UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Matheus Queiroz Mota

# Um estudo sobre Funções Características

Campinas
24 de novembro de 2023

Matheus Queiroz Mota

# Um estudo sobre Funções Características*

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Sahibzada Waleed Noor.

*Projeto Supervisionado

# Resumo

Este trabalho se concentra no estudo das funções características na teoria da probabilidade, tópico pouco abordado nos cursos de probabilidade na graduação, mas de grande importância para provar os principais resultados e teoremas estatísticos. Ademais, serão explorados os principais conceitos de variáveis complexas e probabilidade, alguns deles não serão aplicados diretamente neste trabalho, mas são essenciais para a teoria de variáveis complexas e poderão ser utilizados em outras aplicações fora deste trabalho. Deste modo, o objetivo principal deste trabalho é provar as funções características das principais distribuições probabilísticas, exibir determinados resultados obtidos por meio destas e auxiliar aqueles que necessitam obter tais resultados, mas não possuam o conhecimento necessário em variáveis complexas.

# Abstract

This work focuses on studying characteristic functions in probability theory, a topic often overlooked in undergraduate probability courses, yet of great importance in proving key statistical results and theorems. Additionally, the main concepts of complex variables and probability will be explored, although some of them won't be directly applied in this work. They are essential to the theory of complex variables and could be used in other applications beyond this work. Thus, the main objective of this work is to prove the characteristic functions of the main probability distributions, showcase certain results obtained through them, and assist those who need to obtain such results but may lack the necessary knowledge in complex variables.

# Conteúdo

# 1 Introdução

As funções características desempenham um grande papel na teoria estatística, de modo que, por meio delas, é possível provar os principais teoremas de convergência de distribuições como, por exemplo, o teorema do limite central.

Todavia, para se compreender os resultados obtidos nesta monografia, é necessária uma breve introdução aos conceitos de variáveis complexas e probabilidade, de modo a interligar tais campos e assim provar os principais resultados das funções características.

Na seção de variáveis complexas, a principal referência utilizada foi o livro do Brown and Churchill [2009], de modo que a maioria das definições e teoremas desta seção foram retiradas de tal obra. Por outro lado, certos tópicos como séries de Laurent e aplicações conformes não foram desenvolvidas nesta monografia, enquanto outros resultados foram expostos no trabalho, mas não foram aplicados diretamente. Deste modo, o leitor poderá se aprofundar nos tópicos de números complexos e aplicações por meio das referências no fim deste trabalho.

Na seção de probabilidade, busca-se introduzir os conceitos mais essenciais para se compreender o que é uma função característica, como, por exemplo, esperança de variáveis aleatórias e densidade de probabilidade. Para este trabalho, as principais referências em probabilidade foram as obras Magalhães [2006] e Durrett [1996]. Todavia, outras obras mais avançadas poderão ser consultadas.

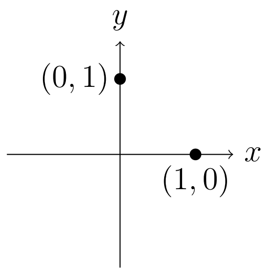
Por fim, a última seção deste trabalho busca mostrar os principais resultados obtidos por meio das funções características, tais como: Teorema Central do Limite e Unicidade de Distribuições. Ademais, certos resultados foram apenas citados, por serem avançados para este trabalho, mas poderão ser consultados em Billingsley [1986] e Williams [1991].

# 2 Aspectos teóricos de variáveis complexas

Podemos definir os números complexos como pares ordenados $z = (x, y)$, onde x é a parte real de $z$ e y a parte imaginária de $z$. Mas a forma mais comum de denotar um número imaginário é

$$z = x + iy$$

Onde, $i = \sqrt{-1}$, é definido como a unidade imaginária. Deste modo, pode-se representar os números complexos em um plano cartesiano, denominado plano complexo:




Note que o ponto $(0, 1)$ representa a unidade imaginária $i$, enquanto o ponto $(1, 0)$ equivale ao número 1. Por fim, um número complexo na forma $(x, 0)$ é considerado pertencente ao eixo real, enquanto os números na forma $(0, y)$ pertence ao eixo imaginário, de modo que recebe o nome de imaginário puro.

## 2.1 Propriedades de números complexos

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos, temos que suas operações elementares são representadas como:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

As operações de subtração e divisão também são validas para números complexos, de modo que é possível obtê-las por meio das operações acima. Para mais detalhes, consulte a referência Brown and Churchill [2009].

**Definição 2.1.1.** *(Módulo de um Número Complexo).O módulo de um número complexo $z = x + iy$ é definido como:*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

Ademais, por meio da definição (1), dado dois números complexos $z_1$ e $z_2$ é possível mostrar a desigualdade triangular

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

**Definição 2.1.2.** *(Conjugado de um Número Complexo). O conjugado de um número complexo, é definido como*

$$\overline{z} = x - iy \tag{2}$$

Com algumas manipulações algébricas, podemos obter as relações abaixo:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

## 2.2 Representação Polar e Raízes n-ésimas da Unidade em $\mathbb{C}$

Como vimos anteriormente, é conveniente pensar o número complexo $z = x + iy$ como um ponto $(x, y)$ no $\mathbb{R}^2$. Lembre-se que todo ponto $(x, y)$ não-nulo em $\mathbb{R}^2$ possui uma representação em coordenadas polares $(r, \theta)$, onde $-\pi < \theta \leq \pi$ e $r > 0$. Além disso, nas coordenadas polares $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta$ é o angulo formado entre o eixo x (positivo) e o segmento de reta que vai da origem até o ponto $(x, y)$. Deste modo, podemos relacionar as coordenadas polares e retangulares da seguinte forma:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = rsen\theta$$

Assim podemos escrever um número complexo $z = x + iy$ no seguinte formato $z = r(cos\theta + isen\theta)$, onde [†] $cos\theta + isen\theta = e^{i\theta}$. A representação anterior é conhecida como forma polar de um número complexo $z$, de modo que $r = |z|$ e $\theta$ é chamado de argumento de $z$ denotado por $arg(z)$.

O valor principal de $arg(z)$, cuja notação é $Arg(z)$ é um valor $\Theta$ tal que $-\pi < \Theta \leq \pi$. Deste modo temos que:

$$arg(z) = Arg(z) + 2\pi k \quad (\text{k} \in \mathbb{Z}) \tag{3}$$

[†] Para demonstrar esta identidade basta fazer a expansão em Taylor da exponencial.

**Definição 2.2.1.** *(Potência nos Complexos). A potência de um número complexo* $z = re^{i\theta}$ *é:*

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \tag{4}$$

**Definição 2.2.2.** *(Raízes de um Número Complexo). Seja* $\omega$ *um número complexo não-nulo. Temos que a raiz n-ésima de* $\omega$ *é um número complexo* $z$ *que satisfaz a equação:*

$$z^n = \omega \tag{5}$$

Considere que $\omega = r_0 e^{i\theta_0}$ e $z = re^{i\theta}$. Pela equação (5), temos que:

$$r_0 e^{i\theta_0} = r^n e^{in\theta} \Rightarrow r^n = r_0 \qquad \text{e} \qquad \theta = \theta_0 + 2\pi k$$

Com algumas manipulações, concluímos que os números complexos:

$$z = \sqrt[n]{r_o} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n})} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

são as raízes n-ésimas de $\omega$.

## 2.3 Derivação Nos Complexos

Seja $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função definida em uma ‡vizinhança U de $z_0 = x_0 + iy_0$.

**Definição 2.3.1.** *(Derivada de um Número Complexo). Seja* $f$ *uma função que esteja definida em uma vizinhança* $|z - z_0| < \varepsilon$ *de um ponto* $z_0$*. A derivada de* $f$ *em* $z_0$ *é o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

*e, se existir esse limite, temos que a função* $f$ *é diferenciável em* $z_0$*.*

‡Os conceitos de vizinhança, limite e continuidade são análogos ao de cálculo 2. Para mais detalhes, consulte Brown and Churchill [2009].

**Teorema 2.3.1.** *(Teorema de Cauchy - Riemann). Considere que as derivadas parciais* $u_x, u_y, v_x$ *e* $v_y$ *existam e sejam contínuas em* $(x_0, y_0)$. *A condição suficiente para que* $f'(z_0)$ *exista é:*

$$u_x = v_y \qquad e \qquad u_y = -v_x \qquad em\ z_0 \tag{6}$$

*A condição mencionada refere-se às Equações de Cauchy-Riemann. Quando essas equações são respeitadas por uma função* $f(z)$, *é possível afirmar a existência da derivada* $f'(z_0)$ *em um ponto específico* $z_0$. *Essa derivada é dada por:*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

*Onde* $u_x(x_0, y_0)$ *representa a derivada parcial da parte real da função* $f$ *em relação a* $x$ *avaliada no ponto* $(x_0, y_0)$, *e* $v_x(x_0, y_0)$ *representa a derivada parcial da parte imaginária da função* $f$ *em relação a* $x$, *também avaliada no mesmo ponto* $(x_0, y_0)$.

**Exemplo 2.3.1.** *Calcule a derivada de* $f(z) = e^z$ *em um ponto* $z$ *qualquer.*

**Solução:**

$$f(z) = e^z = e^x cos(y) + ie^x sen(y) \Rightarrow u(x, y) = e^x cos(y) \quad \text{e} \quad v(x, y) = e^x sen(y)$$

Pelas Equações de *Cauchy-Riemann*, temos que:

$$u_x = e^x cos(y) = v_y \qquad \forall \quad x + iy \in \mathbb{C}$$

$$u_y = -e^x sen(y) = -v_x \qquad \forall \quad x + iy \in \mathbb{C}$$

Deste modo, temos que $f'(z)$ existe para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(cos(y) + isen(y)) = e^x e^{iy} = e^z = f(z)$$

é a sua derivada (note que a derivada de uma exponencial complexa é a própria exponencial).

## 2.4 Funções Analíticas e Elementares nos Complexos

Nesta seção serão introduzidas as principais funções analíticas e elementares. Mas vale ressaltar que nem todas serão utilizadas neste trabalho, todavia, serão introduzidas para o conhecimento do leitor, e que poderão ser uteis em outras aplicações. Ademais, outras funções poderão ser consultadas nos capítulos 2 e 3 da Obra Brown and Churchill [2009].

**Definição 2.4.1.** *Uma função* $f : U \to \mathbb{C}$ *é analítica em um ponto* $z_0 \in \mathbb{C}$ *se* $f'(z)$ *for definida em uma vizinhança de* $z_0$. *Além disso, uma função analítica em todo o plano complexo é denominada como função inteira.*

**Exemplo 2.4.1.** *A função* $f(z) = 1/z$ *é analítica em* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *pois* $f'(z) = -1/z^2$ *é definida nesses pontos (e em suas vizinhanças). Por outro lado, a função* $g(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ *possui* $g'(z)$ *definida apenas em* $z_0 = 0$ *(basta desenvolver as equações de Cauchy-Riemann). Logo, não existe uma vizinhança de* $z_0$ *com a derivada de* $g$ *definida. Portanto,* $g(z)$ *não é analítica em nenhum ponto.*

As principais funções elementares estudadas aqui serão a exponencial, logaritmo e trigonométricas.

**Definição 2.4.2.** *(Exponencial Complexa). A função exponencial complexa é definida como*

$$f(z) = e^z = e^x(cos(y) + isen(y))$$

Note que se $y = 0$ obtemos a exponencial real $f(x) = e^x$. Além disso, o módulo da exponencial complexa é:

$$|e^z| = |e^x(cos(y) + isen(y))| = |e^x||\sqrt{cos^2(x) + sen^2(x)}| = e^x$$

Por fim, temos os seguintes resultados para a exponencial complexa:

1. $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

2. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

3. $e^{z+i2\pi k} = e^z.e^{2\pi k} = e^z \quad (k \in \mathbb{Z})$

**Definição 2.4.3.** *(Logaritmo Complexo). A função logaritmo para os números complexos é baseada na solução da seguinte equação:*

$$e^w = z, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \tag{7}$$

Seja $z = re^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \leq \pi)$, $w = u + iv$ e $\theta = arg(z) = Arg(z) + 2\pi k$. Pela equação (7) obtemos:

$$e^u e^{iv} = re^{i\theta} \Rightarrow u = ln(r) \qquad \text{e} \qquad v = Arg(z) + 2\pi k$$

Deste modo, podemos definir o logaritmo complexo como:

$$log(z) := ln|z| + i(Arg(z) + 2\pi k) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Por fim, definimos o logaritmo principal de $z$ por:

$$Log(z) := ln|z| + iArg(z) \tag{8}$$

**Definição 2.4.4.** *(Função de Potência Complexa). A função potência para os números complexos é definida como*

$$z^c := e^{clogz}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \tag{9}$$

*onde $c \in \mathbb{C}$ e $log(z)$ é a função logaritmo de múltiplos valores. Todavia, podemos definir o valor principal de $z^c$ como*

$$z^c := e^{cLog(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \tag{10}$$

*de modo que $Log(z)$ é o ramo principal da função logarítmica.*

**Definição 2.4.5.** *(Seno e Cosseno Complexos). Podemos definir as funções seno e cosseno nos complexos como:*

$$sen(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{11}$$

## 2.5 Integração nos Complexos

**Definição 2.5.1.** *(Integral Complexa dependente de um Parâmetro Real). A integral definida da função complexa $w(t) = u(t) + iv(t)$, de modo que $u$ e $v$ dependem somente de uma variável $t \in \mathbb{R}$ $(a \leq t \leq b)$, pode ser descrita como*

$$\int_a^b w(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt \tag{12}$$

**Definição 2.5.2.** *(Integral de Contorno). Considere o contorno $C : z = z(t), \quad (a \leq t \leq b)$ e seja $f : C \to \mathbb{C}$ contínua por partes em $C$. A integral de contorno de $f$ ao longo de $C$ é definida como:*

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b z'(t) f(z(t))\, dt \tag{13}$$

*Além disso, temos que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. $\int_C \alpha f(z) + \beta g(z)\, dz = \alpha \int_C f(z)\, dz + \beta \int_C g(z)\, dz \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

2. $\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$

3. $\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz \quad C := C_1 + C_2 = \begin{cases} z_1(t), a \leq t \leq b & "C_1" \\ z_2(t), b \leq t \leq c & "C_2" \end{cases}$

Ao definir as integrais no plano complexo, devemos tomar nota dos principais teoremas e definições de integração em $\mathbb{C}$, que servirão de base para calcular as funções características de distribuições contínuas.

**Teorema 2.5.1.** *(Cauchy-Goursat). Se uma função $f(z)$ é analítica dentro e sobre um contorno fechado $C$, então temos que:*

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

**Teorema 2.5.2.** *(Fórmula da Integral de Cauchy geral). Se uma função $f(z)$ é analítica dentro e sobre um contorno fechado $C$ orientado positivamente e $z_0$ um ponto interno de*

*C, temos*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$

**Teorema 2.5.3.** *(Limite Superior para Integrais de Contorno). Considere o arco $C$ de comprimento $L$ e $f(z)$ uma função contínua por partes em $C$, de modo que temos*

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Dado essas condições, temos o seguinte resultado:*

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML \tag{15}$$

Em particular, este ultimo resultado será essencial para demonstrar as funções características de distribuições cuja base de suporte é não-finita.

Para finalizar o tópico de integração nos complexos, vamos introduzir o conceito de resíduos e como calcular integrais por meio destes. Ademais, não será abordado séries de Laurent, tendo em vista que tal tópico seria extenso para este trabalho, de modo que para o cálculo dos resíduos será passado uma fórmula que vai ser o suficiente para o cálculo da função característica de Cauchy, que envolve singularidades. Todavia, caso queira se aprofundar nos estudos em variáveis complexas e necessite de uma explicação teórica de tal tópico, consulte o capítulo 5 da referência Brown and Churchill [2009].

**Teorema 2.5.4.** *(Resíduo em Polos). Considere a singularidade $z_0$ de uma função $f(z)$. Temos que as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. *$z_0$ é dito polo de ordem $m$ de $f(z)$, com $m = 1, 2, ...$*
2. *temos que $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$, $m = 1, 2, ....$ Além disso, $\phi(z)$ é analítica e não nula em $z_0$.*

*Ademais, se ambos os itens acima forem verdade, temos que:*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0) \qquad \textit{se } m = 1$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \qquad \textit{se } m = 2, 3, \ldots$$

# 3 Probabilidade

Nesta seção será apresentada uma breve revisão dos conceitos de probabilidade, que vão desde a definição de função probabilidade até propriedades da esperança e variância. Todavia, os conceitos de função geradora de momentos, vetores aleatórios e densidades conjuntas não serão expostos nesta monografia, porém, é recomendavel consultar a obra Magalhães [2006], que aborda todos os conceitos citados acima.

## 3.1 Função de probabilidade de uma variável aleatória

**Definição 3.1.1.** *(Variável Aleatória). Considere o espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$*. Uma variável aleatória é definida como uma função* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$X^{-1}(L) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in L\} \in \mathcal{F}$$

*para qualquer intervalo* $L \subset \mathbb{R}$*.*

Descrevendo de forma informal, uma variável aleatória pode ser entendida como uma característica numérica do experimento estudado em questão. Por exemplo: seja a variável aleatória $X$ definida como o número de caras obtidas em n lançamentos de uma moeda, é evidente que X pode assumir valores inteiros e a probabilidade da função dessa v.a muda conforme o valor da mesma se altera.

**Definição 3.1.2.** *(Função de Probabilidade de uma Variável Aleatória Discreta). A função de probabilidade de uma variável aleatória X, denotada por* $p_X(a)$ *é definida como:*

$$p_X(a) = P(X = a) \tag{16}$$

*de modo que os itens a seguir devem ser satisfeitos:*

1. $p(a) \geq 0$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} p_X(a_i) = 1$;
3. $F_X(a) = P(X \leq a) = \sum_{\forall x \leq a} p_X(x)$, *onde* $F_X(.)$ *é definida como função de distribuição acumulada de* $X$ $(f.d.a)$;

4. $P(X \leq a) = 1 - P(X > a)$ *(Complemento).*

A função de probabilidade nos fornece a probabilidade da variável aleatória assumir um determinado valor, enquanto a $f.d.a$ fornece a probabilidade da $v.a$ assumir valores menores ou igual ao especificado na função. Uma analogia seria o experimento de lançar uma moeda 20 vezes, a probabilidade de sair 5 caras seria a $f.p$ assumindo valor 5 ($P(X = 5)$), enquanto a probabilidade de se obter no máximo 5 caras seria a $f.d.a$ em 5 ($P(X \leq 5)$).

**Definição 3.1.3.** *(Função de Densidade de Probabilidade de uma Variável Aleatória Contínua). A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória $X$, denotada por $f_X(x)$, é definida como:*

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{17}$$

*para qualquer $x$ no domínio de $X$, satisfazendo:*

1. $f_X(x) \geq 0$ *para todo $x$ no domínio de $X$;*
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$;
3. $F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$*, onde $F_X(.)$ é a função de distribuição acumulada de $X$;*
4. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a)$.

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade da variável aleatória ser menor ou igual a um valor específico, mas em uma região contínua. Um exemplo comum de uma distribuição contínua é a distribuição exponencial, que poderia nos dizer a probabilidade de um equipamento eletrônico durar mais do que 6 anos, por exemplo.

## 3.2 Esperança e variância

O valor esperado ou esperança de uma variável aleatória é um dos principais conceitos na estatística. Por exemplo: quantas vezes, em média, é preciso jogar uma moeda não-viciada para se obter $n$ coroas? Ou qual é o tempo de vida, em média, de um determinado equipamento eletrônico? É por meio da esperança que podemos obter tais respostas.

Por outro lado, a variância de uma variável aleatória é essencial para descrever a dispersão em um conjunto de dados. Pense que em uma turma, a média da nota final em uma disciplina foi $5,43$, mas a composição de notas foram de três notas 10 e quatro notas 2. É fácil de ver que, no geral, a maioria da sala reprovaria. Contudo, os dados dão a entender que a maioria da turma teria sido aprovada.

Deste modo, cabe definir os conceitos de valor esperado e variância para distribuições contínuas e discretas, sendo os casos mais práticos na estatística. Vale ressaltar que as definições generalizadas para esperança e variância necessitam de conhecimentos em teoria da medida, tópico que não abordado neste trabalho, todavia poderá ser consultado na referência Billingsley [1986].

**Definição 3.2.1.** *(Esperança de Variáveis Aleatórias Discretas). Considere $X$ uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p_x$ que assuma valores para cada $x_j$ para cada $j \in \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é um conjunto de índices. Deste modo, a esperança de $X$ ou média de $X$ é bem definida quando*

$$E(X) = \mu = \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j . p_x(x_j) = \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j . p_x(X = x_j) \tag{18}$$

*de modo que tal somatório convirja.*

A definição da esperança de uma $v.a$ discreta é útil quando quisermos obter o valor médio, por exemplo, de $n$ ensaios independentes - distribuição binomial, ou a média de tentativas independentes de um experimento até obter o primeiro sucesso - distribuição geométrica.

**Definição 3.2.2.** *(Esperança de Variáveis Aleatórias Contínuas). Seja $X$ uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f_x$. Com isso, a esperança de $X$ ou média de $X$ é definida como*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \tag{19}$$

*desde que esta integral convirja e esteja bem definida.*

A esperança de uma $v.a$ contínua pode ser útil quando queremos obter o tempo de vida de um aparelho eletrônico, que pode ter o comportamento de uma distribuição exponencial. Ou até mesmo o tempo médio que um espectador pode assistir um programa de televisão, que poderia seguir o modelo de uma distribuição uniforme.

**Proposição 3.2.1.** *Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias (contínuas ou discretas), $a$ e $b$ constantes reais e positivas. Temos:*

1. ***Linearidade da Esperança (P1):***

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. ***Soma de Esperanças (P2):***

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

3. ***Esperança de uma Constante $c \in \mathbb{R}$ (P3):***

$$E(c) = c$$

4. ***Esperança de uma Função $Z = g(X)$ da Variável $X$ (P4):***

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_j g(x_j) \cdot p_X(x_j) & \textit{se } X \textit{ é uma } v.a \textit{ discreta.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx & \textit{se } X \textit{ é uma } v.a \textit{ contínua.} \end{cases}$$

*Em particular, o n-ésimo momento da variável aleatória $X$ é definido como:*

$$E[X^n] = \begin{cases} \sum_j x_j^n \cdot p_X(x_j) & \textit{se } X \textit{ é uma } v.a \textit{ discreta.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x)\, dx & \textit{se } X \textit{ é uma } v.a \textit{ contínua.} \end{cases}$$

5. ***Esperança de duas*** $v.a's$ ***X e Y independentes:***

$$E(XY) = E(X)E(Y), \textit{se } X \textit{ e } Y \textit{ são independentes.}$$

Agora que temos a definição de esperança e suas principais propriedades, podemos definir a variância de uma variável aleatória.

**Definição 3.2.3.** *(Variância de uma Variável Aleatória). Seja $X$ uma variável aleatória (discreta ou contínua). Definimos a variância de $X$, $var(X) \geq 0$, como*

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] \tag{20}$$

*Que pode ser simplificada para:*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)) \\ &\overset{(P1)}{=} E(X^2) - 2E(XE(X)) + E^2(X) \\ &\overset{(P3)}{=} E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

*Deste modo, temos que a variância de $X$ está bem definida se o 1° e o 2° momento forem definidos.*

**Proposição 3.2.2.** *Seja $X$ uma v.a (contínua ou discreta), e $a, b \in \mathbb{R}$. Temos:*

$$\begin{aligned} Var(aX + b) = Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) &= E(a^2X^2 + 2aXb + b^2) - E^2(aX + b) \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (aE(X) + b)^2 \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E(X)^2 - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2E(X^2) - a^2E^2(X) \\ &= a^2(E(X^2) - E^2(X)) \\ &= a^2Var(X) \end{aligned}$$

**Definição 3.2.4.** *(Desvio Padrão de uma Variável Aleatória). O desvio padrão de uma variável aleatória $X$ é definido como:*

$$S_d(X) = \sqrt{Var(X)} \tag{21}$$

Tanto a variância quanto o desvio padrão de $X$ são úteis para ver como está disperso os dados de uma amostra, em relação a sua média. Por fim, vale ressaltar que a unidade da variância é o quadrado da do desvio padrão e da esperança.

## 3.3 Principais Distribuições Probabilísticas Discretas

**Definição 3.3.1.** *(Distribuição de Bernoulli). Considere a seguinte variável aleatória:*

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{com probabilidade } p \\ 0, & \textit{com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

*Definimos a função de probabilidade de uma Bernoulli como:*

$$p_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}\mathbb{I}_{\{0,1\}}^{(x)} \tag{22}$$

Na estatística, a distribuição de Bernoulli é comumente utilizada em experimentos realizados uma única vez, cuja resposta é sucesso ou fracasso. Um exemplo de experimento de uma Bernoulli é o lançamento de uma moeda, cujas respostas serão cara ou coroa.

**Definição 3.3.2.** *(Distribuição Binomial) Definimos a função de probabilidade de uma distribuição binomial como:*

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\mathbb{I}_{\{0,1,\ldots,n\}}^{(k)} \tag{23}$$

Por outro lado, a distribuição binomial nos diz qual a probabilidade de ocorrer $k$ sucessos em $n$ tentativas, por exemplo, a probabilidade de obter a face cara $k$ vezes em $n$ lançamentos. Ademais, é possível mostrar por meio do teorema da unicidade, na seção aplicações, que a soma de n variáveis Bernoulli's independentes com parâmetro $p$ retorna uma $bin(n, p)$.

**Definição 3.3.3.** *(Distribuição de Poisson). Definimos a função de probabilidade de uma distribuição de Poisson como:*

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\mathbb{I}_{\{0,1,2,\ldots\}}^{(k)} \tag{24}$$

A distribuição de Poisson é comumente utilizada em exemplos com dados não contínuos, e também se assume que tal exemplo segue uma distribuição de poisson com parâmetro especificado. Um caso possível seria o experimento de medir a probabilidade de que mais de 50 carros estacionem no Ciclo Básico I da Unicamp, assumindo que o experimento siga uma $poisson(0.5)$.

**Definição 3.3.4.** *(Distribuição Geométrica). Definimos a função de probabilidade de uma distribuição geométrica como:*

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}\mathbb{I}_{\{1,2,3,\ldots\}}^{(k)} \tag{25}$$

A distribuição geométrica nos diz a probabilidade de obter o primeiro sucesso após $k-1$ fracassos. Um exemplo seria o de medir a probabilidade de lançar uma moeda não viciada 100 vezes e obter cara apenas na centésima tentativa (por volta de $10^{-32}$).

## 3.4 Principais Distribuições Probabilísticas Contínuas

**Definição 3.4.1.** *(Distribuição Uniforme) A função de densidade de probabilidade de uma distribuição uniforme é representada por:*

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{(a,b)}(x) \tag{26}$$

**Definição 3.4.2.** *(Distribuição Exponencial) Definimos a função de densidade de probabilidade de uma distribuição exponencial como:*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \tag{27}$$

**Definição 3.4.3.** *(Distribuição Normal) A função de densidade de probabilidade de uma* *distribuição normal é dada por:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x) \tag{28}$$

**Definição 3.4.4.** *(Distribuição Gama) Definimos a função de densidade de probabilidade de uma distribuição gama como:*

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \tag{29}$$

## 3.5 Funções Características

Na teoria da probabilidade, as funções características são úteis para demonstrar os principais teoremas da estatística, como o teorema do limite central. Além disso, essa função descreve exclusivamente uma distribuição de probabilidade e é útil para calcular os momentos de uma variável aleatória. No entanto, trabalhar com tais funções pode ser mais desafiador, pois dependendo do tipo de distribuição, é necessário empregar técnicas específicas de integração, como veremos posteriormente.

**Definição 3.5.1.** *(Função Característica). Definimos a função característica de uma variável aleatória $X$ como:*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX)) \tag{30}$$

*para $t \in \mathbb{R}$.*

Ademais, na próxima proposição serão enunciadas as principais propriedades das funções características. Algumas serão demonstradas enquanto outras poderão ser consultadas na referência Magalhães [2006].

**Proposição 3.5.1.** *Considere uma variável aleatória $X$ qualquer com função característica $\phi_X(t)$, temos que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. ***Unicidade:*** *Se duas variáveis aleatórias $X$ e $Y$ possuem a mesma função característica, então elas têm a mesma distribuição;*

2. *$\phi_X(0) = 1$;*

*3.* $|\phi_X(t)| \leq 1$*;*

*4. Se* $X$ *e* $Y$ *são independentes, temos que:* $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$*;*

*5. A função característica* $\phi_X(t)$ *gera momentos. Especificamente, o n-ésimo momento central de* $X$ *é dado por*

$$E(X^n) = i^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial t^n}\phi_X(t)\Big|_{t=0}, n = 1, 2, ..., se\ E(|X|^n) < \infty.$$

*6. dado que a e b são constantes, temos:*

$$\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$$

***Demonstração:***

***1.*** *A unicidade será discutida melhor em aplicações.*

***2.*** $\phi(0) = E[e^{i0X}] = E[1] = 1.$

***3.***[§] *Para provar tal item devemos utilizar a desigualdade de Jensen:*

$$\begin{aligned} |\phi_X(t)| &= |E(e^{itX})| = |E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))| \\ &= \sqrt{E^2(\cos(tX)) + E^2(\sin(tX))} \overset{\text{jensen}}{\leq} \sqrt{E[\cos^2(tX) + \sin^2(tX)]} = 1 \\ &\therefore |\phi(t)| \leq 1. \end{aligned}$$

***4.*** *Para provar este item, devemos nos lembrar da propriedade (P5) da esperança de duas v.a's X e Y independentes:*

$$\phi_{X+Y}(t) = E(e^{ti(X+Y)}) = E(e^{tiX}e^{itY}) \overset{\text{ind.}}{=} E(e^{tiX})E(e^{tiY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

***5.*** *A demonstração da propriedade da geração de momentos de uma função característica pode ser consultada no capítulo 5 do livro Magalhães [2006];*

***6.*** $\phi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{it(aX)e^{itb}}) = e^{itb}E(e^{i(at)X}) = e^{itb}\phi_X(at)$

[§] A desigualdade de Jensen nos diz que se $f(X)$ é convexa e $E(X), E(f(X))$ são finitas, temos que: $f(E(X)) \leq E(f(X))$

## 3.6 Demonstração das Principais Funções Características Discretas

**Exemplo 3.6.1.** *(Função Característica de uma Poisson). Considere a variável aleatória $X \sim poisson(\lambda)$, temos que sua função característica, $\phi_X(t)$, é dada como:*

$$\phi_x(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{itx}\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(e^{it}\cdot\lambda\right)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

**Exemplo 3.6.2.** *(Função Característica de uma Binomial). Considere $X \sim bin(n,p)$, sua função característica, $\phi_X(t)$ é obtida pelos seguintes passos:*

$$\phi_x(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{x=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}e^{itx} = \sum_{x=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \left(pe^{it}\right)^x \cdot (1-p)^{n-x}$$
$$\overset{B.Newton}{=} \left(Pe^{it} + (1-P)\right)^n$$

**Exemplo 3.6.3.** *(Função Característica de uma Geométrica). Seja $X \sim geo(p)$, sua função característica é demonstrada por:*

$$\phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}e^{itx} = \frac{p}{1-p}\sum_{x=1}^{\infty}\left[(1-p)e^{it}\right]^x$$

*Note que $|(1-p)e^{it}| = (1-p) < 1$. Deste modo, esta série geométrica converge:*

$$\phi_X(t) = \frac{p}{1-p}\sum_{x=1}^{\infty}\left[(1-p)e^{it}\right]^x = \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-(1-p)e^{it}} - 1\right) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$$

## 3.7 Demonstração das principais funções características contínuas

**Exemplo 3.7.1.** *(Função característica de uma distribuição Uniforme $U(a,b)$). A função característica de Variável Aleatória $X \sim U(a,b)$, com, $a < b$ é dada por:*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a}\,dx = \frac{1}{it(b-a)}e^{itx}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$$

**Exemplo 3.7.2.** *(Funções características dos casos de uma distribuição Gama).*

1. *Seja $X \sim gama(1,\lambda)$, ou seja, $X \sim exp(\lambda)$. Temos que sua função característica é:*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda - it)}\,dx = \frac{\lambda}{it-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

2. *Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ Variáveis Aleatórias i.i.d, de modo que $X_i \sim exp(\lambda)$. Definindo $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, obtemos que sua Função Característica é dada por:*

$$\phi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(X_1+...+X_n)}) \overset{\text{ind.}}{=} E(e^{itX_1}) * ... * E(e^{itX_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n$$

   *Tal resultado mostra que $Y \sim gama(n,\lambda)$, que também é denominada distribuição de Erlang. Isso vem do fato que a função característica caracteriza unicamente uma distribuição de probabilidade.*

3. *Considere a distribuição $Z \sim gama(\alpha,\lambda)$. Para demonstrar rigorosamente a Função Característica de Z, faz-se necessário o uso da transformada de Fourier, que está fora do escopo deste trabalho. Deste modo, tal função será demonstrada de forma mais intuitiva, como se fosse uma demonstração feita por um físico. Temos que:*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx}\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\,dx = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - it)^\alpha}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}e^{-x(\lambda-it)}(\lambda - it)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,dx$$

   *Note que esta integral é igual a 1, pois estamos calculando a f.d.a de uma distribuição $gama(\alpha, \lambda - it)$ em todo seu domínio. Deste modo, a Função Característica de uma distribuição gama qualquer é:*

$$\phi_Z(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\alpha$$

**Exemplo 3.7.3.** *(Função característica de uma distribuição normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$). Considere $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Obtemos sua Função Característica por meio dos seguintes passos:*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\frac{2itx\sigma^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, dx$$

*Veja que seria trabalhoso desenvolver tal integral por meio dos métodos apresentados nesse trabalho. Deste modo, podemos desenvolver o termo na exponencial para chegar em uma expressão com valor conhecido:*

$$\begin{aligned}\frac{2x\sigma^2 it}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 &= -\frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - 2x(\mu + \sigma^2 it) + (\mu + \sigma^2 it)^2] + \frac{(\mu + \sigma^2 it)^2}{2\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{[x - (\mu + \sigma^2 it)]^2}{2\sigma^2} + \mu it - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\end{aligned}$$

*Com isso, temos que $\phi_X(t)$ pode ser escrita como:*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{(\mu it - \frac{\sigma^2 t^2}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}[x-(\mu+\sigma^2 it)]^2}\, dx$$

*Note que esta integral é igual a 1, por se tratar de uma densidade de uma Variável Aleatória normal com média $\mu + \sigma^2 it$ e variância $\sigma^2$.*

*Destarte, obtemos:*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{(\mu it - \frac{\sigma^2 t^2}{2})}$$

Pelo exemplo acima, conseguimos obter o valor correto da função característica da normal, porém, falta rigor matemático que demonstre de fato tal integral. Isso vem do fato que na definição de uma distribuição normal a média $\mu$ é real. Todavia, a técnica utilizada foi apenas uma "trapaça" para burlar os cálculos mais exaustivos, como se fosse a velha máxima da engenharia de passar diferenciais multiplicando no método de separação de variáveis para EDO's e afins.

Para calcular aquela integral complexa, vamos utilizar o exemplo de uma variável aleatória $S \sim \mathcal{N}(0,1)$ e utilizar propriedades da função característica para encontrar a de uma normal geral:

$$\phi_S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\, dx \overset{z=x-it}{=} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R-it}^{R-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Agora devemos calcular o limite da integral acima, e para isso vamos considerar o seguinte contorno $C_S$:

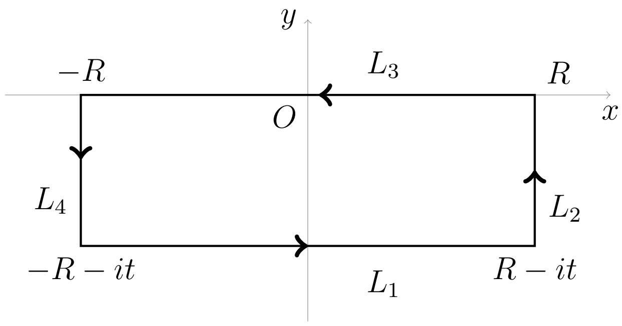



Figura 1: Contorno $C_S$

Note que $f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$ não possui singularidades dentro ou sobre o contorno $C_S$. Deste modo, pelo teorema de Cauchy-Goursat, temos:

$$\oint_{C_S} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \int_{L_1} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{L_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{L_3} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{L_4} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0$$

Como estamos interessados em calcular a integral sobre $L_1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{-R-it}^{R-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz &= \lim_{R\to\infty} -\left( \int_{L_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{L_4} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right) + \lim_{R\to\infty} \left( -\int_{L_3} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} -\left( \int_{L_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{L_4} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right) + \lim_{R\to\infty} \left( -\int_{R}^{-R} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} -\left( \int_{L_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{L_4} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right) + \lim_{R\to\infty} \left( \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} -\left( \int_{L_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{L_4} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right) + \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

Devemos mostrar agora que as integrais de $L_2$ e $L_4$ tendem a zero quando $R$ tende ao infinito. Vamos considerar apenas o caso de $L_2$ ($L_4$ é análogo) e $t > 0$.

Uma parametrização para $L_2$ seria: $z = R - iv$, com $(0 \leq v \leq t)$. Deste modo, obtemos que:

$$|e^{-\frac{z^2}{2}}| = |e^{-\frac{(R^2-v^2-2vRi)}{2}}| = |e^{\frac{(v^2-R^2)}{2}}| \leq max_{z \in L_2}|e^{-\frac{z^2}{2}}| = e^{\frac{(t^2-R^2)}{2}} = M$$

Dado que o comprimento de $L_2(L)$ é $t$, obtemos, por meio do teorema do limite superior para integrais de contorno, o seguinte resultado:

$$\left| \int_{L_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right| \leq ML = te^{\frac{(t^2-R^2)}{2}} \overset{R \to \infty}{\to} 0$$

Com isso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R-it}^{R-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \lim_{R \to \infty} -\left( \int_{L_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{L_4} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right) + \sqrt{2\pi}$$
$$= \sqrt{2\pi}$$

Deste modo, obtemos:

$$\phi_S(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \to \infty} \int_{-R-it}^{R-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Vale ressaltar que o resultado obtido foi para $t > 0$. Para $t < 0$ devemos inverter os sentidos de $L_2$ e $L_4$ e para $t = 0$ caímos em um resultado trivial.

Por fim, para calcular a função característica de uma normal¶ $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, utilizamos a propriedade 6 das funções características:

$$\phi_Y(t) = e^{it\mu}\phi_S(\sigma t) = e^{(it\mu - \frac{(\sigma t)^2}{2})}$$

O próximo exemplo será a obtenção da função característica de *Cauchy*. Além disso, para demonstrar tal resultado, é necessário utilizar integração de contorno nos complexos e o teorema dos resíduos. Deste modo, para compreender melhor os resultados posteriores,

¶se $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Então $Y = \sigma Z + \mu$

é imprescindível a leitura da referência Brown and Churchill [2009], que possui diversos outros exemplos similares ao que será apresentado.

**Exemplo 3.7.4.** *(Função Característica de uma distribuição Cauchy$(\alpha, \beta)$). Considere $X \sim cauchy(\alpha, \beta)$, temos que sua função densidade de probabilidade é dada por:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\beta[1 + (\frac{x-\alpha}{\beta})^2]}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

*Deste modo, a função característica $\phi_X(t)$ é dada por:*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{\pi\beta[1 + (\frac{x-\alpha}{\beta})^2]}\, dx$$

*Tomando $u = \frac{x-\alpha}{\beta}$ e $du = \frac{dx}{\beta}$, obtemos:*

$$\phi_X(t) = \frac{e^{it\alpha}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\beta u}}{1+u^2}\, du$$

*Para resolver esta integral, vamos separar os casos em que $t < 0$ e $t \geq 0$, e por fim, utilizar o teorema dos resíduos.*

*Deste modo, considere $f(z) = \frac{e^{it\beta z}}{1+z^2}$. Temos que as singularidades $z = \pm i$ são polos de ordem 1. Para o caso em que $t \geq 0$, vamos considerar o seguinte caminho $C_1$:*

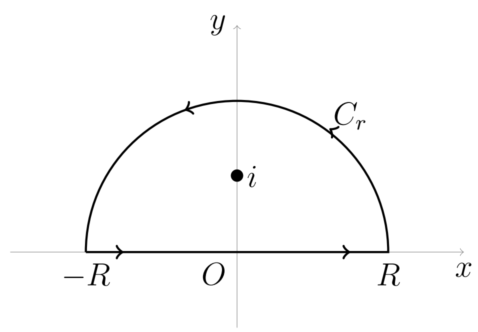



Figura 2: Caminho $C_1$

*Pelo teorema dos resíduos, pode-se perceber que por meio da figura acima, obtem-se:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i Res_{z=i} f(z) - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz$$

*Como* $f(z) = \frac{e^{it\beta z}}{1+z^2} = \frac{e^{it\beta z}}{z+i}\frac{1}{z-i} = \frac{\phi(z)}{z-i}$, *onde* $\phi(z) = \frac{e^{it\beta z}}{z+i}$ *e* $\phi(i)$ *é analítica, obtemos pelo teorema dos resíduos de polos:*

$$Res_{z=i}f(z) = \phi(i) = \frac{e^{iy\beta i}}{i+i} = \frac{e^{-\beta t}}{2i}$$

*Com isso, obtemos que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \pi e^{-\beta t} - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz$$

*Agora devemos mostrar que* $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$

*Passos:*

1. $|z^2+1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{R^2-1}$

2. $|e^{i\beta tz}| = |e^{i\beta t(x+iy)}| = |e^{-\beta ty}||e^{i\beta tx}| = e^{-\beta ty} \leq 1 \quad (t, \beta, y = im(z) > 0)$

3. *É fácil de ver que:* $|\frac{e^{it\beta z}}{z^2+1}| \leq \frac{1}{R^2-1}$

*Com isso, pelo teorema do limite superior para integrais, temos:*

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{it\beta z}}{1+z^2}\,dz\right| \leq \int_{C_R}\left|\frac{e^{it\beta z}}{1+z^2}\right|dz \leq ML = \pi R\frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{\mathrm{R}\to\infty} 0$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it\beta u}}{1+u^2}\,du = \pi e^{-\beta t}$$

*Deste modo, temos que:*

$$\phi(t) = \frac{e^{it\alpha}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it\beta u}}{1+u^2}\,du = e^{it\alpha-\beta t}, \quad Para\ t \geq 0$$

*Para o caso em que* $t < 0$, *vamos considerar o seguinte contorno* $C_2$:

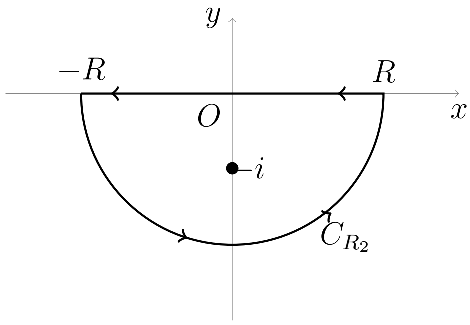



Figura 3: Caminho $C_2$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)\,dz &= \int_{C_{R_2}} f(z)\,dz + \int_{R}^{-R} f(u)\,du \\
&= \int_{C_{R_2}} f(z)\,dz - \int_{-R}^{R} f(u)\,du \\
&= 2\pi i Res_{z=-i} f(z)
\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(u)\,du = \lim_{R\to\infty} \int_{C_{R_2}} f(z)\,dz - 2\pi i Res_{z=-i} f(z)$$

De forma análoga ao caso em que $t > 0$, obtemos que:

1. $\left| \int_{C_{R_2}} \frac{e^{it\beta z}}{1+z^2}\,dz \right| \overset{\text{R}\to\infty}{\to} 0$

2. $f(z) = \frac{e^{it\beta z}}{1+z^2} = \frac{e^{it\beta z}}{z-i}\frac{1}{z+i} = \frac{\phi(z)}{z-i}$, onde $\phi(z) = \frac{e^{it\beta z}}{z-i}$

O que implica em:

$$\begin{aligned}
Res_{z=-i} f(z) = \phi(-i) = -\frac{e^{t\beta}}{2i} \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(u)\,du &= \lim_{R\to\infty} \int_{C_{R_2}} f(z)\,dz - 2\pi i Res_{z=-i} f(z) \\
&= \pi e^{\beta t}
\end{aligned}$$

Com isso, obtêm-se:

$$\phi(t) = \frac{e^{it\alpha}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\beta u}}{1+u^2}\, du = e^{it\alpha+\beta t}, \quad \text{Para } t < 0$$

Então, a Função Característica $\phi(t)$ é dada por:

$$\phi(t) = e^{it\alpha-\beta|t|} = \begin{cases} e^{it\alpha+\beta t} & \text{se } t < 0 \\ e^{it\alpha-\beta t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

# 4 Aplicações

## 4.1 Teorema Central do Limite

**Definição 4.1.1.** *(Convergência em Distribuição). Sejam* $\{X_n : n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias e* $X$ *com funções de distribuição* $\{F_n : n \geq 1\}$ *e* $F_X$ *respectivamente.* $X_n$ *converge em distribuição para* $X$*, se para todo ponto* $x$ *em que a f.d.a* $F_X$ *é contínua, tenhamos que*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) \to F_X(x) \tag{31}$$

***Notação:*** $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$

**Exemplo 4.1.1.** *Sejam* $X_1, X_2, \ldots$ *v.a's i.i.d. com distribuição Uniforme* $(0, 1)$ *e sejam* $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ *e* $U_n = nY_n$ *duas estatísticas de* $X_i$*. Mostre que, quando* $n \to \infty$*,* $U_n \to \text{Exp}(1)$ *em distribuição.*

***Solução:*** *Queremos mostrar que* $\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(a) = F_{\exp(1)}(a)$*:*

$$\begin{aligned} F_{u_N}(x) &= P(U_N \leqslant x) = P(nY_n \leqslant x) = P(Y_n \leqslant x/n) \\ &= 1 - P\left(Y_n > \frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > \frac{x}{n}\right) \\ &\overset{(i.i.d)}{=} 1 - \left(P\left(X_i > x_{/n}\right)\right)^n = 1 - \left(\int_{x/n}^{1} dx\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} F_{u_N}(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{-x} = \int_0^x 1 \cdot e^{-1\cdot u} du = F_{\exp(1)}(x)$$

O teorema a seguir é necessário para a demonstração do teorema central do limite para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas ($i.i.d$). No entanto, sua prova envolve conceitos de teoria da medida. Para detalhes sobre a prova deste teorema, é recomendável consultar a referência Williams [1991].

**Teorema 4.1.1.** *(Teorema da Continuidade de Levy). Seja* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias e* $X$ *uma variável aleatória. Temos que* $X_n \xrightarrow{d} X$ *se e somente se* $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*, onde* $\phi_{X_n}(t)$ *e* $\phi_X(t)$ *são as funções características de* $X_n$ *e* $X$ *respectivamente.*

**Teorema 4.1.2.** *(Teorema Central do Limite).Seja* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média* $\mu$ *e variância* $\sigma^2 > 0$*. Então, temos o seguinte resultado*

$$Z_n = \frac{L_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$$

*onde* $L_n = X_1 + \ldots + X_n$*.*

***Solução:*** *Se definirmos* $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$*, onde* $Y_i = X_i - \mu$*, obtemos:*

$$\phi_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(t) \overset{P.6(FC)}{=} \phi_{S_n}(t/\sigma\sqrt{n}) \overset{ind.}{=} \prod_{i=1}^{n} \phi_{Y_i}(t/\sigma\sqrt{n}) \overset{i.i.d}{=} (\phi(t/\sigma\sqrt{n}))^n$$

***Observação:*** $\phi_{S_n}(t/\sigma\sqrt{n}) = \phi_{Y_1+\ldots+Y_n}(t/\sigma\sqrt{n})$ *e* $\phi(t/\sigma\sqrt{n}) = \phi_{Y_i}(t/\sigma\sqrt{n})$ *Com isso, por meio da expansão de Taylor ao redor da origem, e considerando até de segunda ordem, obtemos*

$$\phi(t/\sigma\sqrt{n}) = \phi(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\phi'(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 \phi''(0) + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

*onde a notação* $\mathcal{O}(t)$*, indica funções em que* $\lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{O}(t)}{t} = 0$*.*

*Pela definição de momentos de uma função característica, obtemos:* $\phi(0) = 1, \phi'(0) = iE\left(Y_i\right) = i0 = 0$ *e* $\phi''(0) = i^2\sigma^2 = -\sigma^2$*. Destarte, temos que:*

$$\phi(t/\sigma\sqrt{n}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n}\left[1 - \frac{o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{t^2/n}\right]$$

*Note que* $\lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{t^2/n}\right] = 1$*.Além disso, devemos utilizar o seguinte resultado da* *exponencial:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

*Com isso, chegamos ao seguinte resultado:*

$$\lim_{n\to\infty}\phi(t/\sigma\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{t^2}{2n}\left[1-\frac{o\left(t^2/n\right)}{t^2/n}\right]\right\}^n = e^{-t^2/2}$$

*e, pelo Teorema da Continuidade de Levy, concluímos*

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \Rightarrow \frac{L_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

## 4.2 Unicidade

Um dos principais resultados das funções características é o da unicidade, que basicamente nos diz que se duas variáveis aleatórias possuem a mesma função característica, então elas devem ter a mesma função de distribuição. Para provar tal resultado, vamos necessitar do teorema da Fórmula de Inversão, que não será provado neste trabalho, mas que poderá ser consultado em Durrett [1996] e Billingsley [1986]. Por fim, a forma na qual este teorema foi enunciado e boa parte de sua prova foram obtidas da referência Magalhães [2006].

**Teorema 4.2.1.** *(Fórmula da Inversão). Considere $X$ uma variável aleatória qualquer, então sua função característica $\phi_X(t)$ determina a função de distribuição de $X$, através da seguinte Fórmula de Inversão:*

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\phi_X(t)dt;$$

*sendo $\widetilde{F}(w) = \frac{1}{2}\left\{F(w) + F\left(w^-\right)\right\}, \forall w \in \mathbb{R}$, e os números reais $a, b$ e $c$ tais que $c > 0$ e $a < b$.*

***Observação:*** $F(w^-) = \lim_{\epsilon\to 0^+} F(w-\epsilon)$. *Note que se a variável aleatória em questão for contínua, temos que $F(w^-) = F(w)$.*

**Teorema 4.2.2.** *(Teorema da Unicidade). Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis aleatórias quaisquer. Se $X$ e $Y$ possuem a mesma função característica, então $X$ e $Y$ possuem a mesma função de distribuição.*

***Prova:***

*Por hipótese, $X$ e $Y$ têm a mesma função característica. Deste modo, por meio da Fórmula de Inversão, temos que para $a, b$ reais, com $a < b$,*

$$\tilde{F}_X(b) - \tilde{F}_X(a) = \tilde{F}_Y(b) - \tilde{F}_Y(a).$$

*Lembrando que se $a \to -\infty$, temos que $\tilde{F}_X(a) \to 0$ e $\tilde{F}_Y(a) \to 0$ e com isso, obtemos:*

$$\tilde{F}_X(b) = \tilde{F}_Y(b), \forall b \in \mathbb{R}.$$

*Seja $c \in \mathbb{R}$ como a f.d.a é crescente, e por meio da definição de $\tilde{F}(.)$, chegamos em:*

$$F_X(c) \leq \tilde{F}_X(b) \leq F_X(b) \text{ e } F_Y(c) \leq \tilde{F}_Y(b) \leq F_Y(b).$$

*Lembrando que a f.d.a é contínua à direita, tomando o limite para $b \downarrow c$, chegamos em:*

$$\lim_{b \downarrow c} \tilde{F}_X(b) = F_X(c) \text{ e } \lim_{b \downarrow c} \tilde{F}_Y(b) = F_Y(c)$$

*e isto implica $F_X(c) = F_Y(c)$.*

Dado que a função característica consegue fornecer todas as informações de uma distribuição de probabilidade, podemos mostrar as principais distribuições de composições de variáveis aleatórias:

**Exemplo 4.2.1.** *(Soma de Poisson.) Seja $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, com $i = 1, \ldots, n$, de modo que todas as variáveis $X_i$ são independentes. Definindo $Y = X_1 + \ldots + X_n$, obtemos que a distribuição de Y, por meio da F.C, é*

$$\phi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right) = E(e^{itX_1 + \ldots + X_n}) = \prod_{j=1}^{n} \phi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j \left(e^{it} - 1\right)} = \exp\left\{\left(e^{it} - 1\right) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right\}$$

*note que a F.C de $Y$ é a mesma que a uma Poisson $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$. Além disso, devido ao fato que a F.C descreve unicamente uma distribuicão, temos que:*

$$Y \sim \text{poisson}\,(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$$

**Exemplo 4.2.2.** *(Distribuição da média) Seja $X_1, ..., X_n$ v.a's i.i.d, de modo que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Definindo $\bar{X} = (X_1 + \ldots + X_n)/n$, obtemos que a distribuição de $\bar{X}$, por meio da F.C, é*

$$\phi_{\bar{X}}(t) = E\left(e^{it\bar{X}}\right) = E(e^{i(t/n)(X_1+\ldots+X_n)}) \overset{ind.}{=} \prod_{j=1}^{n} \phi_{X_j}(t/n) \overset{i.i.d}{=} (\phi_{X_j}(t/n))^n \tag{32}$$

$$= \exp\left\{\frac{i\mu t}{n} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n^2}\right\}^n = \exp\left\{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right\} \tag{33}$$

*é fácil de ver que a F.C de $\bar{X}$ é a mesma que uma normal $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Deste modo, pela unicidade da função característica, obtemos que:*

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Ademais, há diversas outras distribuições de somas e afins que podem ser demonstradas por meio do teorema da unicidade, como a soma de exponenciais e afins.

| **Distribuição** | **Média** | **Variância** | **Função Característica** |
|---|---|---|---|
| Bernoulli(p) | $p$ | $p(1-p)$ | $1 - p + pe^{it}$ |
| Binomial(n,p) | $np$ | $np(1-p)$ | $(1 - p + pe^{it})^n$ |
| Geométrica(p) | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | $\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$ |
| Poisson($\lambda$) | $\lambda$ | $\lambda$ | $e^{\lambda(e^{it}-1)}$ |
| Uniforme Contínua$(a, b)$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$ |
| Exponencial($\lambda$) | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda-it}$ |
| Gama$(\alpha, \beta)$ | $\frac{\alpha}{\beta}$ | $\frac{\alpha}{\beta^2}$ | $(\frac{\beta}{\beta-it})^\alpha$ , $t < \beta$ |
| Cauchy$(\alpha, \beta)$ | $-$ | $-$ | $e^{i\alpha t-\beta\|t\|}$ |
| Normal$(\mu, \sigma^2)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $e^{i\mu t-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$ |

Tabela 1: Média, Variância e Função Característica de Distribuições.

# 5 Conclusão

Diante do exposto, é possível concluir, a partir do desenvolvimento apresentado neste trabalho, que as funções características desempenham um papel fundamental na demonstração dos principais resultados na teoria estatística. Ao longo desta monografia, parte da teoria dos números complexos foi explorada, servindo de base para a demonstração e compreensão dos principais conceitos das funções características. Essa base teórica contribui para uma compreensão mais profunda da relação entre as variáveis complexas e a probabilidade, de modo a compreender conceitos que não são discutidos em cursos introdutórios de probabilidade, mas que são indispensáveis para um desenvolvimento teórico consistente nesse campo.

Além disso, este trabalho oferece uma breve revisão em probabilidade, abordando conceitos fundamentais necessários para compreender a teoria das funções características. No entanto, é importante ressaltar que nem todos os aspectos dos tópicos de variáveis complexas e probabilidade foram aprofundados neste estudo. Sendo assim, é recomendado que o leitor consulte as referências fornecidas, que vão desde os tópicos iniciais nessas teorias até mesmo conceitos que envolvam resultados avançados, para que deste modo o leitor expandir e aprimorar o entendimento desses temas.

# Referências


Patrick Billingsley. *Probability and Measure.* John Wiley and Sons, second edition, 1986.

James Ward Brown and Ruel V. Churchill. *Complex Variables and Applications.* McGraw-Hill Higher Education, Boston, MA, eighth edition, 2009. ISBN 9780073051949 0073051942 9780071263283 0071263284.

Richard Durrett. *Probability: theory and examples.* Duxbury Press, Belmont, CA, second edition, 1996. ISBN 0-534-24318-5.

Marcos Nascimento Magalhães. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias.* EdUSP, 2006. ISBN 8531409454, 9788531409455.

David Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991. ISBN 0-521-40605-6.