ para $i = 1, \ldots, n$, o processo de inferência busca gerar uma saída fuzzy $Y \in \mathcal{F}(V)$. Isso é feito por meio de uma regra composicional, na qual o resultado Y é obtido pela composição de X e R, expressa como $Y = X \bullet R$, onde $\bullet$ representa uma composição relacional arbitrária.

Assim, o método de inferência pode ser interpretado como um funcional $I : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, tal que $Y = I(X)$. Dessa forma, a escolha da composição utilizada na inferência influencia diretamente o comportamento e a resposta do sistema de inferência. Neste trabalho, focaremos na composição relacional de inf $-i_\triangle$ com a implicação de Łukasiewicz.

3.4 Módulo de fuzzificação

Este módulo é responsável por receber uma entrada real e traduzi-la para um conjunto fuzzy. Aqui faremos o uso da chamada inclusão canônica, que consiste em associar um valor de entrada x com o conjunto fuzzy dado pela função característica do conjunto $\{x\}$.

3.5 Módulo de desfuzzificação

Este módulo é responsável por transformar a saída fuzzy produzida pela inferência em um valor real. Um dos métodos mais comuns é o método do centróide. O módulo de desfuzzificação não é necessário caso seja interessante ter a saída como um conjunto fuzzy. Um exemplo disso é se estivesse alimentando a saída de um sistema de base de regras na entrada de um outro sistema de base de regras. Neste trabalho, não faremos o uso do módulo de desfuzzificação.

3.6 Representação funcional de um sistema baseado em regras fuzzy

Os sistemas baseados em regras fuzzy são formados pela junção de todos esses módulos, eles também podem ser vistos como uma composição de funções $SBRF : U \to V$, $x \mapsto D(I(F(x)))$, onde F é o módulo de fuzzificação $F : U \to \mathcal{F}(U)$, I é o módulo de inferência $I : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, e D é o módulo de desfuzzificação $D : \mathcal{F}(V) \to V$ (Barros e Bassanezi [2010]).

4 Modelo P-Fuzzy sem defuzzificação

Para abordarmos o modelo sem defuzzificação elaborado neste trabalho, é necessário primeiro compreender os sistemas p-fuzzy clássicos, que possuem o processo de defuzzificação.

4.1 Sistemas P-fuzzy com desfuzzificação

Um problema de valor inicial fuzzy clássico tem o seguinte formato:

$$\begin{cases} u'(t) = G(t, u(t)) \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

com $G : [a, b] \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $a > 0$ (Gomes et al. [2015]).

Um dos problemas dos sistemas dinâmicos fuzzy clássicos é que, muitas vezes, não conhecemos o campo que rege a dinâmica do sistema. Isso não é um problema para os sistemas P-fuzzy, já que, eles são uma classe de sistemas dinâmicos em que o campo vetorial que rege a dinâmica não é conhecido explicitamente, mas é aproximado por meio de uma base de regras fuzzy construída com auxílio de especialistas.

Diferentemente dos problemas de valor inicial fuzzy clássicos, onde se parte de uma função $G(t, u(t))$ dada, nos sistemas P-fuzzy modela-se diretamente o campo vetorial por meio de um sistema baseado em regras fuzzy. Nesse caso, então a derivada de $u(t)$ é aproximada por:

$$u'(t) \approx D(I(F(u(t))))$$

O problema de valor inicial P-fuzzy é, então, formulado como:

$$\begin{cases} u'(t) = D(I(F(u(t)))) \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

Podemos resolver numericamente um sistema p-fuzzy aplicando qualquer método numérico clássico, como os métodos de Euler, Runge-Kutta, etc. Por exemplo, com o método de Euler, a forma iterativa fica:

$$u_{k+1} = u_k + hD(I(F(u_k))), \forall k = 1, 2, \ldots\ .$$

4.2 Método de Euler para resolução de sistemas P-Fuzzy sem defuzzificação

A seguir, apresentaremos uma adaptação do método de Euler para resolver um sistema p-fuzzy, na qual evitamos o passo de defuzzificação da saída. Assim, dada uma entrada fuzzy, teremos como resultado uma saída fuzzy.

Para isto, podemos modificar o modelo p-fuzzy clássico, para considerar um sistema dinâmico fuzzy, que descreve uma variável de estado fuzzy $X : [0, T] \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ regida pela equação

$$X'(t) \text{ é } D(I(X(t))), \qquad X(0) = X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \tag{1}$$

em que o símbolo $X'(t)$ não se refere a uma definição matemática rigorosa de uma derivada fuzzy da função X mas a uma definição abstrata da variação fuzzy da variável X no instante t. Além disso, $D(I(X(t)))$, que será denominada de $f(t)$, corresponde ao centro de massa da implicação Łukasiewicz de $X(t)$ com uma base de Mamdani R produzida através de uma base de regras fuzzy dada por: $\{(A_i, B_i) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid i = 1, \ldots, k\}$.

Mais precisamente, a função f é definida como:

$$f(x) = D(I(X_k(x)))$$

em que:

- D é o módulo de desfuzzificação dado pelo método do centróide no caso contínuo (Barros e Bassanezi [2010]):

$$G(B) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} x\mu_B(x)\,dx}{\int\limits_{\mathbb{R}} \mu_B(x)\,dx}.$$

- I é o módulo de inferência dado por:

$$I(y) = \bigwedge_{x \in U} [X_k(x) \ \ i_L \ \ R(x,y)]$$

  onde i_L representa a implicação de Łukasiewicz.

O método de Euler produz a solução numérica para um problema de valor inicial $x' = f(x)$ com $x(0) = x_0$ e é dado por $x_{k+1} = E(x_k)$ para $k = 0, 1, \ldots$, em que E é a função $E(x) = x + hf(x)$. Logo, intuitivamente, basta $X_{k+1}(t) = X_k(t) + hF(X_k(t))$, onde a "+"é a soma clássica de conjuntos fuzzy, e $F(X_k(t))$ a extensão de Zadeh de f em $X_k(t)$. Essa abordagem tem um grande problema, este sendo que o diâmetro de $[X_{k+1}]_\alpha$ será não decrescente, e isso será problemático, pois sabemos que muitos fenômenos apresentam incertezas controladas.

A abordagem que será utilizada consiste em substituir a soma clássica de conjuntos fuzzy por uma soma interativa $X_{k+1}(t) = X_k(t) +_J hF(X_k(t))$. Para isso, precisamos criar a partir do sistema de base de regras, uma distribuição J de tal maneira que nos permita utilizar a de extensão $\sup -J$ da adição.

Assim, baseado no método de Euler, podemos definir como solução numérica para a Equação (1) a sequência de conjuntos fuzzy $X_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dada por:

$$X_{k+1} = X_k +_J hF(X_k) = \hat{E}(X_k) \tag{2}$$

onde J é uma distribuição de possibilidade conjunta, para $X_k(t)$ e $hF(X_k(t))$ dada por:

$$[J]_\alpha = \{(x, hf(x)) \mid x \in [X_k]_\alpha\}, \ \forall x \in [0,1]$$

e que a coleção de pares $(x, hf(x))$

4.3 Condições para o funcionamento do método

Queremos garantir que, se a entrada X_k for um número fuzzy, então a saída X_{k+1} produzida pelo método também seja um número fuzzy. Para que isso ocorra, é necessário que a função $f(x) = D(I(X_k))$ seja contínua e que a coleção de pares $(x, hf(x))$ componha os α-níveis da conjunta. No entanto, a continuidade de $f(x)$ acaba dependendo do conjunto de regras e dos módulos do sistema escolhidos. É possível que, dependendo da escolha das regras, o método não produza uma sequência de números fuzzy. A seguir, apresentamos certas condições suficientes para o bom funcionamento do método.

Seja X_k um número fuzzy cuja função de pertinência $\mu_{X_k}(x)$ é contínua em todo $[X_k]_\alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$. Suponha que temos uma base de regras fuzzy com r regras, onde para todo $x \in U$ existe i tal que $A_i(x) > 0$, além disso, se $x \in \text{supp}A_i \cap \text{supp}A_j \implies \text{supp}B_i \cap \text{supp}B_j \neq \emptyset$. Suponha ainda que $\mu_{A_i}(x)$ e $\mu_{B_i}(y)$ sejam contínuas para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, definidos nos intervalos $U \subset \mathbb{R}$ e $V \subset \mathbb{R}$, respectivamente, e que h seja uma constante real positiva.

Utilizando inferência fuzzy de Mamdani, implicação residual de Łukasiewicz e desfuzzificação pelo método do centroide, temos que $f(x)$ será uma função contínua, e o par $(x, hf(x))$ definirá uma distribuição de possibilidade conjunta com os seus α-níveis dados por:

$$[J]_\alpha = \{(x, hf(x)) \mid x \in [X_k]_\alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

em que as marginais são X_k e $hF(X_k)$.

Vejamos a seguir que $f(x)$ é contínua. Considerando a base de regras de Mamdani, com n regras, dadas pelos pares (A_i, B_i), a relação fuzzy da composição das regras é dada por $R(x, y) = \bigvee_{i=1}^{r} A_i \wedge B_i$, o que implica: $\mu_R(x, y) = \max_{i \in \{1,\ldots,r\}} (\min(\mu_{A_i}, \mu_{B_i}))$. Sabemos que as funções μ_{A_i}, μ_{B_i}, max e min são contínuas, logo $\mu_R(x, y) = R(x, y)$ também será contínua.

Agora analisando o módulo de inferência $I(y) = \bigwedge_{x\in U} X_k(x) i_L R(x,y)$, então $\mu_I(y) = \inf_{x\in U}(\min(1, 1 - X_k(x) + R(x,y)))$. Embora a função inf não preserve continuidade (é inferiormente semicontínua), ao aplicarmos o método do centróide, temos que:

$$f(x) = \frac{\int_V y\, \mu_I(y)\, dy}{\int_V \mu_I(y)\, dy}$$

como estamos avaliando $f(x)$ ponto a ponto, a descontinuidade da função inf em $I(y)$ não afeta a continuidade de $f(x)$, desde que $X_k(x)\ i_L\ R(x,y)$ seja contínua, o que ocorre sob as condições dadas. A continuidade das funções de pertinência dos antecedentes e dos consequentes, junto com as hipóteses anteriores, garante que o mapeamento

$$x \mapsto V_x = \bigcup_{x\in\ \mathrm{supp} A_i} \mathrm{supp} B_i \subseteq V$$

é contínuo na métrica de Hausdorff e que V_x é um intervalo em V para todo x. Assim, substituindo $\mu_I(y)$ explicitamente, obtemos :

$$f(x) = \frac{\int_{V_x} y \cdot \min\left(1, 1 - \mu_{X_k}(x) + \mu_R(x,y)\right) dy}{\int_{V_x} \min\left(1, 1 - \mu_{X_k}(x) + \mu_R(x,y)\right) dy}$$

e como $\mu_R(x,y)$ é contínua, a composição resulta em uma função contínua $f(x)$.

Agora, é necessário mostrar que $[J]_\alpha$ onde $[J]_\alpha = \{(x, hf(x)) \mid x \in [X_k]_\alpha\}$ é um conjunto conexo e compacto para todo $\alpha \in [0,1]$. Sabemos que para cada α o intervalo $[X_k]_\alpha$ é compacto e conexo (X_k é número fuzzy), como $hf(x)$ é uma função contínua, $h[F(X_k)]_\alpha$ será um conjunto conexo e compacto por conta do teorema de Nguyen e a continuidade de $hf(x)$, então o par $(x, hf(x))$ com $x \in [X_k]_\alpha$ é um conjunto compacto e conexo para todo α.

Tomando a extensão de Zadeh de $hf(x)$, obtemos $Z_k(y) = \sup_{y=hf(x)} X_k(x)$ pelo Teorema de Nguyen $Z_k(y)$ é um número fuzzy. Logo, expressando $J(x,y)$ pela sua função de pertinência que é dada por:

$$\mu_J(x,y) = \begin{cases} \mu_{X_k}(x) & \text{se } y = hf(x) \\ 0 & cc. \end{cases}$$

é possível verificar que X_k e Z_k são distribuições marginais de J. Temos que $\sup\limits_{y\in V} J(x,y) = \mu_{X_k}(x)$ por construção de J, e $\sup\limits_{x\in U} J(x,y) = Z_k(y)$ por conta de Z_k ser definida a partir da extensão de Zadeh de X_k. Logo J é uma distribuição de possibilidade conjunta.

Como $hf([X_k]_\alpha)$ é um conjunto conexo e compacto pela continuidade de $hf(x)$, então o par $(x, hf(x))$ com $x \in [X_k]_\alpha$ é um conjunto compacto e conexo para todo α, logo $[J]_\alpha$ são conjuntos compactos e conexos para todo α, como J é uma distribuição de possibilidade conjunta para X_k e Z_k. Logo X_k e Z_k são números fuzzy interativos com a conjunta J.

Assim, temos que $X_{k+1} = X_k \ +_J \ Z_k$

$$X_{k+1}(z) = \sup_{z=x+hf(x)} \mu_J(x,y). \tag{3}$$

Temos que $x \mapsto x + hf(x)$ é uma função contínua, $[J]_\alpha$ é conexo compacto para todo α, segue que X_{k+1} será um número fuzzy pelo Teorema 2.

5 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma adaptação do método de Euler para sistemas P-fuzzy, na qual evitamos a desfuzzificação da saída do método. Dessa forma, uma entrada fuzzy também produz uma saída fuzzy, o que permite a evolução da incerteza ao longo de uma dinâmica. Essa característica foi garantida por meio da aritmética interativa, possibilitando a aplicação da soma conjunta na construção da iterada fuzzy. A formulação foi estruturada com base em uma base de regras fuzzy, utilizando a implicação de Łukasiewicz e o módulo de inferência de Mamdani.

Além disso, garantimos que, sob hipóteses suficientemente gerais — como a continuidade das funções de pertinência e a existência de interseção entre os conjuntos antecedentes — o método preserva a natureza fuzzy das soluções ao longo das iterações. Ou seja, se a entrada for um número fuzzy, então a saída também será. Isso é assegurado pela continuidade e pela formação de uma estrutura adequada, de modo que a construção iterativa da solução permaneça bem definida no espaço dos números fuzzy.

Um possível próximo passo para essa pesquisa seria explorar quais outros métodos de inferência produzem bons resultados e aplicar esses métodos a problemas reais.

Referências

Laécio Carvalho de Barros and Rodney Carlos Bassanezi. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2010.

Barnabas Bede. Studies in fuzziness and soft computing. In *Mathematics of Fuzzy sets and Fuzzy logic*, volume 295. Springer Berlin/Heidelberg, Germany, 2013.

William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, Hoboken, 9 edition, 2008. ISBN 9780470383346.

Daniel Dias de Carvalho Santos. *Um estudo sobre identificação de anomalias em bases de regras fuzzy aplicado a estimação do risco de endometriose*. PhD thesis, [sn], 2018.

Luciana Takata Gomes, Laécio Carvalho de Barros, and Barnabas Bede. *Fuzzy differential equations in various approaches*. Springer, 2015.

Kelly Marques de Oliveira Lopes. *Um estudo sobre generalizações de extensão de Zadeh para funções contínuas*. PhD thesis, [sn], 2019.

Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965. doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

Lotfi Asker Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, 1(1):3–28, 1978.