



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Eduardo Aparecido dos Santos Galvão Saito

Aplicação da Teoria de Fourier em geometria: o Problema Isoperimétrico

Campinas
24/11/2023

Eduardo Aparecido dos Santos Galvão Saito

Aplicação da Teoria de Fourier em geometria: o Problema Isoperimétrico

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, MS777.

Orientador: Prof. Dr. João Vítor da Silva

Campinas
2023

"A essência do conhecimento consiste em aplicá-lo, uma vez possuído."

Confúcio

Agradecimentos

Agradeço a todos os amigos que gentilmente se dispuseram a ler a presente monografia e a dar sugestões de melhorias e, principalmente, a meu orientador, Prof. Dr. João Vítor da Silva, que auxiliou na ideia do projeto e forneceu as referências necessárias para que tudo fosse possível.

Resumo

O presente texto tem por objetivo apresentar o clássico problema isoperimétrico além dos principais pontos da teoria de Fourier. Apesar de parecerem assuntos desconexos, é apresentada uma solução para o problema em duas dimensões que usa ferramentas desta teoria. Concluímos instigando o leitor a conhecer mais sobre o problema em dimensões maiores.

Palavras-chave: Problema Isoperimétrico, Séries de Fourier, Curva Retificável.

Abstract

The purpose of this text is to present the classic isoperimetric problem in addition to the main points of Fourier theory. Despite seeming disconnected issues, one solution to the problem is presented in two dimensions that uses tools from this theory. We conclude by encouraging the reader to learn more about this problem in higher dimensions.

Key words: Isoperimetric Problem, Fourier Series, Rectifiable Curve.

Conteúdo

1	Introdução	8
2	Solução Geométrica	10
3	Elementos da Teoria de Fourier	17
3.1	Vida e obra de Fourier	17
3.2	Funções periódicas	18
3.3	Série de Fourier	18
3.3.1	Coeficientes da série de Fourier	18
3.3.2	Existência da série de Fourier	19
3.3.3	Convergência da série de Fourier	20
3.3.4	Série de Fourier em intervalos arbitrários	22
3.3.5	Forma complexa da série de Fourier	23
3.3.6	Diferenciação e integração da série de Fourier	24
4	Solução do PI via séries de Fourier	24
4.1	Pré-requisitos de geometria de curvas	24
4.2	Pré-requisitos de Cálculo	26
4.3	Solução do PI	27

1 Introdução

O **Problema Isoperimétrico (PI)** foi formulado pela primeira vez na Grécia antiga a partir da **Lenda de Dido** por volta do século IX a.C. A lenda conta que a princesa fenícia Elisa (nome tírio de Dido) fugiu da sua cidade natal, Tiro, em direção à África, devido a uma disputa de poder entre seu irmão e seu tio, que também era seu marido. Ao chegar no continente, o rei indígena Jarbas concordou em vender uma porção de terras à princesa ao longo da costa, mas com uma condição: ele venderia a porção de terra que ela conseguisse cercar com a pele de um boi. Então, a princesa mandou cortar o couro do animal em tiras muito finas, que quando unidas formariam um grande fio, e cercou uma área em formato semicircular, que tinha tamanho suficiente para se fundar uma nova cidade. Assim aconteceu: a faixa de terra comprada por Dido deu início à cidade de Cartago. Posteriormente, o rei Jarbas anunciou que a princesa deveria se casar com ele, sob a ameaça de invadir a cidade recém-criada. Não contente com a ideia da união, Dido suicidou-se.



Figura 1: Princesa fenícia Dido.



Figura 2: Lenda de dido. A cidade de Cartago foi delimitada pelo couro de um boi.

Independente da veracidade da lenda, temos uma questão no mínimo interessante: dado um comprimento fixo, como cercar a maior área possível? No caso de Dido, esta resposta daria a maneira de se obter mais espaço para sua cidade. A particular escolha do semicírculo por Dido foi a decisão correta e, de alguma forma, esse conhecimento parecia ser compreendido pelo seu povo, mesmo que só intuitivamente.

O problema de Dido tem uma particularidade que a área a ser cercada deve ser escolhida englobando uma linha reta, pois ela deveria delimitar suas terras ao longo da costa do mediterrâneo. Esse problema motivou a elaboração do **Problema Isoperimétrico**, abreviadamente PI, como abaixo.

Problema Isoperimétrico: *Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L , aquela que engloba a maior área.*

Esse problema pode aparecer em outra versão, que chamamos de dual.

Problema Isoperimétrico (versão dual): *Dada uma área $A > 0$, encontrar, dentre todas as curvas que englobam esta área, aquela de menor perímetro.*

Esse problema e suas generalizações para dimensões maiores como \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^n ainda são estudadas hoje em dia. Sendo que em alguns casos, como em superfícies não homogêneas, a questão ainda não foi totalmente solucionada. No entanto, em \mathbb{R}^2 , que é o caso que trataremos aqui, a solução é bem conhecida. Conseguimos garantir sua existência e unicidade com recursos da Teoria de Fourier.

O fato de conseguirmos uma solução para um problema geométrico, como esse, com recursos da teoria de Fourier, que foi inicialmente desenvolvida para o estudo de funções periódicas, é no mínimo inesperado. A seguir, vamos definir conceitos importantes e apresentar uma solução geométrica do problema isoperimétrico, que o restringe para polígonos somente, em um primeiro momento, e depois expande para curvas mais gerais. Uma atenção especial deve ser dada a esse passo de passar de um polígono para uma curva suave. O que é exatamente o comprimento de uma curva? O que é o comprimento de um círculo, por exemplo? Podemos pensar em aproximações para um círculo por polígonos inscritos ou circunscritos e à medida que o número de lados desses polígonos tende ao infinito, seu comprimento tende para o que chamamos de comprimento da circunferência. Essa é a abordagem natural para todas as *curvas retificáveis*. Entretanto, há curvas que não são retificáveis, o que significa que se fizermos aproximações delas por poligonais, o comprimento de curva divergeria para o infinito. Exemplo destes casos são os fractais. Entretanto, essas figuras com certeza não podem ser soluções do PI, logo não há necessidade de nos preocuparmos com elas. Concluiremos com uma demonstração da desigualdade isoperimétrica, que relaciona comprimento e área para uma curva qualquer no plano.

Por fim, iremos passar pelos alicerces da Teoria de Fourier que irá nos permitir demonstrar a existência e unicidade do PI de maneira elegante, mostrando as inúmeras aplicabilidades deste ferramental matemático.

2 Solução Geométrica

Vamos começar definindo conceitos importantes como os de homotetia e convexidade. Em palavras mais usuais, a homotetia representa a transformação de encolher ou aumentar uma figura. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 2.1 (Homotetia). Dado um ponto O e um número real $k \neq 0$, definimos a homotetia de centro O e razão k , em notação: $H(O, k)$, como sendo a transformação que leva um ponto P até um ponto P' de maneira que $\overrightarrow{OP'} = k \times \overrightarrow{OP}$ e podemos escrever que $P' = H(P)$.

Essa transformação conta com propriedades muito interessantes, a exemplo das duas a seguir que serão mais utilizadas.

1. Se R é uma região do plano de área A , então a região $\lambda R = \{\lambda X | X \in R\}$ tem área $\lambda^2 A$;
2. Se C é uma curva plana de comprimento c , então $\lambda C = \{\lambda X | X \in C\}$ possui comprimento λc .

Outro conceito importante é o de convexidade. Uma figura é dita *convexa* se, ao ligar quaisquer dois de seus pontos por um segmento de reta, este segmento ficar inteiramente contido na figura. Do contrário, ela é dita *côncava*.

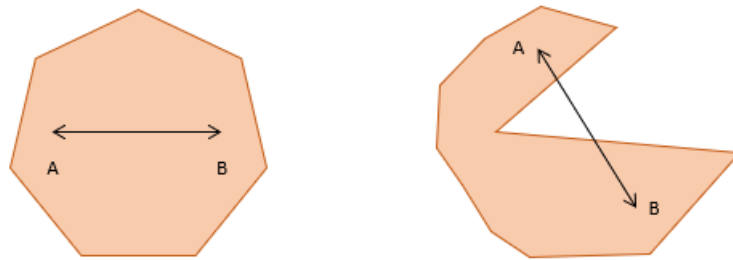


Figura 3: Exemplo de um polígono convexo (à esquerda) e um polígono côncavo (à direita). Disponível em: <https://castromarina.info/o-que-é-um-polígono-não-convexo>

Vamos nos restringir, por agora, a estudar o PI para polígonos. O enunciado do problema é o seguinte:

PI para n-ângulos: Fixado n natural e um número positivo A , dentre todos os n -ângulos de área A , qual é aquele que possui o menor perímetro?

O primeiro passo é demonstrar que tal solução de fato existe. Seja um polígono \mathcal{P}_n , de n lados. Vamos denotar seus vértices por $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Por simplicidade, podemos supor que $x_n = y_n = 0$, isto é, um de seus vértices está na origem. Agora, todo polígono de n lados pode ser associado a uma tupla em \mathbb{R}^{2n} , a saber $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, de forma que podemos definir uma função perímetro $P : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$P = \|(x_1, y_1)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|(x_i, y_i) - (x_{i+1}, y_{i+1})\|$$

Como o conjunto de todos os polígonos com um vértice na origem e área fixada A é um conjunto compacto, e dado que a função P é contínua, temos pelo teorema de Weierstrass, que P admite um mínimo no conjunto em questão. Assim, está garantida a existência de pelo menos uma solução para o PI formulado acima. \square

Lema 2.1 (Convexidade). *Todo polígono \mathcal{P} solução do PI para n -ágonos deve, necessariamente, ser convexo.*

Demonstração. Suponha que o polígono não seja convexo. Vamos mostrar que existe um outro polígono de mesma área, mas com perímetro menor, isto é o primeiro deles não pode ser uma solução para o PI que procuramos. Para começar, tenha em mente o exemplo de um polígono não convexo como abaixo, ou seja existem dois pontos, A e B , cujo segmento de reta que os une entra e sai do polígono ao menos uma vez.

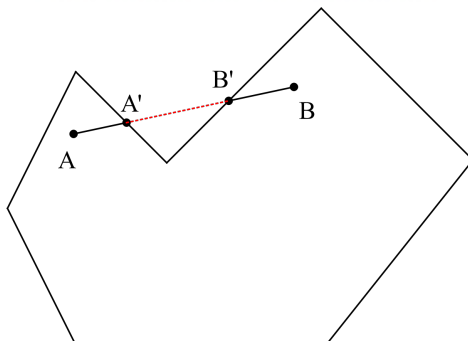


Figura 4: Exemplo de polígono côncavo. *Imagem produzida pelo autor através do software FX Draw*

Note que se trocarmos a parte do contorno do polígono que fica entre os pontos A' e B' pelo segmento de reta que une os dois, iremos aumentar a área da figura, ao passo que iremos reduzir seu perímetro, já que a soma de dois lados de um triângulo é sempre maior que o terceiro. Como aumentamos a área, podemos, por homotetia, reduzir a nova figura para chegar na área inicial. Esta nova figura resultante da homotetia irá ter um perímetro menor ainda. \square

Sabendo da convexidade do polígono, vamos enunciar uma proposição ainda mais forte.

Proposição 2.1. *Se \mathcal{P}_n é um n -ágono de área A que é solução do PI, então \mathcal{P}_n é equilátero, i.e., todos os lados de \mathcal{P}_n têm o mesmo comprimento.*

Demonstração. Vamos supor inicialmente por absurdo que \mathcal{P}_n tem dois lados consecutivos de medidas diferentes, AB e BC . Mostraremos que existe um n -ágono de mesma área, porém com um perímetro menor. Considere o segmento AC , inteiramente contido dentro do polígono, afinal ele é convexo. Pelo vértice B , trace uma reta r paralela ao segmento AC e seja A' a projeção de A pela reta r . Use de referência a figura abaixo.

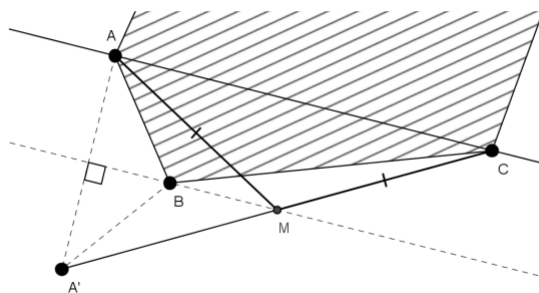


Figura 5: Polígono equilátero. *Imagem disponibilizada em [1]*

Por construção, os segmentos $A'B$ e AB possuem o mesmo comprimento. Agora note que se trocarmos B por um ponto M qualquer da reta r , teremos um novo polígono de mesma área, pois o triângulo

ACM possui a mesma altura relativa à base AC do que o triângulo ACB , porém o perímetro poderá ser diferente. Dentre todas as escolhas para M , vamos escolher aquela que minimize a soma $|A'M| + |MC|$, o que significa minimizar a soma dos comprimentos dos lados consecutivos mantendo a mesma área, já que $|A'M| = |AM|$.

Uma vez que a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, temos que o ponto M deve estar sobre o segmento $A'C$. Mostraremos que esse ponto é, na verdade o ponto médio deste segmento e, sendo assim, $A'M = MC$, ou ainda, $|AM| = |MC|$, de onde concluímos que para reduzir o perímetro devemos ter lados consecutivos de mesmo tamanho. De fato, há dois triângulos semelhantes na figura, a saber os dois triângulos retângulos cujo um dos vértices é A' . Dado que a razão de semelhança do menor para o maior é $1/2$, já que A' foi tomado como sendo o reflexo de A , temos que $\frac{|A'M|}{|AC|} = 1/2$, ou seja, M é de fato o ponto médio do segmento $A'C$. \square

Mais do que equilátero, conseguimos mostrar que o polígono solução do PI é também equiângulo. Antes, porém, vamos enunciar e provar dois lemas abaixo que vão ser úteis na obtenção deste resultado.

Lema 2.2. *Entre todos os triângulos com lados medindo l e m o que tem maior área é o triângulo retângulo de catetos l e m .*

Demonstração. Tome como exemplo o triângulo abaixo, com lados l e m e um ângulo genérico entre eles θ .

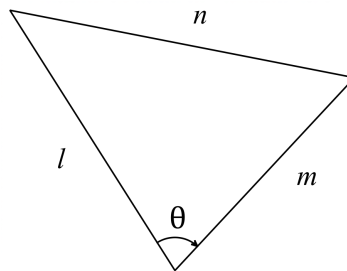


Figura 6: Triângulo com ângulo variável. *Imagem produzida pelo autor através do software FX Draw*

Sabemos da lei dos cossenos que o terceiro lado deve valer

$$n^2 = l^2 + m^2 - 2lm \cos \theta \quad (1)$$

Também podemos determinar a área A do triângulo utilizando a fórmula de Heron

$$A = \sqrt{p(p-l)(p-m)(p-n)} \quad (2)$$

com $p = \frac{l+m+n}{2}$ sendo o semiperímetro. Agora note que para maximizar a área, devemos maximizar o semiperímetro e para tanto devemos maximizar n , o que exige minimizar o termo $-2lm \cos \theta$ que aparece em 1. Para minimizá-lo basta tomar $\theta = 90^\circ$, pois assim o termo irá zerar. \square

Lema 2.3. *Se o segmento PQ é diâmetro de uma circunferência \mathcal{C} e X é um do plano tal que $\angle PXQ = 90^\circ$, então X está sobre \mathcal{C} .*

Demonstração. Considere duas situações: (i) o ponto X está dentro da circunferência e (ii) o ponto X é externo à circunferência. Vamos mostrar que nenhum desses casos é possível que o ângulo $\angle PXQ$ seja reto

(i)

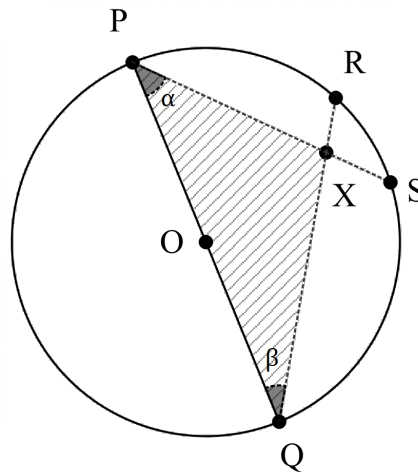


Figura 7: Ponto X dentro da circunferência. *Imagem produzida pelo autor através do software FX Draw*

Se X está dentro e mede 90° , então a soma dos ângulos α e β também é 90° , já que a soma dos ângulos internos no triângulo $\triangle PXQ$ deve ser 180° . Uma vez que o ângulo inscrito é metade do seu arco correspondente, estaríamos dizendo que a soma dos arcos \widehat{PR} e \widehat{SQ} seria 180° , o que claramente não é possível devido à presença do arco \widehat{RS} . A demonstração do outro caso é analoga, devendo lembrar apenas da expressão para um ângulo externo à circunferência. \square

Agora, podemos enunciar e provar o seguinte resultado.

Proposição 2.2. *Se \mathcal{P}_n é um n -ágono que é solução para o PI, então \mathcal{P}_n é regular, ou seja, o polígono solução é equilátero e equiângulo.*

Demonstração. Para provar este enunciado, vamos utilizar a outra versão do PI, ou seja, vamos manter o perímetro fixo e procurar cercar a maior área possível, dado um número de lados. Vamos dividir em dois casos.

Caso 1: $n = 2k$

Considere P e Q dois vértices opostos de \mathcal{P}_n . Logo há $k - 1$ vértices entre os dois pontos, tanto em uma direção quanto na outra. Seja r a reta que passa por P e Q . Esta reta necessariamente divide o polígono em duas áreas iguais. Para enxergar isso, vamos primeiro notar que o polígono é equilátero, fato que já foi provado na proposição anterior. Agora, se as regiões tiverem áreas diferentes, basta refletir aquela de maior área e teremos um novo polígono, de mesmo perímetro, mas com área maior, configurando um absurdo já que supomos que \mathcal{P}_n é solução para o PI.

Vamos mostrar que para qualquer vértice X do polígono, o ângulo $\angle PXQ$ vale 90° , o que significa, pelo Lema 2.3 que todos os vértices do polígono estão dispostos em uma circunferência e, portanto, ele é regular.

Denote por \mathcal{Q} o $(k+1)$ -ágono que corresponde a parte de \mathcal{P}_n que contém o vértice X . Veja a figura abaixo.

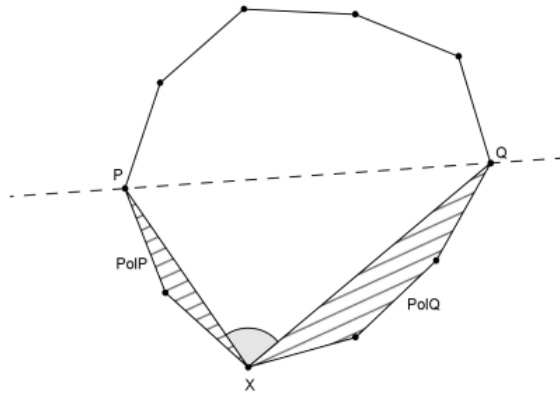


Figura 8: Polígono equiângulo. *Imagem disponibilizada em [1]*

Em termos de área temos a seguinte relação.

$$A(Q) = A(PolP) + A(PolQ) + A(\triangle PXQ) \quad (3)$$

Pensando nos dois polígonos, $PolP$ e $PolQ$, como rígidos, vamos mover o ponto Q ao longo da reta r carregando o polígono $PolQ$ sobre o segmento XQ . Note que esse movimento não altera o perímetro de Q , nem as áreas dos polígonos $PolQ$ e $PolP$. Portanto, vamos posicionar Q de forma que o ângulo $\angle PXQ$ meça 90° , o que irá maximizar a área do triângulo $\triangle PXQ$ pelo Lema 2.2, e conseqüentemente maximizaremos a área de Q .

Tomando um novo polígono \mathcal{R} que é a união de Q com seu reflexo sobre a reta r , temos que a área de \mathcal{R} é maior ou igual a área de \mathcal{P}_n , o que é um absurdo já que estamos supondo \mathcal{P}_n solução do PI. Logo, \mathcal{P}_n é regular.

Caso 2: $n = 2k + 1$

Considere Q_{2n} o polígono regular de $2n$ lados que sabemos ser solução do PI para $2n$ -ágonos. Ligue n vértices de Q_{2n} , pulando um a cada passo, para formar outro polígono regular: Q_n , conforme mostra a figura abaixo.

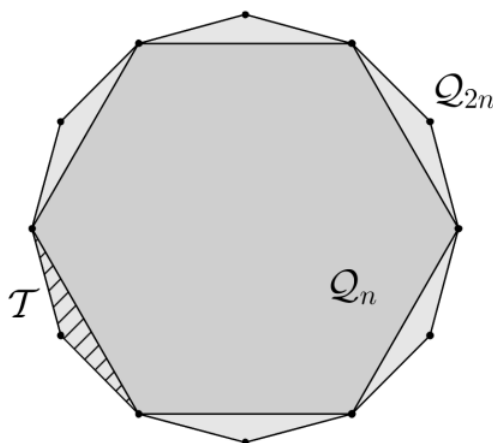


Figura 9: Polígono equiângulo II. *Imagem disponibilizada em [1]*

Seja \mathcal{T} um dos triângulos que é formado pelos lados de \mathcal{Q}_{2n} e \mathcal{Q}_n . Seja também \mathcal{P}_n o polígono solução do PI para n -ágonos. Colando sobre cada lado de \mathcal{P}_n um triângulo \mathcal{T} , obtemos um polígono de $2n$ lados, \mathcal{P}_{2n} . É necessário que \mathcal{P}_{2n} seja congruente \mathcal{Q}_{2n} , pois senão teríamos uma contradição do primeiro caso, dado que o polígono regular de $2n$ lados com perímetro fixo é único. Mas se $\mathcal{P}_{2n} \equiv \mathcal{Q}_{2n}$, então $\mathcal{P}_n \equiv \mathcal{Q}_n$. \square

Vamos experimentar agora variar o número de lados. Não é difícil ver que, dado um perímetro fixo, ao aumentarmos o número de lados n do polígono regular, aumentamos também sua área. Sendo assim, vamos provar a proposição abaixo.

Proposição 2.3. *A função $A(n)$ = área do n -ágono regular de perímetro L é uma função crescente.*

Demonstração. Primeiro, note que um polígono regular de n lados pode ser dividido em n triângulos isósceles congruentes entre si, com base medindo L/n e ângulo oposto a base medindo $2\pi/n$. Seja h_n a medida do apótema do polígono, isto é, a altura de um desses triângulos ou se preferir a medida do raio da circunferência inscrita ao polígono. Veja a figura abaixo.

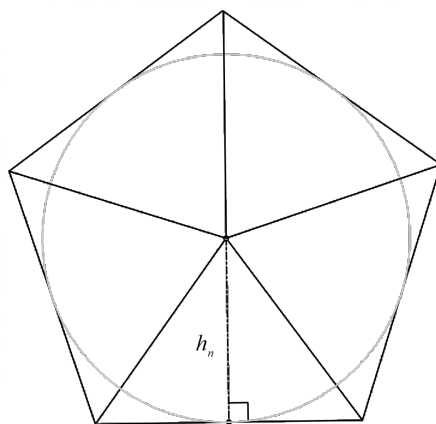


Figura 10: Apótema. Imagem produzida pelo autor através do software FX Draw

A área de cada triângulo isósceles é $\frac{L \cdot h_n}{2n}$. Dessa forma, como dividimos a figura em n triângulos, a expressão para a área do polígono em função do número de lados é

$$A(n) = \frac{L \cdot h_n}{2} \quad (4)$$

Vamos olhar para um desses triângulos para encontrarmos uma expressão para h_n que dependa somente do número de lados do polígono e do perímetro L .

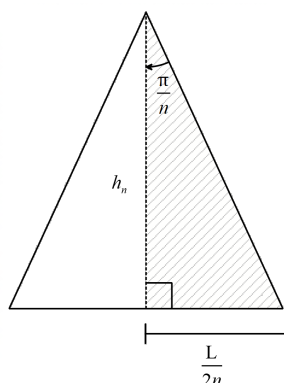


Figura 11: Apótema. Imagem produzida pelo autor através do software FX Draw

Temos que

$$\tan(\pi/n) = \frac{L}{2n \cdot h_n} \quad (5)$$

$$\Rightarrow h_n = \frac{L \cot(\pi/n)}{2n} \quad (6)$$

Substituindo 6 em 4, encontramos que

$$A(n) = \frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n} \quad (7)$$

□

A relação 7 é uma função crescente em n , isto é, conforme o número de lados aumenta, também aumenta o valor da área.

Desta proposição seguem dois corolários.

Corolário 2.1 (Desigualdade isoperimétrica para polígonos). *Vale a seguinte igualdade para qualquer polígono \mathcal{P} de perímetro L e número de lados $n \geq 3$,*

$$A(\mathcal{P}) \leq \frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n} \leq \frac{L^2}{4\pi} \quad (8)$$

Demonstração. Dado um polígono qualquer \mathcal{P} , de perímetro L , para qualquer número de lados n sabemos que o polígono de maior área é o regular. Logo vale que

$$A(\mathcal{P}) \leq \frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n} \quad (9)$$

Porém, como a área do polígono regular é uma função crescente no número de lados, temos que

$$\frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n} = \frac{L^2}{4\pi} \quad (10)$$

□

Corolário 2.2. *Seja α uma curva plana fechada simples retificável de comprimento L que delimita uma região de área A e seja $\epsilon > 0$. Existe um polígono \mathcal{P}' de perímetro L' e área A' , tal que $|L - L'| < \epsilon$ e $|A - A'| < \epsilon$.*

Vamos concluir com a desigualdade isoperimétrica para curvas em gerais.

Teorema 2.1 (Desigualdade isoperimétrica para curvas). *Seja \mathcal{C} uma curva fechada simples retificável de comprimento L que engloba uma região de área A . Então*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \quad (11)$$

E, se \mathcal{C} for um círculo vale a igualdade.

Demonstração. Vamos observar primeiro que o círculo de perímetro L possui área maior do que qualquer polígono regular de mesmo perímetro. Isso por que a área do círculo é dada por $\frac{L^2}{4\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n}$.

Dado $\epsilon > 0$, seja \mathcal{P}' o polígono que aproxima a curva retificável acima, conforme o corolário 2.2. Vale que

$$A \leq A' + \epsilon \quad (12)$$

$$\Rightarrow 4\pi A \leq 4\pi A' + 4\pi\epsilon \quad (13)$$

Utilizando a desigualdade isoperimétrica para polígonos na última desigualdade, temos

$$4\pi A' + 4\pi\epsilon \leq L'^2 + 4\pi\epsilon \quad (14)$$

$$\leq (L + \epsilon)^2 + 4\pi\epsilon \quad (15)$$

$$= L^2 + \epsilon(2L + 4\pi + \epsilon) \quad (16)$$

Tomando o limite para $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $4\pi A \leq L^2$. □

Desenvolvemos até aqui uma solução geométrica para o problema isoperimétrico. Queremos utilizar recursos da teoria de Fourier para mostrar uma solução alternativa mais elegante. Antes, porém vamos passar pelos principais pontos da teoria de Fourier.

3 Elementos da Teoria de Fourier

3.1 Vida e obra de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier, nascido em 21 de março de 1768 em Auxerre, na França, e falecido em 16 de maio de 1830 foi um matemático e físico francês conhecido principalmente pela sua contribuição à análise matemática do fluxo do calor, problema que o motivou a investigar a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas que, posteriormente, levaram o seu nome.



Figura 12: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830). Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Joseph_Fourier

Treinado para ser sacerdote, Fourier não fez seus votos religiosos e em 1790 tornou-se professor de matemática na escola militar de Auxerre (onde já havia estudado). Em 1793, seduzido pelos ideais republicanos, envolveu-se na política e juntou-se ao Comitê Revolucionário de Auxerre. Fourier tentou se demitir do comitê depois do terror gerado pela Revolução Francesa, porém já estava envolvido demais nos assuntos políticos, e acabou sendo preso em julho de 1794. Ao final daquele ano, ele é libertado por uma mudança no cenário político, e acaba ingressando na Escola Normal de Paris, como aluno dos maiores físicos-matemáticos da época: Joseph-Louis de Lagrange, Pierre Simon Laplace e Gaspard Monge.

Em 1798, juntou-se a Napoleão na sua expedição ao Egito. Em 1801, depois das vitórias inglesas e resultante capitulação francesa, Fourier voltou à França e foi nomeado prefeito de Isère, tendo mais

tarde sido nomeado como prefeito de Grenoble, por Napoleão. Foi nesse período que Fourier desenvolveu a maior parte do seu trabalho sobre propagação do calor, e em 1822 escreveu *Theorie analytique de la chaleur* (Teoria analítica do calor), um marco na física-matemática e uma obra que abre espaço para a área da análise de Fourier. No entanto, o trabalho sofreu muitas críticas de Laplace e Lagrange, devido a uma simplificação excessiva e pouco rigorosa. Fourier aprimorou seu trabalho com os anos, e posteriormente seu estudo ganhou contribuições de notáveis matemáticos como Johann Dirichlet, François Budan de Boislaurent e Jacques Charles François Sturm.

A análise de Fourier é uma das técnicas matemáticas com maior número de aplicações práticas hoje em dia. Além de ser utilizada extensivamente em cálculo numérico nas áreas mais diversas das ciências aplicadas e engenharias, a análise de Fourier constitui ainda a base do processamento de sinais. Tem por isso um papel central nas telecomunicações modernas e também no processamento de imagens digitais. Como curiosidades: é utilizando análise de Fourier que se retira a voz das canções para fazer karaoke e também que se faz a compressão de imagens em formato JPEG.

3.2 Funções periódicas

É comum se deparar com funções definidas no conjunto dos reais \mathbb{R} , mas que se repetem com determinada periodicidade. Tais funções são chamadas de periódicas. A seguir encontra-se uma definição mais formal deste conceito.

Definição 3.1. *Uma função f possui período $T > 0$, se T é o menor número real positivo tal que para todos x e $x + T$ pertencentes ao domínio de f , é verdade que $f(x + T) = f(x)$. Uma função com tal propriedade é dita periódica.*

Exemplo 3.1. *As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π . De fato, temos que*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cos(x) = \sin(x) \quad (17)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \cos(2\pi) - \sin(x) \sin(2\pi) = \cos(x) \quad (18)$$

De maneira geral, as funções $\sin(\alpha x)$ e $\cos(\alpha x)$, com $\alpha \neq 0$, são periódicas de período $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Em particular, as funções $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, com $n \in \mathbb{N}$ e $L > 0$, são periódicas de período $\frac{2L}{n}$. Neste caso tem-se $\alpha = \frac{n\pi}{L}$.

Uma estratégia que vai ser importante no estudo das séries de Fourier é "estender" o domínio de uma função definida em um intervalo limitado para todos os reais de forma que ela seja periódica.

Mais precisamente, seja $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos definir $I = [a, b)$ o intervalo no qual ela está compreendida. Se $x \in \mathbb{R}$ e $x \notin I$, seja n o inteiro tal que $x \in I_n = [a + n, b + n)$. Note que existe um único inteiro n tal que $x \in I_n$. Neste caso, definimos a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de maneira que $F(x) = f(x - nT)$. Por construção temos que F é periódica de período T e, além disso, ela é uma extensão do domínio de f para os reais. A figura a seguir ilustra esse processo, em que o pontilhado indica a extensão de f de forma que ela seja periódica.

3.3 Série de Fourier

3.3.1 Coeficientes da série de Fourier

Sejam $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$. Considere a seguinte série trigonométrica

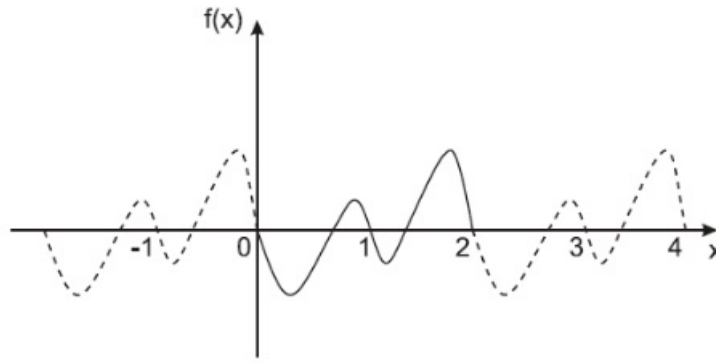


Figura 13: Extensão do domínio da f , de forma a torná-la periódica. Disponível em: <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=53052>

$$F_{2L}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (19)$$

A expressão acima é chamada de **Série de Fourier** da função f se os coeficientes a_0 , a_n e b_n forem dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n \geq 0 \quad (20)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n \geq 1 \quad (21)$$

A igualdade entre a série e a função f só é possível sobre determinadas condições, que serão vistas adiante. Vale destacar que a série acima representa a extensão periódica da função f no intervalo simétrico $[-L, L]$ com período $T = 2L$.

Abaixo encontram-se as relações de ortogonalidade entre $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ que são úteis em diversas ocasiões.

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, m, n \geq 1 \quad (22)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L, m = n \end{cases}, m, n \geq 1 \quad (23)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L, m = n \end{cases}, m, n \geq 1 \quad (24)$$

3.3.2 Existência da série de Fourier

Vimos que a série de Fourier de uma função f é dada por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

. Vamos encontrar condições suficientes para que a série de Fourier esteja bem definida, sem se preocupar se ela converge ou não em um primeiro momento.

Definição 3.2. Uma função f é dita \mathcal{L}^1 se f e $|f|$ forem integráveis.

Proposição 3.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Então, os coeficientes de Fourier dados da forma:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n \geq 1$$

estão bem definidos.

3.3.3 Convergência da série de Fourier

Vamos agora nos preocupar com a convergência da série de Fourier definida em 19. Para isso, vamos introduzir a classe de funções seccionalmente contínuas.

Definição 3.3. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita seccionalmente contínua se possuir um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado.

Em outras palavras, dado $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$, tais que f é contínua em cada intervalo (a_i, a_{i+1}) e existem os limites laterais

$$f(a_i^+) := \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) \text{ e } f(a_i^-) := \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$$

Definição 3.4. Uma função f é dita seccionalmente diferenciável se f e f' forem seccionalmente contínuas.

O teorema a seguir garante quando a série de Fourier de uma função converge pontualmente.

Teorema 3.1 (Teorema de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então, a série de Fourier de f converge para $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ em cada ponto x , isto é,

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

Onde $f(x^+)$ e $f(x^-)$ são os limites laterais de f em x .

Veja [3], capítulos 3.2 e 3.7 para uma demonstração mais detalhada do teorema acima.

No teorema acima cabe uma observação: nos pontos em que f é contínua, a série de Fourier converge exatamente para o valor da função naquele ponto.

Vamos ilustrar os conceitos vistos até aqui, bem como o teorema de Fourier acima, com um exemplo prático.

Exemplo: Considere uma função periódica de período $2L$, dada por $f(x) = x$ para $-L \leq x < L$. Um trecho do gráfico desta função está representado abaixo.

Vamos agora determinar a série de Fourier desta função. Note que ela é seccionalmente diferenciável, ao definir os pontos a_1, a_2, \dots, a_n como seus pontos de descontinuidade. Logo, pelo teorema acima, a série de Fourier irá convergir para o valor da função nos pontos em que ela é contínua. Assim, o gráfico da

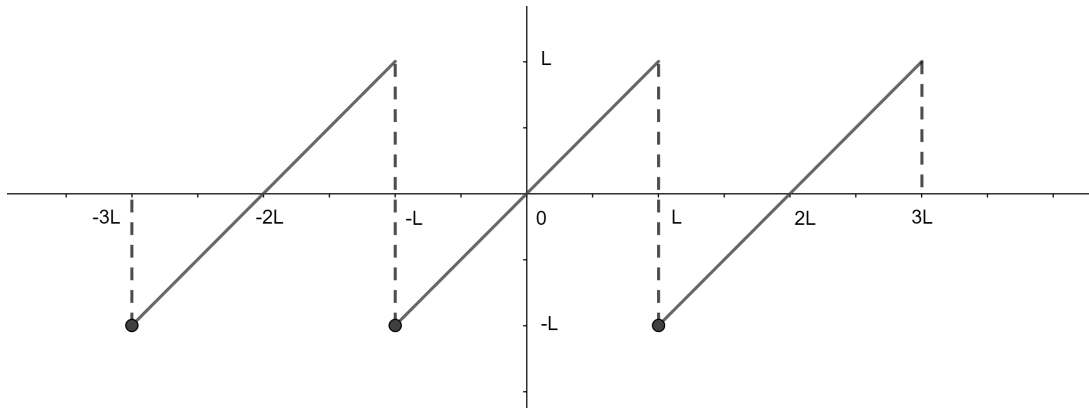


Figura 14: Gráfico da função periódica $f(x) = x$ para $-L \leq x < L$. Imagem produzida pelo autor através do software Geogebra.

série de Fourier de f será semelhante ao da função, com exceção dos pontos de descontinuidade, onde a série assume o valor nulo, em virtude dos limites laterais serem $-L$ e L .

Como f é ímpar, os coeficiente a_n serão nulos para $n = 0, 1, 2, \dots$ e teremos uma série de senos com coeficientes b_n dados por $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx$. Integrando por partes, obtemos que $b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}$.

Podemos escrever a série de Fourier de f da seguinte forma:

$$F[f](x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (25)$$

A seguir, podemos ver as quatro primeiras reduzidas para a série de Fourier mostrando claramente o refinamento que se obtém ao se tomar reduzidas de ordem cada vez maior. Podemos também observar o fato de que a série converge para 0 nos pontos de descontinuidade.

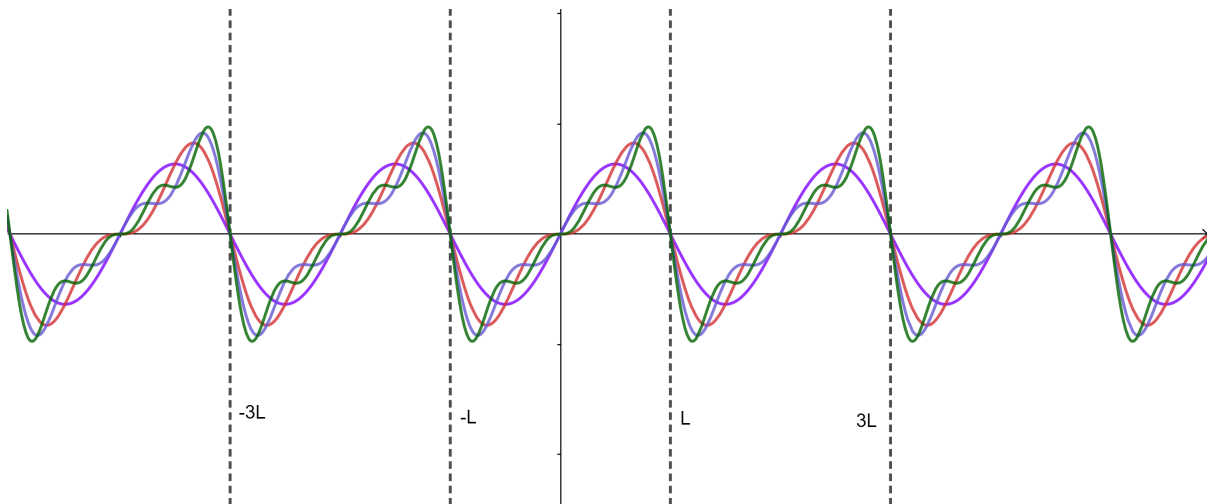


Figura 15: Gráfico das quatro primeiras reduzidas da função f . Imagem produzida pelo autor através do software Geogebra.

Os coeficientes de Fourier satisfazem a chamada *Desigualdade de Bessel*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx \quad (26)$$

Outros dois importantes conceitos de convergência são o de convergência em média e convergência uniforme.

Definição 3.5. Dizemos que uma sequência de funções $\phi_N(x)$, definidas em $[-L, L]$ converge em média para $f(x)$, definida no mesmo intervalo, se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \phi_N\| = 0 \quad (27)$$

$$\text{em que } \|f - \phi_N\|^2 = \int_{-L}^L [f(x) - \phi_N(x)]^2 dx.$$

Teorema 3.2 (Identidade de Parseval). Uma condição necessária e suficiente para a série de Fourier convergir em média para $f(x)$ é valer a seguinte identidade:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx \quad (28)$$

Um conceito mais forte do que o de convergência em média é o de convergência uniforme, conforme abaixo.

Definição 3.6. Dizemos que uma sequência ϕ_N de funções converge uniformemente para uma função $f(x)$ no intervalo $[-L, L]$, se para qualquer $\epsilon > 0$ existir M tal que para todo $N > M$ e $x \in [-L, L]$

$$|f(x) - \phi_N(x)| < \epsilon \quad (29)$$

Proposição 3.2. A convergência uniforme de uma sequência de funções $\phi_N(x)$ para uma função $f(x)$ definida em um intervalo $[\alpha, \beta]$ implica em sua convergência em média.

Demonstração. De fato, dado $\epsilon > 0$, se temos $|f(x) - \phi_N(x)| < \epsilon$ para $N > M$ e todo $x \in [\alpha, \beta]$, então

$$\|\phi_N - f\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} [\phi_N(x) - f(x)]^2 dx < \epsilon^2 \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} dx = \epsilon^2(\beta - \alpha) = \epsilon' \quad (30)$$

□

Teorema 3.3. Seja $f(x)$ uma função contínua em $[-L, L]$, tal que $f(-L) = f(L)$ e seja $f'(x)$ contínua por partes em $[-L, L]$. Então a série de Fourier de f converge absoluta e uniformemente para $f(x)$, para $x \in [-L, L]$.

Para uma visão mais detalhada da convergência em média e da convergência uniforme de uma série de Fourier, recomendamos a leitura do capítulo 1.4 da referência [2].

3.3.4 Série de Fourier em intervalos arbitrários

Até agora consideramos a série de Fourier para uma função definida em $[-L, L]$. Agora vamos adaptar a definição para obter a expressão da série em um intervalo arbitrário $[\alpha, \beta]$.

Primeiro, vamos fazer uma transformação de variáveis que leva o intervalo arbitrário $[\alpha, \beta]$, na variável x , no intervalo em que conhecemos a expressão para a série: $[-L, L]$, na variável t . Mais precisamente queremos uma transformação afim $t(x)$ de tal forma que

$$t(\alpha) = -L \quad (31)$$

$$t(\beta) = L \quad (32)$$

Resolvendo um sistema simples obtemos que a transformação adequada é

$$t(x) = \frac{L(2x - \beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \quad (33)$$

Considere uma função ϕ de tal forma que $\phi(t) = \phi\left(\frac{L(2x - \beta - \alpha)}{\beta - \alpha}\right) = f(x)$. Já sabemos escrever a série de Fourier para ϕ , $F_{2L}[\phi](t)$, já que a variável t varia entre $[-L, L]$. Temos que:

$$F_{2L}[\phi](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] \quad (34)$$

Fazendo a mudança de variável definida em 33, obtemos o seguinte resultado para a série de Fourier de f no intervalo arbitrário $[\alpha, \beta]$:

$$F_{\beta-\alpha}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi(2x - \beta - \alpha)}{\beta - \alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi(2x - \beta - \alpha)}{\beta - \alpha}\right) \right] \quad (35)$$

Em que definimos $F_{\beta-\alpha}[f](x) = F_{2L}[\phi](t)$. Substituindo a transformação 33 na expressão para os coeficientes em 20, na variável t , e fazendo algumas manipulações, obtemos as seguintes relações:

$$a_0 = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (36)$$

$$a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) dx \quad (37)$$

$$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) dx \quad (38)$$

3.3.5 Forma complexa da série de Fourier

Podemos utilizar as seguintes relações de Euler para escrever a série de Fourier em sua forma complexa

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (39)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (40)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (41)$$

Dessa forma, a série de Fourier na forma complexa de uma função f é

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad (42)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \quad (43)$$

3.3.6 Diferenciação e integração da série de Fourier

Teorema 3.4. *Seja $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(\alpha) = f(\beta)$ e seja $f'(x)$ contínua por partes e com derivadas laterais em $[\alpha, \beta]$. Então, os coeficientes da série de Fourier de f' , que converge, podem ser obtidos a partir da série de Fourier de f derivando termo a termo esta série.*

Teorema 3.5. *Seja f uma função contínua por partes em $[\alpha, \beta]$. Então, independentemente da série de Fourier de f convergir ou não, podemos integrá-la, termo a termo, de α até $x \in [\alpha, \beta]$.*

Para o leitor mais interessado, recomendamos o capítulo 1.5 da referência [2], que trata da integração e diferenciação de uma série de Fourier.

4 Solução do PI via séries de Fourier

4.1 Pré-requisitos de geometria de curvas

Uma referência clássica para o estudo de curvas é o livro do Manfredo do Carmo [5], em que há o aprofundamento dos conceitos tratados neste capítulo que foram simplificados para nosso propósito.

Definição 4.1. *Dizemos que uma função é de classe C^m , com $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ quando ela possui derivadas contínuas até a ordem m . Dizer que uma função é C^m por partes significa que conseguimos dividir o seu domínio de definição em uma quantidade finita de subintervalos onde ela é C^m , em cada um.*

Chamamos de *curva parametrizada* uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado, por exemplo $[a, b]$. Se subdividirmos o intervalo em m pontos da seguinte forma: $\{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ e ligarmos os pontos $\alpha(t_{i-1}) = (x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ e $\alpha(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ obteremos a linha poligonal denotada por $(\alpha, \{t_i\})$. Veja na figura abaixo um exemplo de linha poligonal.



Figura 16: Linha poligonal de uma curva para uma dada partição. Imagem disponibilizada em [1].

O comprimento da linha poligonal $(\alpha, \{t_i\})$ é dado por $L(\alpha, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$, onde $\|\cdot\|$

denota a norma euclidiana dada por $\|\alpha(t)\| = \|(x(t), y(t))\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.

Definição 4.2. *Uma curva α é dita retificável quando o supremo dos comprimentos de todas as linhas poligonais obtidas das partições do intervalo $[a, b]$ existir e for finito.*

Quando $x(t)$ e $y(t)$ forem C^m por partes diremos que a curva $\alpha(t)$ também é C^m por partes. Se α for C^1 por exemplo, ela admite nos pontos de diferenciabilidade o vetor velocidade dado por

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \tag{44}$$

Proposição 4.1. O comprimento de uma curva no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (45)$$

O traço da curva α é o seu desenho no plano, ou seja, é a imagem $\alpha(I) = \{\alpha(t) | t \in I\}$. É comum chamar o traço da curva simplesmente por curva.

Proposição 4.2. O comprimento de uma curva independe de sua parametrização.

Definição 4.3. Uma curva suave α é dita regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Uma propriedade bastante importante das curvas regulares é a seguinte.

Proposição 4.3. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular no intervalo $[a, b]$. Então existe $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular tal que α e β possuem o mesmo traço em \mathbb{R}^2 e β satisfaz $\|\beta'(t)\| = 1$ para qualquer que seja $t \in [a, b]$.

Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com o vetor tangente satisfazendo $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, é dita *parametrizada pelo comprimento de arco*, ou abreviadamente é dita uma curva p.c.a. Conforme a proposição acima, todas as curvas regulares admitem uma parametrização p.c.a.

O vetor tangente à curva α , em cada ponto t , é dado por $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. Note que se a curva for p.c.a este vetor é sempre unitário. Agora queremos definir um campo de vetores ortogonais à curva α em cada ponto, que será dado por

$$N(t) := N(\alpha(t)) = (-y'(t), x'(t)) \quad (46)$$

Note que o produto escalar $\langle N(t), \alpha'(t) \rangle$ é nulo, indicando que os vetores do campo são de fato ortogonais. Observe que $\|N(t)\| = \|\alpha'(t)\| = 1$, i.e, os vetores ortogonais também são unitários.

Considerando uma curva α p.c.a de classe C^2 , a derivada do campo normal é dada por

$$N'(t) = (-y''(t), x''(t)) \quad (47)$$

Como a curva é p.c.a sabemos que $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ e derivando esta última relação com respeito a t , obtemos que

$$x''(t)x'(t) + y''(t)y'(t) = 0 \quad (48)$$

Logo, $N'(t)$ é ortogonal a $N(t)$, que por sua vez é ortogonal a $\alpha'(t)$. Já que no plano há somente duas dimensões, concluímos que $N'(t)$ é paralelo a $\alpha'(t)$, de forma que existe uma constante k (que depende de t) tal que

$$N'(t) = -k(t)\alpha'(t) \quad (49)$$

Abrindo em termos de coordenadas, a relação acima é equivalente às duas seguintes condições

$$x''(t) = -k(t)y'(t) \quad (50)$$

$$y''(t) = k(t)x'(t) \quad (51)$$

A constante $k(t)$ é chamada de curvatura de α em $\alpha(t)$. Há algumas observações relevantes a respeito desta constante. Observe que na equação 49, em termos de norma, temos que $\|N'(t)\| = |k(t)|$, uma vez que $\|\alpha'(t)\| = 1$, ou seja, a constante $k(t)$ mede, a menos de um sinal, o comprimento de $N'(t)$, e portanto mede o quanto $N(t)$ varia com t . Se uma curva tem curvatura constante igual a zero, isso significa que $N'(t) = 0$, o que implica em $N(t)$ constante, isto é, a curva α deve ser uma reta. Assim, a curvatura $k(t)$ mede o quanto uma curva deixa de ser uma reta.

Definição 4.4. Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita fechada e simples, ou simplesmente curva de Jordan, se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e se ela é injetiva em $[a, b]$. Uma curva de Jordan delimita uma região D do plano. Ao parametrizá-la costumamos orientá-la no sentido anti-horário, de forma que quem caminhe sobre a curva no sentido positivo de t tenha D sempre à sua esquerda.

Pode-se mostrar que se α é regular, com esta orientação, tem-se que $-N(t) = (y'(t), -x'(t))$ é o campo normal exterior a D . Esta é a orientação adequada utilizada no Teorema da Divergência que relaciona a área de D com seu bordo ∂D . Veja abaixo um exemplo de curva de Jordan.

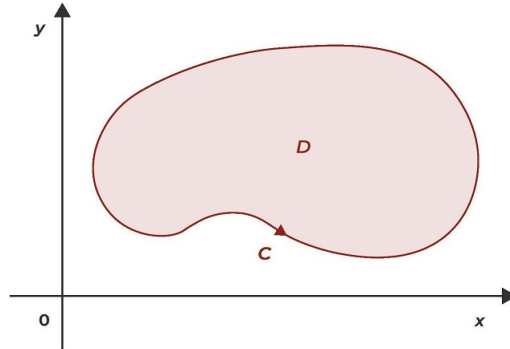


Figura 17: Curva fechada e simples com orientação positiva. Disponível em: <https://brainly.com.br/tarefa/55228145>

4.2 Pré-requisitos de Cálculo

Definição 4.5. Um campo vetorial V em $\Omega \in \mathbb{R}^2$ é uma função que a cada ponto $p = (x, y) \in \Omega$ associa um vetor $V(p) = (X(p), Y(p))$ em \mathbb{R}^2 , em que X e Y são funções de Ω em \mathbb{R} . O campo V é dito diferenciável quando X e Y forem diferenciáveis.

Definição 4.6. O gradiente de uma função $f : \Omega \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é o vetor denotado por ∇f e definido como

$$\nabla f = \left(\frac{\partial X}{\partial x}(p), \frac{\partial Y}{\partial y}(p) \right) \quad (52)$$

Definição 4.7. Se V é um campo de vetores em $\Omega \in \mathbb{R}^2$ dado por $V(p) = (X(p), Y(p))$, o divergente de V é definido como

$$\text{div}V(p) = \frac{\partial X}{\partial x}(p) + \frac{\partial Y}{\partial y}(p) \quad (53)$$

Definição 4.8. Se $f : \Omega \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , então o seu laplaciano, denotado por Δf , é dado por

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (54)$$

Teorema 4.1 (Teorema de Green ou Teorema da Divergência no plano). Seja $\Omega \in \mathbb{R}^2$ um domínio limitado de fronteira suave $\partial\Omega$. Se V é um campo vetorial diferenciável com derivada contínua em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$, então

$$\int_{\Omega} \text{div}V dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle V, n \rangle ds \quad (55)$$

em que n indica o campo de vetores unitários ortogonais a C e ds é o elemento de comprimento de curva.

Relembrando, uma integral de linha na curva C é calculada da seguinte forma: se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização da curva C e $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ é a função a ser integrada, então

$$\int_C g(s) ds = \int_a^b g(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \quad (56)$$

Note que esta é uma integral de uma função de uma variável.

Uma consequência do teorema 4.1 é que a área de uma região Ω delimitada pela curva de Jordan C retificável pode ser calculada via integral de linha com relação a x e y da seguinte forma:

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx \quad (57)$$

Demonstração. Por um lado temos que

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx dy \quad (58)$$

Se $V(x, y)$ é o campo dado por $V(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, temos que $\text{div}V(x, y) = 1$. Utilizando o Teorema da Divergência no plano, temos que:

$$\int_{\Omega} \text{div}V dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle V, n \rangle ds \quad (59)$$

Vamos parametrizar $\partial\Omega$ por uma curva regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, que supomos ser p.c.a, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, orientada no sentido positivo. Neste caso temos que o lado direito em 59 é dado por:

$$\int_a^b \langle V(x(t), y(t)), -N(t) \rangle dt = \int_a^b \left\langle \left(\frac{x(t)}{2}, \frac{y(t)}{2}\right), (y'(t), -x'(t)) \right\rangle dt \quad (60)$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx \quad (61)$$

Utilizando integração por partes, podemos mostrar que

$$\frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \int_C x dy = - \int_C y dx \quad (62)$$

4.3 Solução do PI

Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua de classe C^1 por partes e tal que $f(0) = f(1)$. A identidade de Parseval neste caso fica:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \int_0^1 |f(x)|^2 dx \quad (63)$$

e pelo capítulo 3.3.4, os coeficientes são dados por

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx \quad (64)$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2n\pi x) dx \quad (65)$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2n\pi x) dx \quad (66)$$

e a série de Fourier dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)] \quad (67)$$

Além disso, se g é uma função assim como f definida acima, sejam a_n e b_n os coeficientes de Fourier da função f , e c_n e d_n os coeficientes de Fourier de g , então:

$$\frac{a_0 b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) = 2 \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (68)$$

É possível demonstrar a relação acima usando a Identidade de Parseval para a soma $f + g$.

Agora estamos aptos para provar de fato a solução do PI usando a teoria de Fourier. Seja C uma curva fechada simples de classe C^1 por partes de comprimento L que engloba uma área A . Considere uma parametrização $\bar{\alpha}$ de C por comprimento de arco, isto é, $\bar{\alpha}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ e $\bar{x}'(t)^2 + \bar{y}'(t)^2 = 1$, sempre que $\bar{x}'(t)$ e $\bar{y}'(t)$ estiverem bem definidas. Podemos reparametrizar C com funções x e y definidas em $[0, 1]$ e dadas por $x(t) = \bar{x}(Lt)$ e $y(t) = \bar{y}(Lt)$. Assim, $x'(t)^2 + y'(t)^2 = L^2$ para $t \in [0, 1]$.

Usando o teorema de Fourier para x e y , obtemos as seguintes expressões:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\pi t) + b_n \sin(2n\pi t)) \quad (69)$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(2n\pi x) + d_n \sin(2n\pi x)) \quad (70)$$

Derivando as expressões acima obtemos:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(-a_n \sin(2n\pi t) + b_n \cos(2n\pi t)) \quad (71)$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(-c_n \sin(2n\pi t) + d_n \cos(2n\pi t)) \quad (72)$$

Aplicando a Identidade de Parseval nas funções $x'(t)$ e $y'(t)$ definidas acima, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2(a_n^2 + b_n^2) = 2 \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \quad (73)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2(c_n^2 + d_n^2) = 2 \int_0^1 |y'(t)|^2 dt \quad (74)$$

E somando as duas igualdades teremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\pi^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = \int_0^1 |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 dt = L^2 \quad (75)$$

Conforme 62, a área da região englobada por C é dada por $A = \int_0^1 x(t)y'(t)dt$, e pelo 68 temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\pi(a_n d_n - b_n c_n) \quad (76)$$

Vamos obter uma expressão, em termos das relações acima, da diferença $L^2 - 4\pi A$, que nos levará à desigualdade isoperimétrica já provada anteriormente. Logo,

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n)^2 + (nb_n)^2 + (nc_n)^2 + (nd_n)^2 - 2na_n d_n + 2nb_n c_n] \quad (77)$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2 - 1) + d_n^2(n^2 - 1)] \geq 0 \quad (78)$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ para todo $n > 1$ e $b_1 = -c_1 = c$ e $a_1 = d_1 = d$, ou seja,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + d \cos(2\pi t) - c \sin(2\pi t) \quad (79)$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + c \cos(2\pi t) + d \sin(2\pi t) \quad (80)$$

que corresponde à parametrização de um círculo de raio $\sqrt{c^2 + d^2}$ e centro $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right)$. De fato das equações 79 e 80, obtemos:

$$\left(x(t) - \frac{a_0}{2}\right)^2 = d^2 \cos^2(2\pi t) - 2cd \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) + c^2 \sin^2(2\pi t) \quad (81)$$

$$\left(y(t) - \frac{c_0}{2}\right)^2 = c^2 \cos^2(2\pi t) + 2cd \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) + d^2 \sin^2(2\pi t) \quad (82)$$

Somando as equações acima, obtemos

$$\left(x(t) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{c_0}{2}\right)^2 = c^2 + d^2 \quad (83)$$

que corresponde ao círculo descrito.

Entretanto, note que fizemos a suposição que C é uma curva de classe C^1 e queremos generalizar o resultado para qualquer curva retificável, pois assim teremos de fato a demonstração do PI no plano, dado que curvas não retificáveis não têm chance de serem solução conforme discutido anteriormente.

Podemos aproveitar o fato de que uma curva retificável pode ser aproximada por curvas de classe C^1 , isto é, dado $\epsilon > 0$, existe \bar{C} , C^1 por partes, de perímetro \bar{L} e área \bar{A} tal que $|L - \bar{L}| < \epsilon$ e $|A - \bar{A}| < \epsilon$.

Como já provamos a desigualdade isoperimétrica para curvas de classe C^1 , segue que:

$$4\pi A \leq 4\pi A' + 4\pi\epsilon \leq L'^2 + 4\pi\epsilon \quad (84)$$

$$\leq (L + \epsilon)^2 + 4\pi\epsilon \quad (85)$$

$$= L^2 + \epsilon(2L + 4\pi + \epsilon) \quad (86)$$

Tomando o limite para ϵ indo para 0 segue o resultado. \square

Para dimensões maiores que 2, não existe prova que aproxime a simplicidade das provas existentes para domínios planos. A abordagem mais direta, supondo que as soluções sejam suficientemente diferenciáveis, é utilizar Cálculo de Variações. Como exemplo do problema isoperimétrico, no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , fixada uma área A , queremos encontrar o sólido de maior volume V que tenha a área pré-determinada. Para se aprofundar no problema isoperimétrico em outras superfícies e/ou dimensões maiores, recomendamos a leitura do capítulo 4 da referência [1].

Referências

- [1] TELICHEVESKY, M.; KLASER, P., *O problema isoperimétrico*. 1ª ed. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- [2] VAZ, J.; OLIVEIRA, E. C., *Métodos matemáticos vol. 2*. SP: Editora da Unicamp, 2016.
- [3] DE FIGUEIREDO, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. (Portuguese) [Fourier analysis and partial differential equations] Fifth edition of [MR0654678]. Projeto Euclides [Euclid project] Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Rio de Janeiro, 2018. viii+276 pp. ISBN: 978-85-244-0428-3.
- [4] HOWARDS, H.; HUTCHINGS, M.; MORGAN, F., *The Isoperimetric Problem on surfaces*, The American mathematical monthly.
- [5] CARMO, M. P., *Geometria Diferencial de curvas e superfícies*, 3 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [6] BLASJÖ, V., *The evolution of the Isoperimetric Problem* The American Mathematical Monthly, 2005.
- [7] MERCURI, F.; PEDROSA, R. L., *Uma introdução às desigualdades isoperimétricas*. 19º Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1993.
- [8] FIGUEIREDO, D. G., *Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana*. Revista Matemática Universitária, 1989.
- [9] GROMOV, M., *Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, No 1200, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [10] LIMA, E. L., *Curso de Análise vol 1*. 14ª ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
- [11] BENJAMINI, I.; CAO, J., *A new isoperimetric theorem for surfaces of variable curvature*. Duke Math. Journal 85, 1996.
- [12] BERGER, M., *A panoramic view on Riemannian geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [13] RADÓ, T., *On the problem of Plateau*, *Ergebn. D. Math. u. ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 1933.
- [14] GUIDORIZZI, H. L., *Um Curso de Cálculo vol. 3*. 6ª ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora - Rio de Janeiro, 2019.
- [15] Wikipédia. *Jean Baptiste Joseph Fourier*. Wikipédia - a enciclopédia livre, 2023. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Joseph_Fourier. Acesso em: 19/11/2023.
- [16] Só matemática. *Jean Baptiste Joseph Fourier*. Só matemática, 2023. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/fourier.php>. Acesso em: 19/11/2023.