



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



ANA CAROLINA SANTOS DA SILVA

## **Dispersão populacional de populações que interagem na presença de impacto ambiental**

Campinas  
24/11/2023

ANA CAROLINA SANTOS DA SILVA

**Dispersão populacional de populações que interagem na presença de impacto ambiental\***

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer.

---

\*Este trabalho foi financiado pelo PIBIC/CNPq - UNICAMP, cota de 2022.

## Resumo

Este trabalho consiste na introdução para estudos da dinâmica populacional de duas espécies em interação em um ambiente aquático, escolhido como sendo o lago do Parque Ecológico Prof. Hermógenes de Freitas Leão, com a presença de um poluente tóxico, feita através de equações diferenciais parciais não lineares, com base no modelo de Advecção-Difusão-Reação e de Lotka-Volterra. Como não há solução analítica, uma aproximação numérica é feita usando o método de diferenças finitas na discretização espacial e o método de Crank-Nicolson na discretização temporal.

## Abstract

This project consists in an introduction to the study of the population dynamics of two interacting species in an aquatic environment, chosen to be the lake of the Prof. Hermógenes de Freitas Leão Ecological Park, with the presence of a toxic pollutant, carried out through nonlinear partial differential equations based on the Advection-Diffusion-Reaction and Lotka-Volterra models. Since there is no analytical solution for the problem, a numerical approximation is performed using the finite difference method for spatial discretization and the Crank-Nicolson method for temporal discretization

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Métodos Matemáticos</b>	<b>6</b>
2.1	Evolução populacional . . . . .	7
2.2	Modelagem do poluente . . . . .	8
2.3	Estudo do domínio . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>13</b>
<b>A</b>	<b>Algoritmo Implementado em Octave</b>	<b>15</b>
<b>B</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>28</b>

# 1 Introdução

O estudo de sistemas não-lineares de equações diferenciais ordinárias (EDOs) permitem deduzir que grande parte das situações de convívio de espécies competitivas naturais acontecem por um modo relativamente instável, já que, se existir alguma modificação, que se dá por origens diversas, como é o caso da presença de uma pluma poluente em um ambiente aquático, o equilíbrio de convívio das espécies é fortemente afetado, sendo que cada espécie sofre com graus de impacto diferentes, gerando um desequilíbrio no ecossistema em que elas estão envolvidas.

Isto leva à dedução de que, ao se desenvolver esforços para a recuperação da biota em áreas atingidas, ou, até mesmo, no planejamento de recuperação da fauna e flora em áreas que venham a ser impactadas de modo significativo, é extremamente necessário propor modelos computacionais e gerar cenários de possíveis desfechos para o ecossistema. Tornando-se, então, uma prioridade para se estabelecerem medidas de prevenção, conservação, ou, até mesmo, introdução de espécies no domínio estudado, sejam essas nativas ou exóticas.

O modelo adotado neste trabalho foi feito por meio de sistemas de equações diferenciais não-lineares do tipo de Lotka-Volterra, por conta da dinâmica entre as espécies estudadas ser interespecífica, acoplado às equações de Difusão-Advecção-Reação para a pluma poluente em um ambiente aquático. Quanto às condições de contorno, foram usadas, conforme a região da fronteira do domínio em estudo, as condições de Von Neumann-homogêneas, sendo que a condição inicial levou em consideração uma distribuição homogênea das espécies em interação, bem como a origem do impacto ambiental, considerando ser um descarte regular de poluente ou um acidente eventual.

## 2 Métodos Matemáticos

Para que este trabalho fosse realizado de uma maneira efetiva e muito similar ao real, foi necessário fazer, primeiramente, uma dinâmica interativa de populações, isto é, estudar as variações populacionais e procurar entender as causas nas espécies afetadas.

Para a dinâmica de populações das espécies, foi considerado o sistema de equações de competição interespecífica, ou seja, espécies diferentes competindo pelos mes-

mos recursos do meio, além da modelagem dos movimentos de dispersão e migração populacionais destas espécies, ambas de tipo Lotka-Volterra. Ainda, para incluir a capacidade de suporte do meio, fez-se necessário utilizar uma equação do tipo Advecção-Difusão-Reação, devido à uma analogia entre o movimento aleatório de moléculas e do movimento de seres vivos, em conjunto com a equação do tipo Lotka-Volterra.

## 2.1 Evolução populacional

Para descrever a evolução das populações, foi necessário considerar quatro pontos essenciais: dispersão populacional, processos migratórios, mortalidade induzida e capacidade de suporte. Portanto, analisando uma população descrita por  $p(x, y, t)$ , temos que:

- A dispersão populacional representa a distribuição dos indivíduos da espécie no meio, dada matematicamente por  $\alpha \nabla^2 p$ , onde  $\alpha$  é o coeficiente da dispersão populacional da espécie  $p$ .
- Os processos migratórios representam o deslocamento da população, são dados pelo termo  $\vec{V} \cdot \nabla p$ , sendo que  $\vec{V}$  é a velocidade de migração da espécie  $p$ .
- A mortalidade induzida é efeito do material tóxico introduzido no meio no qual ela está ambientada e matematicamente é descrita pelo termo  $\mu p$ , onde  $\mu$  é a taxa em que esse fenômeno ocorre.
- A inclusão da capacidade de suporte é descrita por Verhulst: o crescimento da população tem uma predisposição natural para sofrer inibição, tendendo sempre a um valor limite ao longo do tempo. Ela pode ser expressa por:  $\lambda p(1 - \frac{p}{K})$ , onde  $\lambda$  é a taxa de crescimento da população  $p$  e  $K$  é a capacidade de suporte do meio.

Desse modo, com três espécies  $p, q$  e  $r$  interagindo no meio, foram desenvolvidas as seguintes equações:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_p \nabla^2 p + \vec{V}_p \cdot \nabla p + \mu_p p = \lambda_p \left(1 - \frac{p + \nu_{pq} q}{K}\right) - \beta_{pq} pq \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial p} - \alpha_q \nabla^2 q + \vec{V}_q \cdot \nabla q + \mu_q q = \lambda_q \left(1 - \frac{q + \nu_{qp} p}{K}\right) - \beta_{qp} q p \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \alpha_p \nabla^2 p + \vec{V}_p \cdot \nabla p + \mu_p p = \lambda_p \left(1 - \frac{p + \nu_{pr} r}{K}\right) - \beta_{pr} p r \quad (3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial p} - \alpha_r \nabla^2 r + \vec{V}_r \cdot \nabla r + \mu_r r = \lambda_r \left(1 - \frac{r + \nu_{rp} p}{K}\right) - \beta_{rp} r p \quad (4)$$

$$\frac{\partial r}{\partial q} - \alpha_r \nabla^2 r + \vec{V}_r \cdot \nabla r + \mu_r r = \lambda_r \left(1 - \frac{r + \nu_{rq} q}{K}\right) - \beta_{rq} r q \quad (5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} - \alpha_q \nabla^2 q + \vec{V}_q \cdot \nabla q + \mu_q q = \lambda_q \left(1 - \frac{q + \nu_{qr} r}{K}\right) - \beta_{qr} q r \quad (6)$$

onde  $\nu$  e  $\beta$  são fatores de competição intraespecífica.

Com condições iniciais:

$$p(x, y, 0) = p_0(x, y) \quad (7)$$

$$q(x, y, 0) = q_0(x, y) \quad (8)$$

$$r(x, y, 0) = r_0(x, y) \quad (9)$$

E condições de contorno de Von Neumann homogêneas, ou seja:

$$\left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial \eta} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial \eta} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial r(x, y, t)}{\partial \eta} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (12)$$

## 2.2 Modelagem do poluente

Para estudar a modelagem do poluente no meio que as espécies estão inseridas, ou seja, a simulação do comportamento do poluente, foi utilizada a equação de Difusão-Advecção-Reação, por conta do poluente se tratar de partículas, na forma:



$$\frac{\partial c}{\partial t} - \alpha \nabla^2 c + \vec{V} \cdot \nabla c + \mu c = f(x, y, t) \quad (13)$$

onde  $c = c(x, y, t)$  é a concentração do contaminante,  $\alpha$  é a sua difusibilidade,  $\vec{V}$  é a velocidade de transporte das partículas,  $\mu$  é o decaimento do poluente e  $f$  denota a intensidade da sua fonte, ou seja, do local de origem da contaminação.

Com condição inicial:

$$c(x, y, 0) = c_0(x, y) \quad (14)$$

E condições de contorno de Von Neumann homogêneas, com  $\Gamma$  sendo a fronteira do domínio estudado.

$$\left. \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial \eta} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (15)$$

## 2.3 Estudo do domínio

Ainda, foi necessário fazer a discretização do domínio de estudo, pois, a partir dessa discretização, encontra-se a solução do sistema de equações a partir de métodos numéricos. Desse modo, fez-se a determinação de uma malha quadriculada sobre a imagem de satélite do domínio escolhido para estudo, que, no caso deste trabalho, foi o lago do Parque Ecológico Prof. Hermógenes de Freitas Leão, com localização próxima à UNICAMP. Vale ressaltar que, quanto maior a quantidade de nós na malha, melhor será a discretização do domínio, por isso foi confeccionada uma malha de tamanho 1cmX1cm.

Cada nó da malha quadriculada, para determinar onde se encontrava na vida real, foi identificado com 0, se pertencente ao meio aquático, ou 1, se pertencente ao meio terrestre. Sendo que, cada nó que retornasse 1, ou seja, um ponto pertencente ao meio aquático, foi posteriormente numerado, de 1 a  $un$ , sendo  $un$  o último nó. Assim, foi obtida a discretização do lago que muito se adequou à realidade, como pode ser observado nas figuras 1 e 2.

Cada nó numerado, ou seja, pertencente ao meio aquático, da malha quadriculada foi descrito por meio de informações básicas dos índices de nós que se encontravam à esquerda, à direita, abaixo e acima do ponto estudado e a sua condição de fronteira.

Para determinar a condição de fronteira de cada ponto, além dos nós internos, foi desenvolvida uma matriz de  $nn$  linhas, sendo  $nn$  o número do nó numerado, e 5



Figura 1: Imagem de satélite do domínio. Fonte: Google Maps.

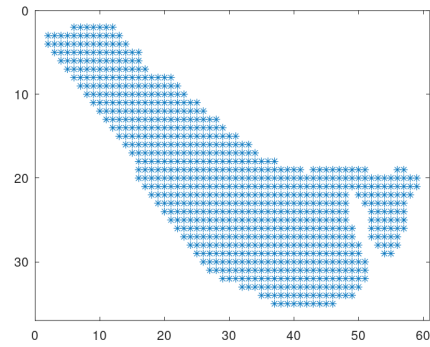


Figura 2: Domínio discretizado através do software *Octave*.

colunas, para, assim, armazenar na  $n$ -ésima linha as informações do nó de índice  $i$ . Foram consideradas 8 possíveis condições de fronteiras, descritas na figura 3.

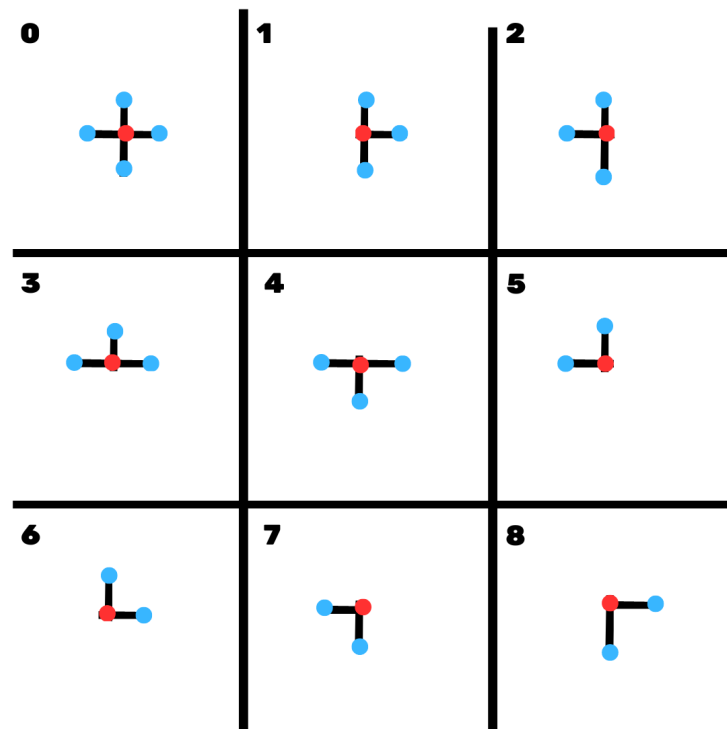


Figura 3: Tabela contendo os índices das fronteiras. O ponto vermelho representa o nó  $i$ , os pontos azuis representam um nó com valor não nulo.

Após o domínio passar pela discretização, foram utilizados os métodos de diferenças finitas, centrado no espaço, e de Crank-Nicolson, centrado no tempo, para analisar numericamente as equações diferenciais nos nós da malha.

Para isso, a aproximação da função  $\phi(x_i, y_j, t_k)$ , sendo analisada no nó  $(x_i, y_j)$

e no instante  $t_k$ , foi baseada nas expressões 16 e 17, capazes de substituir as derivadas parciais na equação.

$$\phi(x_i, y_j, t_k + \frac{\Delta t}{2}) \approx \frac{\phi(x_i, y_j, t_{k+1}) + \phi(x_i, y_j, t_k)}{2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \phi(x_i, y_j, t_k + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t} \approx \frac{\phi(x_i, y_j, t_{k+1}) - \phi(x_i, y_j, t_k)}{\Delta t} \quad (17)$$

Assim, foi obtido um método incondicionalmente estável para resolver numericamente o sistema.

### 3 Resultados

A partir da resolução do sistema pelo método de diferenças finitas, foi possível desenvolver o problema no ambiente computacional, sendo o *Octave* escolhido para essa função, por ser um ambiente facilmente programável com os conceitos matemáticos.

Para isso, como dito anteriormente, foram escolhidas três espécies aquáticas,  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , que interagem de maneira intraespecífica dentro do domínio de estudo, que, neste caso, era a lagoa do Parque Ecológico Prof. Hermógenes de Freitas Leão.

Os parâmetros de cada espécie  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , como visto nas equações 1 a 6, e do poluente  $c$ , como visto na equação 13, foram escolhidos de maneira hipotética, pois, para se ter parâmetros do lago, era preciso fazer uma coleta presencial no local, sendo apenas possível com a ajuda interdisciplinar da biologia, recurso que não possibilitado. Vale ressaltar que esses parâmetros, por se tratarem de parâmetro iniciais, podem ser modificados no código, então, ao ter parâmetros reais coletados no domínio, o programa funcionará.

Ainda, todos os parâmetros escolhidos dentro do programa foram escolhidos de maneira que o número de Péclet, visto na equação 18, fosse respeitado, já que os processos de advecção precisam ser dominantes [10].

$$P_{el} = \frac{V_i \Delta x_i}{\alpha} < 2 \quad (18)$$

com  $i = 1, 2$ , e onde  $V_i$  é o componente do termo advectivo,  $\Delta x_i$  é o comprimento máximo

do intervalo na direção  $x_i$  e  $\alpha$  é a difusibilidade do meio.

Desse modo, ao desenvolver o método numérico de diferenças finitas nos nós, como descrito nas equações 16 e 17, foram obtidos os gráficos das figuras 4, 5, 6, 7 e 8, que modulam a dinâmica interativa das populações  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , evoluindo com o tempo, levando em consideração a difusão do poluente  $c$  no meio aquático, assim como o seu decaimento, e o quanto essas populações são afetadas por essa difusão. Os gráficos dos parâmetros finais foram feitos em 3D para a melhor visualização do impacto das interações entre o poluente e as populações.

Note que as linhas amarelas representam as áreas onde existem a maior concentração da espécie dentro do domínio, mostrando o efeito do convívio das espécies. O programa pode ser visto no Apêndice A.

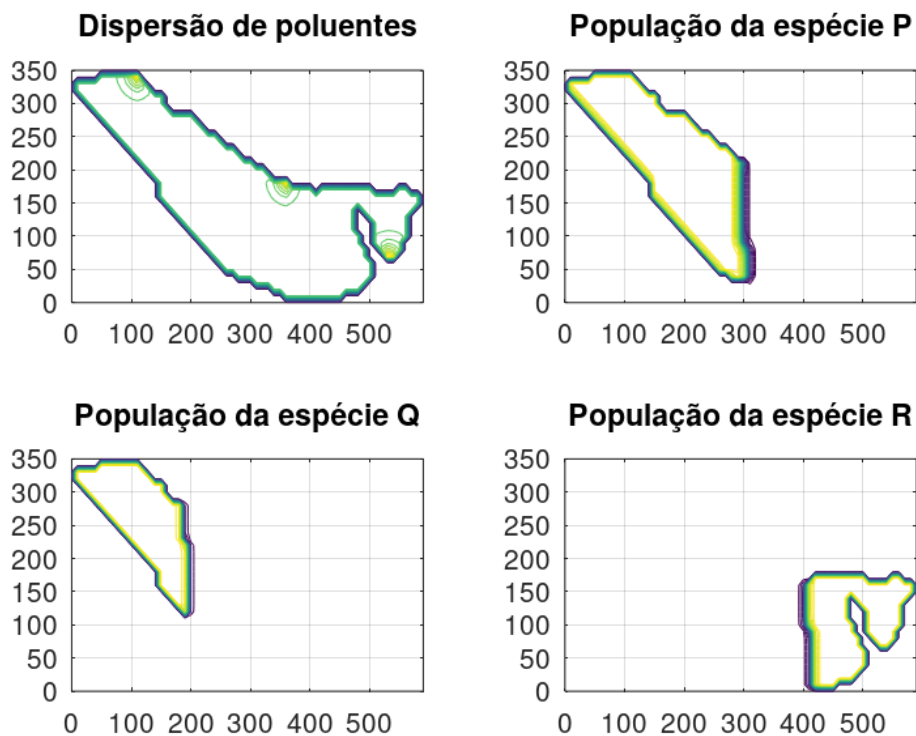


Figura 4: Parâmetros iniciais da dispersão  $c$  e das populações  $P$ ,  $Q$  e  $R$

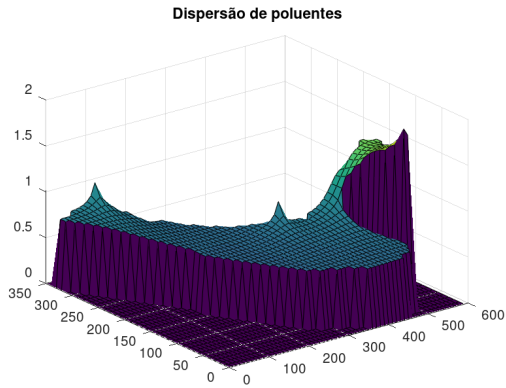


Figura 5: Dispersão final do poluente  $c$  em 3D.

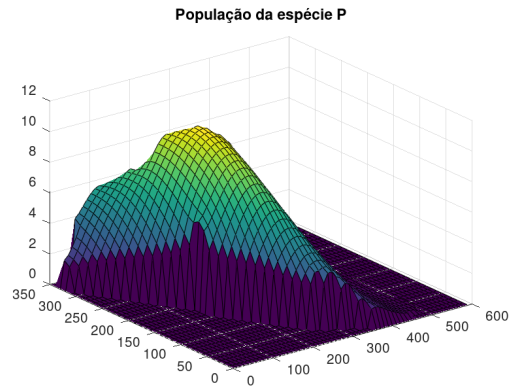


Figura 6: População  $p$  final em 3D.

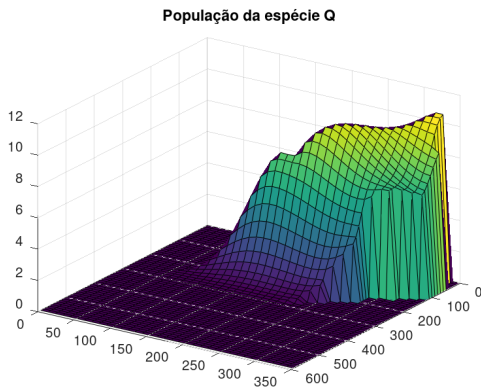


Figura 7: População  $q$  final em 3D.

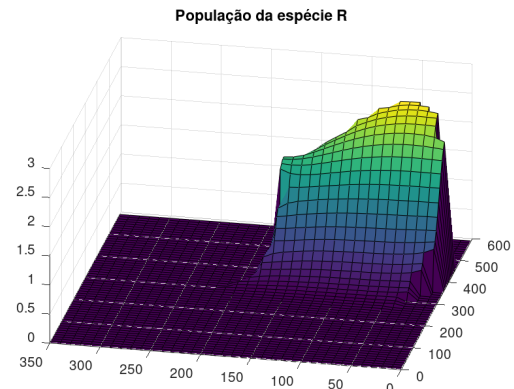


Figura 8: População  $r$  final em 3D.

## 4 Conclusão

A partir da realização deste trabalho, conclui-se, primeiramente, que existe a possibilidade de simular matematicamente, cenários que tenham mais de uma presença de fenômenos, como é o caso da dinâmica populacional com a presença de um poluente tóxico, respeitando o domínio do problema e com parâmetros variáveis, permitindo, assim, a análise de diversos cenários.

Com essa análise suscetível a mudanças, é possível entender a evolução temporal da dinâmica das espécies, possibilitando o entendimento das diferenças respostas da biota com o tempo de exposição ao poluente. Uma maneira bem efetiva para fazer o estudo de estratégias para a contenção ou redução do impacto que as espécies irão sofrer no ambiente contaminado, além de possibilitar, também, o estudo da inserção de espécies exóticas ou nativas na região e o seu desenvolvimento.

Portanto, o desenvolvimento do trabalho foi satisfatório e de acordo com o esperado. No entanto, próximos passos devem ser levados em consideração se considerarmos a complexidade ambiental, como, por exemplo, análises com parâmetros reais e/ou implementações do modelo em cenários que afetados para a criação de políticas públicas de preservação da biota, possibilitando um trabalho mais interdisciplinar do que o feito neste documento.

## A Algoritmo Implementado em Octave

```
1 M %matriz discretizada com 0 e 1
2 n=size(M);
3 n2=n(1); %n de linhas
4 n1=n(2); %n de colunas
5 %Numerando os nos
6 nn=1
7 for j=1:n1
8     for i=1:n2
9         in=n2-i+1;
10        if M(in, j)~=0
11            mat(in, j)=nn;
12            nn=nn+1;
13        else
14            mat(in, j)=0;
15        endif
16    endfor
17 endfor
18 %Matriz de consulta dos indices
19 icont=0;
20 for j=1:n1
21     for i=1:n2
22         if mat(i, j)~=0
23             ind=mat(i, j);
24             ci(ind, 1)=mat(i, j-1);
25             ci(ind, 2)=mat(i+1, j);
26             ci(ind, 3)=mat(i-1, j);
27             ci(ind, 4)=mat(i, j+1);
28             icont=icont+1;
29         endif
30     endfor
31 end
32 nn=icont;
33 %Criando a quinta coluna da matriz ci - Cond. de contorno
34 for i=1:nn
35     if ci(i, 1)==0
```

```

36     if ci(i,2)==0
37         ci(i,5)=5;
38     elseif ci(i,3)==0
39         ci(i,5)=6;
40     else
41         ci(i,5)=1;
42     endif
43     elseif ci(i,2)==0
44         if ci(i,4)==0
45             ci(i,5)=7;
46         else
47             ci(i,5)=3;
48         endif
49     elseif ci(i,3)==0
50         if ci(i,4)==0
51             ci(i, 5)=8;
52         else
53             ci(i,5)=4;
54         endif
55     elseif ci(i,4)==0
56         ci(i,5)=2;
57     else
58         ci(i,5)=0;
59     endif
60 endfor
61 %PROBLEMA
62 %Dados do problema
63 %POLUENTE
64 alf=5e-2; %difusibilidade
65 u=0.0;
66 v=0.025;
67 mu=2e-8; %decaimento
68 %ESPECIE P
69 alfp=0.005; %dispersao
70 up=0;
71 vp=0;
72 mup=0; %mortalidade induzida

```



```

73 lambp=0.075; %taxa de crescimento
74 ro=0.075; %comp. pela capacidade de suporte
75 betapq=0.0025;
76 betapr=0.0025;
77 kappap=0.05; %efeito do poluente
78 %ESPECIE Q
79 alfq=0.00125;
80 uq=0;
81 vq=0;
82 muq=0;
83 lambq=0.075;
84 nu=0.125;
85 kp=250; %capacidade de suporte
86 betaqp=0.0025;
87 betaqr=0.0025;
88 kappaq=0.05;
89 %ESPECIE R
90 alfr=0.0025;
91 ur=0;
92 vr=0;
93 mur=0;
94 lambr=0.05;
95 gamma=0.075;
96 betarp=0.0025;
97 betarq=0.0025;
98 kappar=0.075;
99 %Dados do dominio
100 tf=50;
101 %Dados da dis.
102 npt=200; dt=tf/npt;
103 dy=0.01;
104 L=573; H=331;
105 dx=L/n1; dy=H/n2;
106 %Peclet
107 abs([u*dx/alf v*dy/alf])
108 abs([up*dx/alfp vp*dy/alfp])
109 abs([uq*dx/alfq vq*dy/alfq])

```

```

110 abs([ur*dx/alfr vr*dy/alfr])
111 %Fontes de poluente
112 nf=3; %n de fontes
113 indf=[84,510,742]; %condices das posicoes das fontes
114 f=[3,3,2.5]; %intensidade das fontes
115 %Condicao inicial
116 %POLUENTE
117 cz=0.5*ones(nn,1);
118 %ESPECIE P
119 pz(1634)=20; pz(1631)=20;
120 pz=zeros(nn,1);
121 npp=floor(nn/2);
122 for ip=1:npp
123     pz(ip)=2;
124 endfor
125 %ESPECIE Q
126 qz=zeros(nn,1);
127 nqp=floor(nn/4);
128 for iq=1:nqp
129     qz(iq)=2;
130 end
131 %ESPECIE R
132 rz=zeros(nn,1);
133 nrp=floor(3*nn/4);
134 for ir=nrp:nn
135     rz(ir)=3;
136 end
137 %Termo independente
138 %POLUENTE
139 cb=zeros(nn,1);
140 in1=indf(1); in2=indf(2); in3=indf(3);
141 cb(in1)=f(1); cb(in2)=f(2); cb(in3)=f(3);
142 cb=cb*dt;
143 %ESPECIE P
144 pr=zeros(nn,1);
145 %ESPECIE Q
146 qr=zeros(nn,1);

```

```

147 %ESPECIE R
148 rr=zeros(nn,1);
149 %Calculos auxiliares
150 ddx=dx*dx;          ddy = dy*dy;
151 ddx2=2*ddx;         ddy2=2*ddy;
152 d4x=4*dx;          d4y=4*dy;
153
154 atx=alf*dt/ddx;     aty=alf*dt/ddy;
155 atx2=alf*dt/ddx2;   aty2=alf*dt/ddy2;
156 utx=u*dt/d4x;      vty=v*dt/d4y;
157 mut=mu*dt/2;
158
159 atxp=alfp*dt/ddx;   atyp=alfp*dt/ddy;
160 atx2p=alfp*dt/ddx2; aty2p=alfp*dt/ddy2;
161 utxp=up*dt/d4x;    vtyp=vp*dt/d4y;
162
163 atxq=alfq*dt/ddx;   atyq=alfq*dt/ddy;
164 atx2q=alfq*dt/ddx2; aty2q=alfq*dt/ddy2;
165 utxq=uq*dt/d4x;    vtyq=vq*dt/d4y;
166
167 atxr=alfr*dt/ddx;   atyr=alfr*dt/ddy;
168 atx2r=alfr*dt/ddx2; aty2r=alfr*dt/ddy2;
169 utxr=ur*dt/d4x;    vtyr=vr*dt/d4y;
170 %Termos das matrizes em cada condicao
171 %Diagonais principais (partes constantes no tempo)
172 %POLUENTE          ESPECIE P          ESPECIE Q          ESPECIE R
173 dpe=1+atx+aty+mut;   dpep=1+atxp+atyp;   dpeq=1+atxq+atyq;   dper=1+
    atxr+atyr;
174 dpd=1-atx-aty-mut;   dpdp=1-atxp-atyp;   dpdq=1-atxq-atyq;   dpdr=1-
    atxr-atyr;
175 %CONDICAO 0
176 %POLUENTE          ESPECIE P          ESPECIE Q          ESPECIE R
177 dside0=-atx2-utx;    pside0=-atx2p-utxp;  qside0=-atx2q-utxq;  rside0
    ==-atx2r-utxr;
178 dsipe0=-aty2-vty;    psipe0=-aty2p-vtyp;  qsipe0=-aty2q-vtyq;  rsipe0
    ==-aty2r-vtyr;
179 dsspe0=-aty2+vty;    psspe0=-aty2p+vtyp;  qsspe0=-aty2q+vtyq;  rsspe0

```

```

    ==aty2r+vtyr;
180 dssde0=-atx2+utx;      pssde0=-atx2p+utxp;      qssde0=-atx2q+utxq; rssde0
    ==atx2r+utxr;
181 dsidd0=-dside0;      psidd0=-pside0;      qsidd0=-qside0;      rsidd0
    ==rside0;
182 dsipd0=-dsipe0;      psipd0=-psipe0;      qsipd0=-qsipe0;      rsipd0
    ==rsipe0;
183 dsspd0=-dsspe0;      psspd0=-psspe0;      qsspd0=-qsspe0;      rsspd0
    ==rsspe0;
184 dssdd0=-dssde0;      pssdd0=-pssde0;      qssdd0=-qssde0;      rssdd0
    ==rssde0;
185 %CONDICAO 1
186 %POLUENTE           ESPECIE P           ESPECIE Q           ESPECIE R
187 dsipe1=-aty2-vty;    psipe1=-aty2p-vtyp;    qsipe1=-aty2q-vtyq; rsipe1
    ==aty2r-vtyr;
188 dsspe1=-aty2+vty;    psspe1=-aty2p+vtyp;    qsspe1=-aty2q+vtyq; rsspe1
    ==aty2r+vtyr;
189 dssde1=-atx;        pssde1=-atxp;        qssde1=-atxq;        rssde1
    ==atxr;
190 dsipd1=-dsipe1;     psipd1=-psipe1;     qsipd1=-qsipe1;     rsipd1
    ==rsipe1;
191 dsspd1=-dsspe1;     psspd1=-psspe1;     qsspd1=-qsspe1;     rsspd1
    ==rsspe1;
192 dssdd1=atx;         pssdd1=atxp;         qssdd1=atxq;         rssdd1=
    atxr;
193 %CONDICAO 2
194 dside2=-atx;        pside2=-atxp;        qside2=-atxq;        rside2
    ==atxr;
195 dsipe2=-aty2-vty;    psipe2=-aty2p-vtyp;    qsipe2=-aty2q-vtyq; rsipe2
    ==aty2r-vtyr;
196 dsspe2=-aty2+vty;    psspe2=-aty2p+vtyp;    qsspe2=-aty2q+vtyq; rsspe2
    ==aty2r+vtyr;
197 dsidd2=atx;         psidd2=atxp;         qsidd2=atxq;         rsidd2=
    atxr;
198 dsipd2=-dsipe2;     psipd2=-psipe2;     qsipd2=-qsipe2;     rsipd2
    ==rsipe2;
199 dsspd2=-dsspe2;     psspd2=-psspe2;     qsspd2=-qsspe2;     rsspd2

```

```

    =-rsspe2;
200 %CONDICAO 3
201 dside3=-atx2-utx;      pside3=-atx2p-utxp;      qside3=-atx2q-utxq; rside3
    =-atx2r-utxr;
202 dsspe3=-aty;          psspe3=-atyp;          qsspe3=-atyq;      rsspe3
    =-atyr;
203 dssde3=-atx2+utx;    pssde3=-atx2p+utxp;    qssde3=-atx2q+utxq; rssde3
    =-atx2r+utxr;
204 dsidd3=-dside3;      psidd3=-pside3;        qsidd3=-qside3;    rsidd3
    =-rside3;
205 dsspd3=aty;          psspd3=atyp;          qsspd3=atyq;      rsspd3=
    atyr;
206 dssdd3=-dssde3;     pssdd3=-pssde3;       qssdd3=-qssde3;   rssdd3
    =-rssde3;
207 %CONDICAO 4
208 dside4=-atx2-utx;    pside4=-atx2p-utxp;    qside4=-atx2q-utxq; rside4
    =-atx2r-utxr;
209 dsipe4=-aty;         psipe4=-atyp;         qsipe4=-atyq;      rsipe4
    =-atyr;
210 dssde4=-atx2+utx;    pssde4=-atx2p+utxp;    qssde4=-atx2q+utxq; rssde4
    =-atx2r+utxr;
211 dsidd4=-dside4;     psidd4=-pside4;       qsidd4=-qside4;    rsidd4
    =-rside4;
212 dsipd4=aty;         psipd4=atyp;         qsipd4=atyq;      rsipd4=
    atyr;
213 dssdd4=-dssde4;     pssdd4=-pssde4;       qssdd4=-qssde4;   rssdd4
    =-rssde4;
214 %CONDICAO 5
215 dsspe5=-aty;         psspe5=-atyp;         qsspe5=-atyq;      rsspe5
    =-atyr;
216 dssde5=-atx;        pssde5=-atxp;         qssde5=-atxq;      rssde5
    =-atxr;
217 dsspd5=aty;         psspd5=atyp;         qsspd5=atyq;      rsspd5=
    atyr;
218 dssdd5=atx;         pssdd5=atxq;          qssdd5=atxq;      rssdd5=
    atxr;
219 %CONDICAO 6

```

```

220 dsipe6=-aty;          psipe6=-atyp;          qsipe6=-atyq;          rsipe6
    =-atyr;
221 dssde6=-atx;          pssde6=-atxp;          qssde6=-atxq;          rssde6
    =-atxr;
222 dsipd6=aty;          psipd6=atyp;          qsipd6=atyq;          rsipd6=
    atyr;
223 dssdd6=atx;          pssdd6=atxp;          qssdd6=atxq;          rssdd6=
    atxr;
224 %CONDICAO 7
225 dside7=-atx;          pside7=-atxp;          qside7=-atxq;          rside7
    =-atxr;
226 dsspe7=-aty;          psspe7=-atyp;          qsspe7=-atyq;          rsspe7
    =-atyr;
227 dsidd7=atx;          psidd7=atxp;          qsidd7=atxq;          rsidd7=
    atxr;
228 dsspd7=aty;          psspd7=atyp;          qsspd7=atyq;          rsspd7=
    atyr;
229 %CONDICAO 8
230 dside8=-atx;          pside8=-atxp;          qside8=-atxq;          rside8
    =-atxr;
231 dsipe8=-aty;          psipe8=-atyp;          qsipe8=-atyq;          rsipe8
    =-atyr;
232 dsidd8=atx;          psidd8=atxp;          qsidd8=atxq;          rsidd8=
    atxr;
233 dsipd8=aty;          psipd8=atyp;          qsipd8=atyq;          rsipd8=
    atyr;
234 %Montagem das matrizes
235 me=sparse(nn);      md=sparse(nn);      %POLUENTE
236 mep=sparse(nn);    mdp=sparse(nn);    %ESPECIE P
237 meq=sparse(nn);    mdq=sparse(nn);    %ESPECIE Q
238 mer=sparse(nn);    mdr=sparse(nn);    %ESPECIE R
239 for i=1:nn
240     me(i,i)=dpe;      meq(i,i)=dpeq;      mer(i,i)=dper;      mep(i,i)=
        dpep;
241     md(i,i)=dpd;      mdq(i,i)=dpdq;      mdr(i,i)=dpdr;      mdp(i,i)=
        dpdp;
242 end

```

```

243 for i=1:nn
244     i1=ci(i,1);
245     i2=ci(i,2);
246     i3=ci(i,3);
247     i4=ci(i,4);
248     i5=ci(i,5);
249     if i5==0
250         me(i,i1)=dside0; mer(i,i1)=rside0; meq(i,i1)=qside0; mep(i,i1)=
           pside0;
251         me(i,i2)=dsipe0; mer(i,i2)=rsipe0; meq(i,i2)=qsipe0; mep(i,i2)=
           psipe0;
252         me(i,i3)=dsspe0; mer(i,i3)=rsspe0; meq(i,i3)=qsspe0; mep(i,i3)=
           psspe0;
253         me(i,i4)=dssde0; mer(i,i4)=rssde0; meq(i,i4)=qssde0; mep(i,i4)=
           pssde0;
254         md(i,i1)=dsidd0; mdr(i,i1)=rsidd0; mdq(i,i1)=qsidd0; mdp(i,i1)=
           psidd0;
255         md(i,i2)=dsipd0; mdr(i,i2)=rsipd0; mdq(i,i2)=qsipd0; mdp(i,i2)=
           psipd0;
256         md(i,i3)=dsspd0; mdr(i,i3)=rsspd0; mdq(i,i3)=qsspd0; mdp(i,i3)=
           psspd0;
257         md(i,i4)=dssdd0; mdr(i,i4)=rssdd0; mdq(i,i4)=qssdd0; mdp(i,i4)=
           pssdd0;
258     elseif i5==1
259         me(i,i2)=dsipe1; mer(i,i2)=rsipe1; meq(i,i2)=qsipe1; mep(i,i2)=
           psipe1;
260         me(i,i3)=dsspe1; mer(i,i3)=rsspe1; meq(i,i3)=qsspe1; mep(i,i3)=
           psspe1;
261         me(i,i4)=dssde1; mer(i,i4)=rssde1; meq(i,i4)=qssde1; mep(i,i4)=
           pssde1;
262         md(i,i2)=dsipd1; mdr(i,i2)=rsipd1; mdq(i,i2)=qsipd1; mdp(i,i2)=
           psipd1;
263         md(i,i3)=dsspd1; mdr(i,i3)=rsspd1; mdq(i,i3)=qsspd1; mdp(i,i3)=
           psspd1;
264         md(i,i4)=dssdd1; mdr(i,i4)=rssdd1; mdq(i,i4)=qssdd1; mdp(i,i4)=
           pssdd1;
265     elseif i5==2

```

```

266     me(i,i1)=dside2; mer(i,i1)=rside2; meq(i,i1)=qside2; mep(i,i1)=
pside2;
267     me(i,i2)=dsipe2; mer(i,i2)=rsipe2; meq(i,i2)=qsipe2; mep(i,i2)=
psipe2;
268     me(i,i3)=dsspe2; mer(i,i3)=rsspe2; meq(i,i3)=qsspe2; mep(i,i3)=
psspe2;
269     md(i,i1)=dsidd2; mdr(i,i1)=rsidd2; mdq(i,i1)=qsidd2; mdp(i,i1)=
psidd2;
270     md(i,i2)=dsipd2; mdr(i,i2)=rsipd2; mdq(i,i2)=qsipd2; mdp(i,i2)=
psipd2;
271     md(i,i3)=dsspd2; mdr(i,i3)=rsspd2; mdq(i,i3)=qsspd2; mdp(i,i3)=
psspd2;
272     elseif i5==3
273         me(i,i1)=dside3; mer(i,i1)=rside3; meq(i,i1)=qside3; mep(i,i1)=
pside3;
274         me(i,i3)=dsspe3; mer(i,i3)=rsspe3; meq(i,i3)=qsspe3; mep(i,i3)=
psspe3;
275         me(i,i4)=dssde3; mer(i,i4)=rssde3; meq(i,i4)=qssde3; mep(i,i4)=
pssde3;
276         md(i,i1)=dsidd3; mdr(i,i1)=rsidd3; mdq(i,i1)=qsidd3; mdp(i,i1)=
psidd3;
277         md(i,i3)=dsspd3; mdr(i,i3)=rsspd3; mdq(i,i3)=qsspd3; mdp(i,i3)=
psspd3;
278         md(i,i4)=dssdd3; mdr(i,i4)=rssdd3; mdq(i,i4)=qssdd3; mdp(i,i4)=
pssdd3;
279     elseif i5==4
280         me(i,i1)=dside4; mer(i,i1)=rside4; meq(i,i1)=qside4; mep(i,i1)=
pside4;
281         me(i,i2)=dsipe4; mer(i,i2)=rsipe4; meq(i,i2)=qsipe4; mep(i,i2)=
psipe4;
282         me(i,i4)=dssde4; mer(i,i4)=rssde4; meq(i,i4)=qssde4; mep(i,i4)=
pssde4;
283         md(i,i1)=dsidd4; mdr(i,i1)=rsidd4; mdq(i,i1)=qsidd4; mdp(i,i1)=
psidd4;
284         md(i,i2)=dsipd4; mdr(i,i2)=rsipd4; mdq(i,i2)=qsipd4; mdp(i,i2)=
psipd4;
285         md(i,i4)=dssdd4; mdr(i,i4)=rssdd4; mdq(i,i4)=qssdd4; mdp(i,i4)=

```



```

pssdd4;
286 elseif i5==5
287   me(i,i3)=dsspe5; mer(i,i3)=rsspe5; meq(i,i3)=qsspe5; mep(i,i3)=
psspe5;
288   me(i,i4)=dssde5; mer(i,i4)=rssde5; meq(i,i4)=qssde5; mep(i,i4)=
pssde5;
289   md(i,i3)=dsspd5; mdr(i,i3)=rsspd5; mdq(i,i3)=qsspd5; mdp(i,i3)=
psspd5;
290   md(i,i4)=dssdd5; mdr(i,i4)=rssdd5; mdq(i,i4)=qssdd5; mdp(i,i4)=
pssdd5;
291 elseif i5==6
292   me(i,i2)=dsipe6; mer(i,i2)=rsipe6; meq(i,i2)=qsipe6; mep(i,i2)=
psipe6;
293   me(i,i4)=dssde6; mer(i,i4)=rssde6; meq(i,i4)=qssde6; mep(i,i4)=
pssde6;
294   md(i,i2)=dsipd6; mdr(i,i2)=rsipd6; mdq(i,i2)=qsipd6; mdp(i,i2)=
psipd6;
295   md(i,i4)=dssdd6; mdr(i,i4)=rssdd6; mdq(i,i4)=qssdd6; mdp(i,i4)=
pssdd6;
296 elseif i5==7
297   me(i,i1)=dside7; mer(i,i1)=rside7; meq(i,i1)=qside7; mep(i,i1)=
pside7;
298   me(i,i3)=dsspe7; mer(i,i3)=rsspe7; meq(i,i3)=qsspe7; mep(i,i3)=
psspe7;
299   md(i,i1)=dsidd7; mdr(i,i1)=rsidd7; mdq(i,i1)=qsidd7; mdp(i,i1)=
psidd7;
300   md(i,i3)=dsspd7; mdr(i,i3)=rsspd7; mdq(i,i3)=qsspd7; mdp(i,i3)=
psspd7;
301 else
302   me(i,i1)=dside8; mer(i,i1)=rside8; meq(i,i1)=qside8; mep(i,i1)=
pside8;
303   me(i,i2)=dsipe8; mer(i,i2)=rsipe8; meq(i,i2)=qsipe8; mep(i,i2)=
psipe8;
304   md(i,i1)=dsidd8; mdr(i,i1)=rsidd8; mdq(i,i1)=qsidd8; mdp(i,i1)=
psidd8;
305   md(i,i2)=dsipd8; mdr(i,i2)=rsipd8; mdq(i,i2)=qsipd8; mdp(i,i2)=
psipd8;

```

```

306     endif
307 endfor
308 %Matriz verc - bidimensional
309 verc=zeros(n2,n1);
310 verp=zeros(n2,n1);
311 verq=zeros(n2,n1);
312 verr=zeros(n2,n1);
313 %Vetores x e y para ajustar
314 x=[0:10:590];
315 y=[0:10:350];
316 % Decomposicao LU da matriz ae
317 [ei ds]=lu(me);
318 % Repeticoes temporais
319 p=pz; q=qz; r=rz;
320 for it=1:npt
321     mintpe=mep; mintpd=mdp;
322     mintqe=meq; mintqd=mdq;
323     mintre=mer; mintrd=mdr;
324     caux=ei\(md*cz+cb);
325     c=ds\caux;
326     cint=(cz+c)/2;
327     for k=1:5
328         pint=(pz+p)/2; qint=(qz+q)/2; rint=(rz+r)/2;
329         for i=1:nn
330             mintpe(i,i)= mep(i,i)+(mup-lambp+((lambp*(pint(i)+(ro*qint(i))+(ro*
rint(i))))/kp))+(betapr*rint(i))+betapq*qint(i)+kappap*cint(i))*(dt/2)
;
331             mintpd(i,i)= mdp(i,i)+(-mup+lambp-((lambp*(pint(i)+(ro*qint(i))+(ro*
rint(i))))/kp))-(betapr*pint(i))-betapq*rint(i)-kappap*cint(i))*(dt/2)
;
332             mintqe(i,i)= meq(i,i)+(muq-lambq+((lambq*(qint(i)+(nu*pint(i))+(nu*
rint(i))))/kp))+(betaqr*rint(i))+betarp*pint(i)+kappaq*cint(i))*(dt/2)
;
333             mintqd(i,i)= mdq(i,i)+(-muq+lambq-((lambq*(qint(i)+(nu*pint(i))+(nu*
rint(i))))/kp))-(betaqr*pint(i))-betaqp*pint(i)-kappaq*cint(i))*(dt/2)
;
334             mintre(i,i)= mer(i,i)+(mur-lambr+((lambr*(rint(i)+(gamma*pint(i)))+(

```

```

    gamma*qint(i))/kp))+(betaqr*rint(i))+betarp*pint(i)+kappar*cint(i))
    *(dt/2);
335     mintrd(i,i)= mdr(i,i)+(-mur+lambr-((lambr*(rint(i)+(gamma*pint(i))+
    gamma*qint(i))/kp))-(betarq*rint(i))-betarp*pint(i)-kappar*cint(i))
    *(dt/2);
336     endfor
337     p=mintpe\(mintpd*pz+pr);
338     q=mintqe\(mintqd*qz+qr);
339     r=mintre\(mintrd*rz+rr);
340     endfor
341 % Visualizacao
342     for i=1:n2
343         for j=1:n1
344             if mat(i,j)~=0
345                 verc(n2-i+1,j)=c(mat(i,j));
346                 verp(n2-i+1,j)=p(mat(i,j));
347                 verq(n2-i+1,j)=q(mat(i,j));
348                 verr(n2-i+1,j)=r(mat(i,j));
349             endif
350         endfor
351     endfor
352 %Plotagem dos graficos

```

## B Bibliografia

- [1] Bernardes, M.: Poluição de Corpos Aquáticos de Baixa Circulação. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Estadual de Campinas, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, 1998.
- [2] Edelstein-Keshet, L.: *Mathematical Models in Biology*, SIAM, 2006.
- [3] Cantrell, R. S. e Cosner, C.: *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*, Wiley, 2003.
- [4] Carmona Tabares, P. C.: Impacto do Sedimento sobre Espécies que Interagem: Modelagem e Simulações de Bentos na Enseada Potter, Tese de doutorado, IMECC UNICAMP, 2015.
- [5] Carnahan, B., Luther, J. O. e Wilkes, R. E.: *Applied Numerical Methods*. Wiley, 1969.
- [6] Cunha, M. C. C.: *Métodos Numéricos*. UNICAMP, 2<sup>a</sup> ed., 2000.
- [7] Koga, M. T.: Dinâmica populacional da Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) em um ambiente com competição: simulações computacionais. Tese de doutorado, IMECC UNICAMP, 2015.
- [8] Lopes, V. L. R. e Ruggiero, M. A. G.: *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Pearson, 2a ed, 2014.
- [9] Murray, J. *Biomathematics*, Springer, 1989.
- [10] Prestes, M. F. B.: Dispersão de material impactante em meio aquático: modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional - Lagoa do Taquaral, Cam-

pinas, SP, dissertação de mestrado, IMECC UNICAMP, 2011.

[11] Sossae, R. C., Rubianes, J. C.: Modelagem Matemática e Simulação Computacional da Influência de Poluentes e da Velocidade de Corrente na Dinâmica Populacional de Macrófitas Aquáticas, tese de doutorado, IMECC UNICAMP, 2015.

[12] Skellam, J,: Random dispersal in Theoretical Populations. *Biometrika*, Vol. 38, No. 1/2,1951.