UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Piero Ruzzi Ramalho

Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias Stiff

Campinas
28/06/2023

Piero Ruzzi Ramalho

Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias Stiff*

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Diego Samuel Rodrigues.

*Este trabalho foi financiado pelo SAE-UNICAMP, Bolsa de Auxílio Estudo Formação (BAEF).

Resumo

Neste texto proponho-me a apresentar uma introdução ao estudo de equações diferenciais ordinárias *stiff* a partir da álgebra linear e do cálculo elementar. A partir de breves comentários sobre a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, comprometo-me a apresentar demonstrações e definições acessíveis a alunos de segundo semestre de graduação, com o objetivo de apresentar um bom primeiro texto introdutório. Quando são tangenciados tópicos matemáticos um pouco mais sofisticados, comprometo-me com a apresentação de esclarecimentos intuitivos adequados.

Abstract

In this text I propose to present an introduction to the study of stiff ordinary differential equations by using linear algebra and elementary calculus. Starting with brief comments on the qualitative theory of ordinary differential equations, I undertake to present demonstrations and definitions accessible to second semester undergraduate students, with the goal of presenting a good first introductory text. When somewhat more sophisticated mathematical topics are touched upon, I commit to presenting appropriate intuitive clarifications.

Conteúdo

1 Introdução

A área de sistemas dinâmicos oferece ferramentas capazes de modelar fenômenos que evoluem de forma inter-relacionada ao longo do tempo ou espaço, ou de modo mais geral em espaços abstratos e sistemas de informação em relação a algum parâmetro de controle. Saber compreender o mundo a partir da abordagem de sistemas dinâmicos e a partir de modelagem matemática e análise de dados é uma ferramenta essencial para a ciência no geral, desde as áreas mais fundamentais das ciências exatas, engenharia, computação e em ciências biomédicas.

O surgimento do estudo da área de sistemas dinâmicos data do século XVI, com as primeiras formalizações da mecânica clássica a partir dos esforços de Johanes Kepler para a compreensão e modelagem da mecânica celeste, os trabalhos de Isaac Newton que introduzem formalmente o conceito de força, lei da gravitação (apresentados no livro Princípios Matemáticos da Filosofia Natural) e as primeiras formalizações dos conceitos de integrais e derivadas que permitiram a introdução das equações diferenciais no estudo de ciências da natureza.

Muitas contribuições essenciais foram dadas por diversos físicos-matemáticos e filósofos das ciências naturais ao longo dos séculos. Por exemplo, Lagrange e Hamilton que estudaram a mecânica a partir dos operadores lagrangiano e hamiltoniano. Entretanto, a ciência dos sistemas dinâmicos como é estudada hoje data dos trabalhos em estudo do problema dos três corpos de Henri Poincaré, e dos trabalhos de Lyapunov em equilibrio e estabilidade, respectivamente denominados *The general problem of the stability of motion* e *On the stability of ellipsoidal figures of equilibrium of a rotating fluid*.

Nesse momento da história, o paradigma principal da teoria de sistemas dinâmicos deixa de ser a apresentação de soluções analíticas a partir de funções elementares e funções especiais, voltando-se o interesse para o estudo das características topológicas e geométricas dos sistemas dinâmicos, a fim de responder as seguintes questões:

(I) Há sensibilidade a condições iniciais, isto é, pequenas variações nas condições iniciais podem causar resultados imprevisivelmente e qualitativamente diferentes, representando um comportamento caótico?

(II) Há estados de equilíbrio, isto é, é possível que haja instantes de tempo ou locais no espaço no qual a dinâmica se estabilize sem apresentar variações, desde que partindo de condições iniciais favoráveis para isso?

(III) Há estados estáveis de equilíbrio, isto é, é possível que haja instantes de tempo ou locais no espaço no qual a dinâmica se estabilize, sendo tal estabilidade resistente a pequenas perturbações?

Guiando-se por essas perguntas, ao longos dos anos foram desenvolvidas técnicas para atribuir características qualitativas para a dinâmica de fenômenos da natureza. Essas técnicas permitem compreender tendências a curto médio e longo prazo de sistemas que evoluem no tempo ou no espaço e desenvolver métodos e estratégias numéricas para explicações quantitativas e metrizáveis desses fenômenos. Exemplos desses constituem-se na equação da difusão dos gases, equação do escoamento de fluidos bidimensionais, dinâmica do pêndulo com ressonância e o problema do controle e estabilização do pêndulo duplo.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Conceitos de Estabilidade e Instabilidade

Modelos matemáticos para sistemas dinâmicos às vezes são propícios à instabilidade. De modo informal, um modelo para um sistema dinâmico é dito instável com respeito a uma variável ou propriedade se pequenas mudanças na especificação do sistema levam a grandes mudanças no comportamento dinâmico previsto com respeito à variável ou propriedade. Em contrapartida, um modelo matemático para um sistema dinâmico é dito estável com respeito a uma variável ou propriedade se pequenas mudanças nas especificações do sistema com respeito a essa variável ou propriedade não ocasionam grandes variações no comportamento dinâmico previsto com respeito à variável ou propriedade [Ardourel and Jebeile, 2021].

Há três principais fontes de instabilidade em sistemas dinâmicos: instabilidade relacionada a sensibilidade a condições iniciais; instabilidade relacionada às equações que modelam o sistema dinâmico; instabilidade relacionada à discretização do sistema dinâmico, em geral para obtenção de soluções numéricas.

A instabilidade relacionada a sensibilidade a condições iniciais de alguma forma está relacionada à "natureza" do sistema dinâmico, como por exemplo para o problema do pêndulo duplo [Irwin, 2001]. Mesmo que haja uma forma perfeita de modelar o sistema sem perda de informação, durante o processo de discretização o fenômeno modelado continua instável com relação às condições iniciais.

A instabilidade relacionada às equações diferenciais do modelo ocorre quando pequenas variações no modelo divergem significativamente com respeito à evolução da variáveis do problema ao longo do espaço ou do tempo.

A instabilidade relacionada à discretização do modelo ocorre quando diferentes estratégias para integração de um modelo para um sistema dinâmico resultam em resultados significativamente diferentes com respeito à evolução no tempo ou espaço. Nesse caso, pequenas mudanças na forma como o problema é discretizado podem levar a variações qualitativas incorretas no comportamento previsto para o sistema dinâmico [Ardourel and Jebeile, 2021].

2.2 Critérios Analíticos para Estabilidade

Nesta seção são trabalhados os conceitos analíticos para estabilidade de equações diferenciais. Posteriormente, tais conceitos apresentam-se como pertinentes para a análise de estabilidade numérica em integradores discretos implícitos e explícitos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias no tempo.

As ideias e conceitos fundamentais mais elementares que são utilizadas para a análise consistem em técnicas de linearização e aproximações de primeira e segunda ordem para os integradores, localmente, em torno de pontos de equilíbrio.

A equivalência ou não equivalência local entre as equações diferenciais originais e sistemas lineares fornece métodos para estudar qualitativamente as propriedades de estabilidade dos integradores discretizados, a partir da análise dos autovalores e dos autoespaços das matrizes utilizadas. Essas matrizes e os critérios de análises são abordados a seguir.

2.3 Representação Matricial de uma EDO Linear

2.4 Sistemas Não Acoplados

Esta subseção é baseada na Aula 13 da disciplina de Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos de Steven Brunton, link [Brunton, 2022a] e no Capítulo 1 de Perko [2013].

Definição 1 *Uma equação diferencial ordinária (EDO) linear e homogênea é:*

$$x^{(n)} + \beta_{n-1}\, x^{(n-1)} + \beta_{n-2}\, x^{(n-2)} + \cdots + \beta_1\, \dot{x} + \beta_0\, x \;=\; 0, \tag{1}$$

em que $x^{(n)} = x^{(n)}(t)$*, nas quais os coeficientes* β_k*, para os quais* $k = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, n-1$ *podem ser constantes ou funções explícitas do tempo.*

Introduzindo as variáveis auxiliares

$$v_0 = x, v_1 = \dot{x}, v_2 = \ddot{x},\ \ldots\ , v_n = x^{(n)}, \tag{2}$$

tem-se uma transformação linear sob o vetor v cujas entradas são os $v_i = v_i(t)$ definidos como anteriormente, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, de modo a representar a referida equação diferencial ordinária linear e homogênea como:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \vdots \\ \dot{v}_{n-2} \\ \dot{v}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \cdots & \cdots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

a qual pode ser escrita da seguinte forma compacta:

$$\dot{v} = A\, v, \tag{4}$$

em que a matriz A, e os vetores v e $\dot{v}$ são definidos pela equação (3). Desse modo, tem-se um sistema de EDOs homogêneas de primeira ordem, o qual pode ser resolvido a partir da utilização de um fator integrante. A propósito, o fator integrante é da mesma forma que o fator integrante para EDOs de uma variável. Sendo

$$\dot{x}(t) \;=\; \beta\, x(t), \tag{5}$$

cuja solução é dada por

$$x_H(t) \;=\; e^{\beta\, t}. \tag{6}$$

Analogamente, para o caso de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem associados a uma matriz, dentro das condições para as quais uma exponencial de uma matriz esta bem definida, pode-se resolver da mesma forma:

$$\dot{y}(t) \;=\; A\, y(t), \tag{7}$$

cuja solução é dada por

$$y_H(t) \;=\; e^{A\, t}, \tag{8}$$

desde que a operação de exponenciação de A esteja bem definida, conforme descrito a seguir.

2.5 Exponenciação de uma Matriz

A exponenciação de uma matriz se trata de uma generalização do conceito de exponenciação de um número real de forma a reproduzir suas propriedades sob diferenciação e integração para além do caso de funções de uma variável.

A definição mais pertinente ao tópico em questão retirado do material sobre análise real de Rudin et al. [1976].

Definição 2 *A função e^x é aquela que satisfaz o problema de valor inicial $x = \dot{x}$.*

Para adequar a definição de exponencial do caso real ao caso matricial seria necessário mostrar que há a boa convergência para a soma das potências de uma matriz quadrada divididas pelo fatorial da potência:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \tag{9}$$

A demonstração da convergência dessa soma para matrizes quadradas no geral pode ser encontrada no Capítulo 1 de em Perko [2013], assim como outros métodos mais gerais para cálculo equivalente a exponencial de uma matriz.

Uma forma intuitiva de se compreender tal convergência é notar que esta soma pode ser majorada por

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{nM^{2i}}{i!} \tag{10}$$

em que M é a maior entrada da matriz e n sua dimensão. Substituindo-se M^2 na série de Mclaurin de ne^t obtemos esta mesma soma e de cálculo elementar temos que e^t é analítica. Logo, esta soma deve convergir para todo real.

Sabendo-se que toda matriz real pode ser escrita como uma série de potências que é chamada de exponenciação a uma matriz, ou e^A, neste texto irei restringir-me à diagonalização de A e à redução da matriz A à sua forma canônica de Jordan.

Sendo uma matriz diagonalizável, pode-se demonstrar a existência de um processo razoavelmente simples para o cálculo de e^A que usualmente costuma ser estudado em um primeiro ou segundo curso de equações diferenciais.

Sendo e^A

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}, \tag{11}$$

no caso em que A é diagonalizável, pode se escrevê-la como como $A = PDP^{-1}$, e então

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^i}{i!}. \tag{12}$$

Porém,

$$(PDP^{-1})^i = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1}, \tag{13}$$

o que equivale a

$$PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1}\dots(P^{-1}P)DP^{-1}, \tag{14}$$

Logo

$$A^i \ = \ PD^iP^{-1}. \tag{15}$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(PDP^{-1})^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{PD^iP^{-1}}{i!} = P\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{D^i}{i!}\right)P^{-1} = Pe^DP^{-1}. \tag{16}$$

Desse modo, basta perceber que a matriz e^D deve equivaler a matriz $M_{ii} = e^{D_{ii}}$, porque as potências enésimas de uma matriz diagonal são justamente as suas entradas elevadas a n. Por fim, retornando à formula para exponencial de uma matriz no caso diagonal obtemos justamente $e^{D_{ii}}$.

O mesmo procedimento deve funcionar utilizando a forma de Jordan de uma matriz não diagonalizável, cuja demonstração é omitida. Nesse caso, a complicação é que não há uma forma tão simples assim para a matriz e^J. Usualmente, se dará preferencia a fazer o procedimento de cálculo de e^A de outra maneira, tomando vantagem de teoremas como Jordan–Chevalley e Cayley-Hamilton para obter simplificações. Ademais, hoje existem estratégias modernas que tomam vantagem de diversos tipos de estruturas algébricas e matriciais para evitar esse processo. Porém, mesmo que esse não seja um processo fácil, é importante ter conhecimento da técnica para a compreensão de fenômenos de estabilidade.

2.6 Sistemas Lineares Generalizados

Sistemas de equações diferenciais não necessariamente devem ser não acoplados. Há sistemas para os quais não é trivial escolher um sistema de coordenadas para os quais as substituições de variáveis tragam uma matriz simples do sistema de equações diferenciais tal como a do caso não acoplado, o que reitera a importância da forma diagonalizada de uma matriz e da forma de Jordan padrão de uma matriz.

Um sistema de equações diferenciais linear generalizado é dado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \dot{v} \tag{17}$$

Uma pequena discussão é pertinente agora quanto à diagonalização de uma matriz e a forma de Jordan padrão. Diagonalizar uma matriz é equivalente a escrevê-la numa base na qual temos uma matriz diagonal [Brunton, 2022b]. Repare que ter uma matriz diagonal como a representante do sistema de equações nos fornece um sistema de equações diferenciais não acoplado. Sem perda de generalidade, sempre que uma matriz de um sistema linear de EDOs for diagonalizável isso significa que existe uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual o sistema é não acoplado. Isto significa que o sistema de equações diferenciais pode ser recuperado a forma de uma equação linear de enésima ordem em uma variável.

Assim sendo, há uma certa redundância nas dependências entre as equações e suas variáveis linearmente proporcionais às enésimas derivadas de y. Porém, quando se tem uma matriz não diagonalizável isso não é necessariamente verdade. Pode ser que o sistema de equações diferenciais represente uma dinâmica multidimensional na qual não haja redundância entre as equações representantes do caráter referente ao movimento em cada direção de $\mathbb{R}^n$ que possam ser eliminadas para se obter um sistema diagonal. Nesses casos será necessário a utilização da forma de Jordan.

2.7 Recapitulação

Conforme apresentado, uma EDO linear de enésima ordem pode ser representada a partir de um sistema de equações de primeira ordem. Sabemos que existe uma operação análoga à exponenciação em uma base real porém agora que se aplica a matrizes e que essa operação se comporta analogamente à exponencial real quanto a diferenciação. A exponenciação a uma potência matricial pode ser usada para resolver EDOs multivariáveis lineares de primeira ordem pelo método dos fatores integrantes. Já conhecemos três entre algumas técnicas poderosas para computar a exponenciação a uma potência matricial para resolver EDOs lineares e ambas se aproveitam da estrutura algébrica da nossa troca de sistema de coordenadas a qual pode ser associada a uma base de autovetores e blocos de Jordan. Assim sendo, podemos começar a compreender estabilidade de EDOs lineares a partir disso.

2.8 Equilíbrio e Estabilidade

O conteúdo desta subcessão é baseado em Irwin [2001].

Definição 3 *$\bar{x}$ é dito um ponto de equilíbrio ou ponto fixo se*

$$\dot{\bar{x}} = 0$$

No caso das equações diferenciais lineares como as que foram discutidas até agora pudemos discutir que sempre é possível escrever o sistema na forma $Ax = \dot{x}$. Então percebemos que nesse caso descobrir os pontos de equilíbrio se tratando de equações lineares se torna um problema análogo a calcular o núcleo de uma matriz. Neste momento percebe-se que com o que foi exposto até agora o leitor está sendo munido a usar seu ferramental e sua bagagem de álgebra linear para compreender conceitos de EDOs.

O público alvo desse texto provavelmente já estudou núcleo, imagem, bases de espaços vetoriais e neste momento tomaremos vantagem da bagagem de álgebra linear do aluno sem desperdícios. Considerações importantes:

1. Se a matriz do sistema possui posto completo, o ponto de equilíbrio é único e igual ao vetor nulo, pois a matriz do sistema será necessariamente injetiva e como $T(0) = 0$ para toda transformação linear se $x \neq 0 Ax \neq 0$.

2. Caso a matriz seja de posto incompleto, o seu núcleo poderá ser gerado por uma base de dimensão $\dim(\text{Ker}(A))$;

3. O núcleo de uma matriz é ortogonal ao espaço linha da matriz. Logo, é possível encontrar uma base de dimensão igual ao posto da matriz para a imagem da matriz. Com este processo conseguimos utilizando uma bijeção com R^m em que m é o posto da matriz, deste modo reduzimos a ordem da EDO.

Definição 4 *Um ponto $\bar{x}$ é dito um ponto de equilíbrio estável de uma EDO linear se $\bar{x}$ é ponto de equilíbrio e se existe uma vizinhança $\mathring{\mathbb{B}}(\bar{x}, \varepsilon)$ de $\bar{x}$ para a qual $\|\bar{x} + x + \beta Ax\| < \|x - \bar{x}\|$ para todo $x \in \mathring{\mathbb{B}}(\bar{x}, \varepsilon)$ para algum $\beta > 0$, ou seja a iteração de Euler a partir da aproximação de primeira ordem caminha em direção ao ponto fixo*

Esta definição é baseada na definição de Estabilidade de Lyupunov, porém apresenta-se de forma simplificada.

Definição 5 *Equilíbrio instável Um ponto $\bar{x}$ é dito equilíbrio instável se $\bar{x}$ é ponto de equílibrio e $\bar{x}$ não é ponto de equílibrio estável.*

Uma forma intuitiva de se compreender equilíbrio estável e instável em um contexto bidimensional seria analisar o pêndulo físico, uma vez que se libere o pêndulo físico de qualquer posição inicial de fato como as únicas forças atuantes sob o pêndulo são a força gravitacional e a tensão da haste. Observa-se um movimento oscilatório que se acelera conforme se aproxima da posição vertical na direção que aponta para a terra e se desacelera conforme se aproxima da posição vertical oposta ao sentido da força gravitacional. Porém, eventualmente devido as forças de atrito com as partes mecânicas do pêndulo tanto como devido às forças de arraste geradas pelo contato da haste com o meio gasoso no qual o pêndulo se encontra em condições normais, é esperado que o pêndulo desacelere até que se estacione numa posição na qual as forças sob o sistema se anulem. Isso pode ocorrer tanto na posição vertical orientado para cima com relação à força gravitacional ou apontando para baixo.

Entretanto, uma vez que se cause uma pequena perturbação sob o sistema como uma cutucada ou chacoalhada, quando esta perturbação é aplicada a partir do ponto de equilibro no qual o pêndulo está apontando no mesmo sentido que a força gravitacional o sistema começa a se mover novamente em direção ao ponto de equilíbrio e decair suavemente até o ponto de equilíbrio. Em contrapartida, uma vez que se cause uma mesma perturbação no sistema a partir do estado de equilíbrio no qual o pêndulo está apontando no sentido oposto ao da força gravitacional rapidamente o pêndulo se acelera em sentido oposto ao do do ponto inicial. O primeiro equilíbrio é um exemplo de equilíbrio estável, o segundo instável. Nesse exemplo, o sistema pêndulo rígido e atração gravitacional não foi bem formalizado e esse exemplo se baseia na compreensão intuitiva do sistema, porém cumpre com o objetivo de exercitar a visualização de um experimento mental que exemplifica os conceitos explorados neste texto.

Para uma maior compreensão do sistema pêndulo simples com amortecimento incluindo a análise de forças e a solução da equação diferencial que modela esse sistema pode se verificar a vídeo aula do professor Jeffrey Chasnoff da universidade de Hongkong sobre o tema (Simple Pendulum with Friction and Forcing — Lecture 27 — Differential Equations for Engineers) e o vídeo introdutório sobre equações diferenciais do professor Grant Sanderson (Visão Geral sobre Equações Diferenciais – Capítulo 1) que utilizam como exemplo a equação do pêndulo amortecido. Neste momento definirei conceitos que servem para compreender a importância dos pontos fixos de um sistema dinâmico para se compreender o comportamento global deste mesmo sistema.

Neste momento serão apresentados os conceitos de espaço estável e espaço instável que no contexto de EDOs lineares tem relação direta com o comportamento numérico dos métodos de integração discreta de EDOs, e há bons métodos analiticos para serem caracterizados completamente e serem utilizados para fazer análises qualitativas globais do sistema.

Definição 6 *Espaço estável e instável de um espaço topológico sob uma função. Seja X Um espaço topológico e seja $f\colon X \to X$ um homeomorfismo, ou seja, uma aplicação bijetiva de X em X. seja p um ponto fixo de X sob f, é dito espaço estável de p o conjunto de pontos q que satisfazem*

$$W^s(f,p) = \{q \in X : f^n(q) \to p \text{ quando } n \to \infty\}. \tag{18}$$

E o espaço instável é dado pelo conjunto de pontos q que satisfazem

$$W^u(f,p) = \{q \in X : f^{-n}(q) \to p \text{ quando } n \to \infty\}. \tag{19}$$

Esta é a definição para um espaço topológico generalizado que possui pelo menos a propriedade de convergência pontual. Isso mostra que estabilidade é uma questão que pode ir muito além do que pode ser modelado por sistemas lineares que podem no geral ser completamente descritos por uma transformação linear. Porém, aqui estamos interessados em utilizar ferramentas de álgebra linear para tirar boas conclusões utilizando essa definição mais geral.

Primeiramente, o que podemos fazer é trocar o homeomorfismo generalizado entre espaços topológicos por um operador linear que seja um automorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ no caso A posto completo. Desse modo, é possível nos propormos a investigar a seguinte hipótese, seriam estes espaços espaços vetoriais? e seriam estes subespaços de $\mathbb{R}$?

A resposta é afirmativa. Porém, primeiramente é necessário demonstrar que o espaço estável pelo método de Euler de uma EDO linear é espaço vetorial (com estável pelo método de Euler refiro-me à estável quando f é a iteração do método de Euler). Primeiramente, irei demonstrar que se x_1 é elemento do espaço estável e x_2 é elemento do espaço estável então $x_1 + x_2$ é elemento do espaço estável.

Lembremos que se A é posto completo então $Ax = 0$ se e somente se $x = 0$, logo dizer que x é elemento do espaço estável no contexto de EDOs lineares é dizer que dado a sequência $x_{n+1} = x_n + Ax_n$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Porém, Ax representa um operador linear de $\mathbb{R}^n$. Logo,

$$x_n + Ax_n = Ix_n + Ax_n = (A + I)x_n \tag{20}$$

Assim,

$$x_{n+1} = (A + I)x_n \tag{21}$$

Pondo $A + I \doteq A'$, pode se escrever:

$$\lim_{n\to\infty} A'^n x_1 = 0 \;\; e \;\; \lim_{n\to\infty} A'^n x_2 = 0. \tag{22}$$

Desse modo,

$$\lim_{n\to\infty} A'^n x_1 = 0 + \lim_{n\to\infty} A'^n x_2 = 0, \tag{23}$$

o que equivale a

$$\lim_{n\to\infty} A'^n x_1 + A'^n x_2 = 0. \tag{24}$$

Novamente, usando que Ax representa um operador linear de $\mathbb{R}^n$, $A'^n x$ também representa um operador linear de $\mathbb{R}^n$. Portanto,

$$A'^n x_1 + A'^n x_2 = A'^n(x_1 + x_2). \tag{25}$$

Assim sendo,

$$\lim_{n\to\infty} A'^n x_1 + A'^n x_2 = \lim_{n\to\infty} A'^n(x_1 + x_2) = 0. \tag{26}$$

Logo, se x_1 é elemento do espaço estável e x_2 é elemento do espaço estável x_1+x_2 também é. Resta demonstrar que se x é elemento do espaço estável αx também é. Bom, como $A'^n x$ é transformação linear $(A'^n \alpha x) = (A'^n x)\alpha$, logo deve valer que:

$$\lim_{n\to\infty} A'^n \alpha x = \alpha \lim_{n\to\infty} A'^n x = 0. \tag{27}$$

Logo de fato temos que o espaço estável é subespaço de $\mathbb{R}^n$. A demonstração de que o espaço instável é subespaço é análoga e será omitida. Uma vez que temos que o espaço estável e o espaço instável são espaços vetoriais, nada mais natural do que encontrar uma base para estes espaços, por simplicidade neste momento irei mostrar um procedimento para se obter uma base para estes espaços para o caso A diagonalizável [Perko, 2013].

Se v é autovetor de A, isso significa que existe $\lambda \in \mathbb{R} \mid Av = \lambda v$ ademais se v é autovetor de A v é necessariamente autovetor de $A' = A + I$ pois $(A + I)v = \lambda v + v = (\lambda + 1)v$. Sendo $\lambda = -1$, nota-se que a nossa sequência converge imediatamente para $\bar{x} = 0$. De modo geral, $-1 < \lambda < 0$ teremos o decaimento exponencial de v após aplicações sucessivas da transformação $A + I$ assim necessariamente convergindo para o ponto fixo $\bar{x} = 0$. Substituindo-se a iteração do método de Euler por $f = x + \frac{A}{\lambda'}x$ sendo λ' o maior autovalor em módulo de A, todos os autovalores de $\frac{A}{\lambda'}$ serão menores que 1 em módulo e necessariamente conforme $n \to \infty$, $f^n(x) \to 0$ para $\lambda < 0$, e também valerá que necessariamente ira divergir para todo autovetor associado a um autovalor positivo. Assim, nossa nova iteração f é critério de decisão de estabilidade, e analogamente a demonstração de que o espaço Euler estável é subespaço pode se demonstrar que o espaço estável é subespaço.

Uma vez que temos que nosso objeto de estudo possui a estrutura de subespaço, é natural perguntar um bom processo para encontrarmos uma base, e a resposta é novamente sim. No geral o espaço gerado pelos auto vetores associados aos autovalores com parte real negativa da matriz A será equivalente ao espaço estável e de fato estes vetores formarão uma base para o subespaço. Os autovetores associados aos autovalores com parte real positiva formarão uma base para o espaço instável e mais no geral ainda caso a matriz A seja diagonalizável a soma direta do espaço instável com o espaço estável será equivalente a $\mathbb{R}^n$. Porém, no caso não diagonalizável haverá um terceiro espaço gerado pelos auto vetores generalizados da matriz associados aos auto valores puramente imaginários chamado espaço central. Não irei definir o espaço central formalmente ou as implicações da existência de um espaço central em um sistema dinâmico linear porém darei uma explicação quanto a intuição sobre o papel do espaço central no comportamento de um sistema dinâmico linear.

Em $\mathbb{R}^2$, é simples perceber que uma matriz de rotação pura possui necessariamente autovalores complexos com norma igual a 1. O que ocorre é que de fato esse número complexo se relaciona com um espaço invariante relacionado a uma orbita de rotação e a informação quanto as propriedades dessa orbita estão codificadas no argumento de seus autovalores. Autovalores complexos relacionados a matrizes 2x2 normalmente estão relacionados a uma rotação com um fator de escala: um fator de escala positivo descreve uma rotação com afastamento de um ponto fixo e um fator de escala negativo descreve uma rotação com atração. Nesses casos, as órbitas terão formato espiralado conforme se aplica a iteração do método de Euler ou qualquer outro integrador no geral.

Matrizes não diagonalizáveis quando possuem autovalores complexos e quando escritas na forma de Jordan Padrão terão blocos de Jordan 2x2 que codificam esse comportamento orbital em um eixo generalizado em $\mathbb{R}^n$ com alguma forma de simetria cilíndrica. Então, intuitivamente pode se associar o espaço central a um elemento responsável pela formação de órbitas espiralares ou circulares para as curvas integrais de uma EDO linear.

2.9 Relação entre Estabilidade e Rigidez (***Stiffness***) de EDOs

Esta seção é baseada no capitulo 4 das notas de aula de Greg Fasshauer referentes ao curso Numerical Methods for Differential Equations ministrado em Illinois Institute of Technology no outono de 2005 que podem ser consultadas em M472 Handouts and Worksheets [Fasshauer, 2005].

A noção de estabilidade que estávamos usando até agora é baseada no estudo de um operador sobre elementos de um espaço topológico, brevemente foi discutido que pode-se especificar o espaço topológico como $\mathbb{R}^n$ e o operador como a iteração do método de Euler, e com isso conseguimos aplicar propriedades de espaço vetorial para o problema da estabilidade de EDOs lineares (o que inclusive, nos dá uma explicação convincente para alunos que acabaram de fazer álgebra linear quanto ao motivo destas EDOs serem chamadas de lineares).

Foi definido o conceito de espaço estável e espaço instável, definimos como o espaço estável pelo método de Euler o espaço para o qual o método de Euler converge para um ponto fixo. Mostramos que para os casos onde a matriz do problema é diagonalizável sob $\mathbb{R}$ o espaço estável é subespaço de $\mathbb{R}^n$ e posteriormente ainda que os autovetores da matriz associados a autovalores negativos sempre estão no espaço estável pelo método de Euler bastando que o passo da iteração de Euler seja suficientemente pequena. Foi mostrado também que a iteração com passo igual ao inverso do maior autovalor em modulo deve funcionar para garantir a estabilidade. Aqui esta sendo tratado da sensibilidade do problema a condições iniciais, repare que em toda vizinhança de um ponto do espaço estável existe um elemento do espaço instável, basta somar $\varepsilon v'$ ao valor inicial v sendo v' elemento do espaço instável.

Neste momento serão discutidos tipos de estabilidade e instabilidade que podem ocorrer uma vez que temos um problema estável. Aqui serão discutidas duas noções de estabilidade importantes para se definir e estudar um problema *stiff*. Aqui algumas definições e resultados estarão um pouco fora do escopo dos resultados que consegui mostrar neste texto utilizando álgebra linear e cálculo elementar, porém quando aparecerem serão dadas boas referências para compreender mais a fundo, o leitor também será munido com um pequeno esclarecimento quanto a intuição que permite a compreensão do resultado.

Definição 7 *Estabilidade absoluta de um integrador numérico.*

Um integrador numérico é absolutamente estável com relação a um problema de valor inicial se é resistente a pequenas variações das condições iniciais independentemente do tamanho do passo utilizado no integrador.

Uma das consequências de estabilidade absoluta é que duas condições iniciais ε-próximas devem convergir para o mesmo equilíbrio, e necessariamente esta convergência deve independer do tamanho do passo h.

Definição 8 *Estabilidade condicional.*

Um integrador numérico é condicionalmente estável com respeito a um problema de valor inicial se é requerido que o tamanho de passohseja pequeno o suficiente para que a estabilidade seja garantida. O conjunto de escolhas possíveis de h com a propriedade de garantir a estabilidade, este conjunto é chamado de região de estabilidade absoluta.

Repare que anteriormente foi mostrado que é necessário para que a estabilidade seja garantida que primeiramente o problema esteja sendo estudado no espaço estável. Segundo que quando o problema é analisado dentro do auto-espaço associado a um autovalor real negativo é necessário que $|1 + \lambda h| < 1$, e foi demonstrado também que o método de Euler será estável se essa inequação valer em especial para o maior autovalor estável(ou seja, $|1 + \lambda' h| < 1$).

Logo, no geral mesmo para um problema de valor inicial definido no espaço estável de um problema o método de Euler necessariamente condicionalmente estável no máximo. A seguir, será demonstrado que em contrapartida o método de Euler implícito é incondicionalmente estável uma vez que o problema seja estável.

Da iteração do método de Euler implícito,

$$x_{n+1} = x_n + Ahx_{n+1}. \tag{28}$$

Logo,

$$x_{n+1} - Ahx_{n+1} = x_n, \tag{29}$$

e, então,

$$(I - Ah)x_{n+1} = x_n \tag{30}$$

Se A é invertível e os autovalores de A são reais negativos, então $(I - Ah)$ será invertível e

$$x_{n+1} = (I - Ah)^{-1}x_n \tag{31}$$

Logo, x_n pelo método pode ser obtido da seguinte forma:

$$x_n = ((I - Ah)^{-1})^n x_0. \tag{32}$$

Os autovalores de $(I - Ah)$ devem se todos reais positivos maiores que 1. Assim, os autovalores de $((I - Ah)^{-1})$ serão os inversos destes números maiores que 1. Logo a norma de Frobenius de $((I - Ah)^{-1})$ sera um número positivo menor que 1. Portanto, deve valer que $\|((I - Ah)^{-1})^n x_0\| \leq \alpha^n \|x_0\|$ em que $0 < \alpha < 1$. Assim,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0. \tag{33}$$

Dessa forma, está demonstrado que uma vez que temos um problema linear estável o método de Euler implícito é incondicionalmente estável.

Stiffness não é um fenômeno precisamente definido na literatura a qual tive acesso durante minha pesquisa porém há uma série de características de uma equação diferencial que convergem a um consenso quanto à rigidez de um problema.

1. Um problema é *stiff* se possui grandes variações de escala de tempo e algumas componentes da solução decaem muito mais rápido do que outras.

2. Um problema é *stiff* se o tamanho de passo adequado é escolhido a partir de

condições de estabilidade ao invés de condições de acurácia.

3. Um problema é *stiff* se métodos explícitos não funcionam ou funcionam muito devagar.

4. Um problema linear é *stiff* se todos os seus autovalores possuem parte real negativa porém a razão entre a magnitude de seu maior e seu menor autovalor em módulo é grande.

5. Mais geralmente, um problema é *stiff* se os autovalores da aproximação de primeira ordem do problema (Jacobiano no caso de problemas em $\mathbb{R}^n$ por exemplo) variam em ordem de magnitude quanto ao seu módulo.

Definição 9 *A-Estabilidade Um integrador numérico é A-Estável com relação a um problema de valor inicial se sua região de estabilidade absoluta é a metade do plano complexo na qual a parte real é negativa $\mathbb{C}^-$.*

.

A-Estabilidade é equivalente a estabilidade incondicional para o problema de valor inicial:

$$y'(t) = \lambda y(t), t \in [0, T], y_0 = y(0). \tag{34}$$

Com essas definições, discussões e teoremas, é possível agora enunciar um resultado que é extremamente para a compreensão da importância dos métodos implícitos de integração numérica de equações diferenciais. O próximo teorema nos da a garantia de que necessariamente se um método converge adequadamente e de forma eficiente quando lidando com problemas *stiff* deve valer que este método é implícito.

Teorema 1 *(Segunda barreira de Dahlquist) Se um método de passo único é A-Estável necessariamente este método é implícito, ademais o método deve ser no máximo de segunda ordem [Wanner and Hairer, 1996].*

Há definições e resultados complementares para a compreensão mais profunda de como os problemas *stiff* em pesquisa e ciências aplicadas são lidados. Por exemplo o conceito de método quase A-Estável ($A(\alpha)-$estável), que são métodos que selecionam o tamanho de passo (e direção no caso complexo) adaptativamente em função dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema que representa a aproximação de primeira ordem do sistema dinâmico. Porém, a partir das discussões feitas ao longo deste capitulo é esperado que o leitor entenda a importância dos métodos implícitos de modo a incentivar o desenvolvimento pelo interesse em se aprofundar no tema a partir das referências inseridas e alguma pesquisa individual.

3 Considerações Finais

De fato foi mostrado ao longo desse trabalho que é possível trazer uma introdução adequada porém limitada quanto ao tópico de equações diferenciais *stiff* baseadas em álgebra linear e cálculo diferencial elementar. Isto restringindo-se o domínio de estudos aos problemas de EDOs lineares. Em alguns momentos, surgiram dificuldades para definir objetos de estudo e metodologia sem a utilização de ferramentas matemáticas mais sofisticadas porém quando foi este o caso foi possível apresentar um introdução a partir de noções intuitivas.

A partir deste trabalho, foi possível obter aprendizado sobre como explicar tópicos complexos com ferramentas elementares e compreender as limitações que são impostas por esta restrição. Desse modo, pode-se introduzir rigorosamente o tópico, porém com desafios que foram encontrados ao tentar explicar noções mais gerais. Como parte da conclusão, é possível apontar a hipótese de que em um próximo trabalho dentro de meu projeto de estágio em pesquisa deve ser possível explicar tópicos como: equilíbrio no caso não linear, hipóteses necessárias para a convergência de integradores numéricos no caso não linear e introdução a controle, a partir de uma breve introdução à topologia dos espaços métricos e operadores diferenciais.

Referências

Vincent Ardourel and Julie Jebeile. Numerical Instability and Dynamical Systems. *European Journal for Philosophy of Science*, 11(2):49, 2021.

Steven L. Brunton. Matrix Systems of Differential Equations. https://www.youtube.com/watch?v=Vtijyyo5fKI, 2022a. [Online; accessed 26-June-2023].

Steven L. Brunton. Solving Systems of Differential Equations with Eigenvalues and Eigenvectors. https://youtu.be/Zwb5eiYcL8w, 2022b. [Online; accessed 26-June-2023].

Greg Fasshauer. Lecture Notes in Numerical Methods for Differential Equations, March 2005.

Michael Charles Irwin. *Smooth Dynamical Systems*, volume 17. World Scientific, 2001.

Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.

Walter Rudin et al. *Principles of Mathematical Analysis*, volume 3. McGraw-Hill New York, 1976.

Gerhard Wanner and Ernst Hairer. *Solving Ordinary Differential Equations II*, volume 375. Springer, 1996.