



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



ANNA CLARA DE OLIVEIRA CLARO AMÂNCIO

Medida de irregularidade para imagens em tons de cinza

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita.

Campinas
2022

Resumo

Esse texto tem por objetivo entender os fundamentos de processamento de imagens, com foco em imagens em tons de cinza. Nesse contexto, foram estudados diferentes tipos de ruído e medidas quantitativas para imagens. As medidas estudadas para imagens em tons de cinza foram: Índice de Irregularidade, Structural Similarity Index e Peak Signal to Noise Ratio.

Abstract

This text aims to understand the fundamentals of image processing, focusing on grayscale images. In this context, different types of noise and quantitative measures for images were studied. The measurements studied for grayscale images were: Irregularity Index, Structural Similarity Index and Peak Signal to Noise Ratio.

Conteúdo

1	Introdução	5
2	Fundamentos	5
2.1	O que são Imagens?	5
2.2	Imagens em Tons de Cinza	5
2.3	Imagens Coloridas	5
3	Ruídos e Medidas Quantitativas em Imagens	6
3.1	Ruído	6
3.2	Ruído Gaussiano	6
3.3	Ruído Sal e Pimenta (Ruído S&P)	6
3.4	Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR)	7
3.5	Structural Similarity Index (SSIM)	8
4	Medida de Irregularidade	8
4.1	Distância Pixel a Pixel	8
4.2	Métrica de Wasserstein	8
4.3	Índice de Irregularidade	9
5	Resultados Computacionais	9
5.1	Medida de Irregularidade	10
5.2	Structural Similarity Index (SSIM)	10
5.3	Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR)	11
5.4	Structural Similarity Index (SSIM) VS Medida de Irregularidade	12
6	Conclusão	12

1 Introdução

Há a presença de imagens em tudo o que nos rodeia, portanto, o estudo de imagens e de seu processamento é de grande interesse. Uma imagem \mathbf{I} pode ser matematicamente entendida como uma função que sai de conjunto de pontos (D) e vai para um conjunto de valores (V) e os valores que essa função assume em V podem ser alterados na aquisição e na transmissão da imagem. Quando isso acontece, dizemos que a imagem foi degradada. Os Ruídos são uma das fontes de degradação conhecidas e visualmente produz um efeito granulado na imagem afetada. Para estudá-los, medidas quantitativas foram criadas sendo duas delas: *SSIM* (Structural Similarity Index) e *PSNR* (Peak Signal-to-Noise Ratio).

Além das medidas tradicionais, Valle *et al.* introduziram recentemente uma medida chamada Índice de Irregularidade [2]. O Índice de Irregularidade é dado por uma diferença entre a Métrica de Wasserstein \mathcal{W}_p e Distância Pixel a Pixel \mathcal{D}_p e tem como objetivo quantificar distorções introduzidas por operadores da morfologia matemática. Nesse projeto, analisamos a capacidade das medidas *SSIM* e *PSNR* e o Índice de Irregularidade em quantificar o ruído introduzido numa imagem.

O trabalho está dividido em 6 seções. A próxima seção aborda fundamentos do processamento de imagens. A terceira seção discorre sobre Ruídos e Medidas Quantitativas em imagens (*SSIM* e *PSNR*). A quarta seção apresenta e explica a Distância Pixel a Pixel, a Métrica de Wasserstein e a Medida de Irregularidade. A quinta seção mostra os resultados computacionais obtidos dos experimentos realizados. Por fim, a sexta seção conclui este trabalho.

2 Fundamentos

2.1 O que são Imagens?

Uma imagem \mathbf{I} pode ser entendida como uma função que sai de conjunto de pontos (D) e vai para um conjunto de valores (V), ou seja,

$$\mathbf{I} : D \rightarrow V.$$

Quando D e V são finitos a imagem é chamada imagem digital. Uma imagem contém um ou mais canais de cor que definem sua intensidade num determinado pixel.

2.2 Imagens em Tons de Cinza

Imagens em tons de cinza são imagens monocromáticas, ou seja, possuem apenas um canal que determina sua intensidade. Nesse caso, a intensidade da imagem assume valores numa escala que vai do preto (zero) ao branco (valor máximo). Numa imagem de 8 bits, a escala assume valores em $\{0, 1, 2, \dots, 255\}$.

2.3 Imagens Coloridas

Imagens coloridas possuem mais que um canal que representa cor. No sistema RGB (red, green and blue) uma imagem consiste em três componentes individuais: vermelho, verde e azul. Podemos estender as aplicações em imagens em tons de cinza para imagens coloridas, tratando cada uma das componentes individualmente. Nesse caso, porém, há perda de informação no tratamento das cores.

3 Ruídos e Medidas Quantitativas em Imagens

3.1 Ruído

Chamamos de Ruído a variação do valor verdadeiro de um pixel por uma quantidade aleatória obtida devido a fatores externos e internos no processamento de uma imagem. As fontes principais de ruídos provém na aquisição e na transmissão da imagem. Na aquisição, as imagens são corrompidas devido aos mau funcionamento de sensores responsáveis por sua obtenção. Além disso, tais sensores são afetados pelas condições do ambiente e pela própria estrutura do sensor em si. Na transmissão, as imagens são corrompidas devido a interferências no canal utilizado.

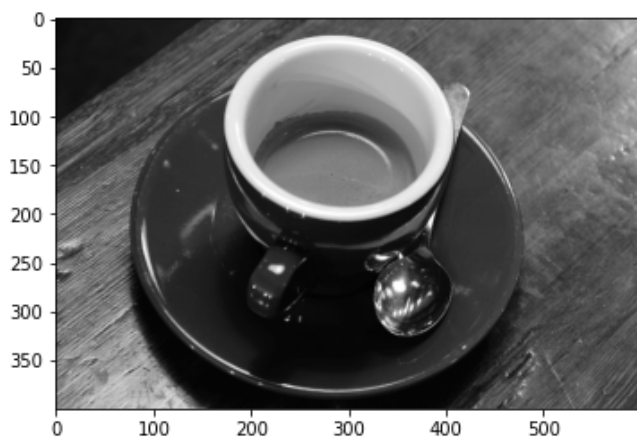
Para os ruídos estudados, vamos assumir que eles independem das coordenadas espaciais e não é correlacionado com a imagem que apresenta ruído, ou seja, não existe relação entre os valor de intensidade do pixel e o valor de ruído.

3.2 Ruído Gaussiano

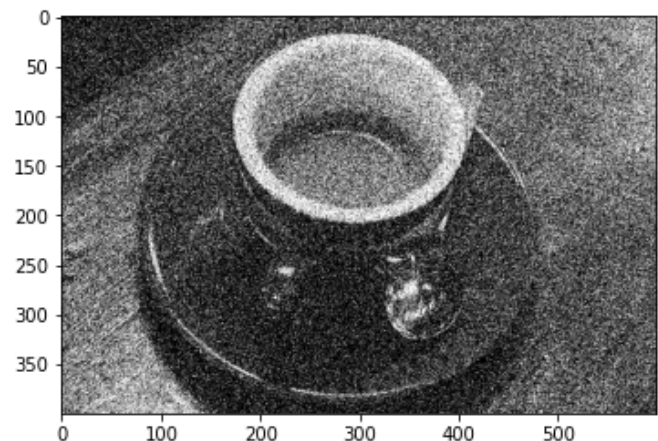
Nomeado em homenagem a Carl Friedrich Gauss, o Ruído Gaussiano acontece devido a iluminação fraca, alta temperatura e falhas na transmissão. O ruído em questão apresenta uma função de densidade de probabilidade igual a distribuição gaussiana (distribuição normal). Logo, os valores que o ruído assume são distribuídos de acordo com a função densidade de probabilidade:

$$p_G(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

onde z é o tom de cinza (valor que a função $\mathbf{I} : D \rightarrow \mathbf{V}$ assume em \mathbf{V}), μ é o valor médio e σ o desvio padrão. A figura 1 mostra um exemplo de uma imagem corrompida pelo Ruído Gaussiano.



(a) Imagem A.



(b) Imagem \tilde{A} com Ruído Gaussiano com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 0.1$.

Figura 1: Ruído Gaussiano.

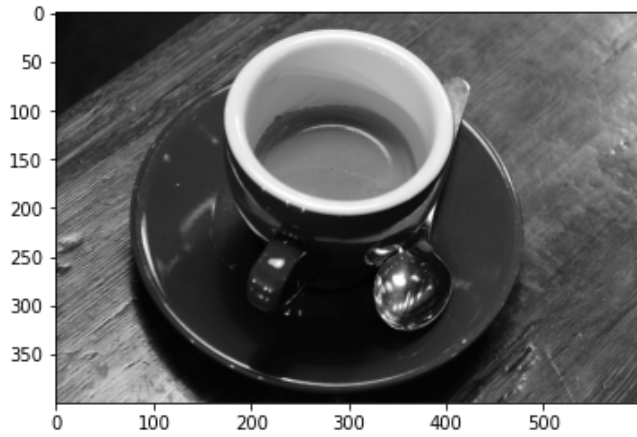
3.3 Ruído Sal e Pimenta (Ruído S&P)

O Ruído Sal e Pimenta, também conhecido como "*impulse noise*", é um ruído causado muitas vezes por perturbações repentinas no sinal da imagem. Como o sinal é perdido, o pixel assume o valor máximo ou o valor mínimo da faixa dos valores de pixel da imagem (faixa de valores de \mathbf{I} em \mathbf{V}). Visualmente, ele se apresenta como pontos brancos e pretos dispersos na imagem. Uma versão \mathbf{J} de uma imagem em tons

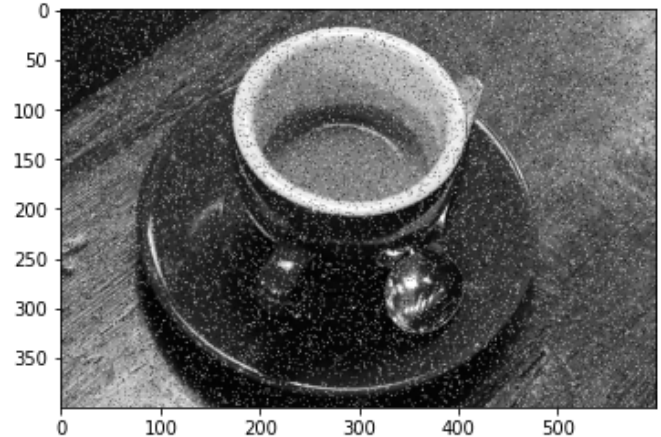
de cinza $\mathbf{I} : D \rightarrow \mathbf{V}$ corrompida pelo Ruído Sal e Pimenta é obtida como segue em que $p_r \in [0, 1]$ e $p \sim \mathcal{U}[0, 1]$, ou seja, p é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$:

$$\mathbf{J}(z) = \begin{cases} \max \mathbf{V}, & \text{se } p < p_r, \\ \min \mathbf{V}, & \text{se } \frac{p_r}{2} \leq p < p_r, \\ \mathbf{I}(z), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O valor p_r representa a probabilidade do Ruído Sal e Pimenta. A figura 2 mostra um exemplo de uma imagem corrompida pelo Ruído Sal e Pimenta.



(a) Imagem A.



(b) Imagem \tilde{A} com Ruído Sal e Pimenta com $p_r = 0.1$.

Figura 2: Ruído Sal e Pimenta.

3.4 Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR)

Peak Signal-to-Noise Ratio é uma expressão para a relação entre a potência máxima possível de um sinal e a potência do ruído de distorção que afeta a qualidade de sua representação. O *PSNR* geralmente é expresso como uma quantidade logarítmica usando escala decibéis e quanto maior o valor obtido, mais parecidas as imagens comparadas são.

A fórmula é dada por:

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{MAX_I^2}{MSE}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}}\right),$$

ou ainda,

$$PSNR = 20 \cdot \log_{10}(MAX_I) - 10 \cdot \log_{10}(MSE),$$

onde MAX_I é valor máximo possível de pixel da imagem \mathbf{I} e MSE é o Erro Quadrático Médio, dado por:

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} [\mathbf{I}(i, j) - \mathbf{J}(i, j)]^2,$$

com m e n dimensões da imagem \mathbf{I} (imagem sem ruído) e \mathbf{J} (imagem corrompida).

3.5 Structural Similarity Index (SSIM)

O *Structural Similarity Index* quantifica o quanto a qualidade de uma imagem foi degradada medindo a semelhança entre duas imagens (imagem sem degradações e a degradada).

O *SSIM* considera a degradação da imagem como uma mudança percebida na informação estrutural (ideia de que os pixels têm fortes interdependências, especialmente quando estão espacialmente próximos), ao mesmo tempo em que incorpora fenômenos perceptivos, como luminância e contraste.

Essa medida assume um valor entre -1 e 1. O valor 1 indica que as imagens fornecidas são muito semelhantes ou iguais e o valor -1 indica que as imagens fornecidas são muito diferentes. Frequentemente, esses valores são ajustados para estarem na faixa $[0, 1]$, onde os extremos têm o mesmo significado.

Sua fórmula é dada por:

$$SSIM(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = \frac{(2\mu_I\mu_J + c_1)(2\sigma_{IJ} + c_2)}{(\mu_I^2 + \mu_J^2 + c_1)(\sigma_I^2 + \sigma_J^2 + c_2)}$$

onde μ_I é a *Pixel sample mean* de \mathbf{I} , μ_J é a *Pixel sample mean* de \mathbf{J} , σ_I^2 é a variância de \mathbf{I} , σ_J^2 é a variância de \mathbf{J} , σ_{IJ} é a covariância de \mathbf{I} e \mathbf{J} , $c_1 = (k_1L)^2$ e $c_2 = (k_2L)^2$ são duas variáveis para estabilizar a divisão, L é o *dynamic range* dos valores de pixel (normalmente $2^{\#\text{bits por pixel}} - 1$), $k_1 = 0.01$ e $k_2 = 0.03$ por definição.

4 Medida de Irregularidade

Considere que uma imagem \mathbf{I} é submetida a algum operador $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, resultando a imagem alterada $\mathbf{J} = \Psi(\mathbf{I})$.

4.1 Distância Pixel a Pixel

Definimos por distância pixel a pixel de \mathbf{I} e \mathbf{J} como o operador $\mathcal{D}_p : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty)$ dado por:

$$\mathcal{D}_p = \left(\sum_{x \in \mathcal{D}} d^p(\mathbf{I}(x), \mathbf{J}(x)) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

4.2 Métrica de Wasserstein

Nomeada em homenagem ao matemático russo Leonid Vaserstein, essa métrica nos fornece uma noção de distância entre distribuições de probabilidades e é formulada como um problema de transporte.

Queremos minimizar o custo em transformar a imagem \mathbf{I} na imagem \mathbf{J} . Seja $V(\mathbf{I}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $V(\mathbf{J}) = \{u_1, \dots, u_m\}$ os valores que a função $\mathbf{I} : D \rightarrow \mathbf{V}$ e $\mathbf{J} : D \rightarrow \mathbf{V}$ assumem em \mathbf{V} . Seja $f_i = \text{Card}(\{x : \mathbf{I}(x) = v_i\})$ o número de pixels de valor v_i na imagem \mathbf{I} para $i = 1, \dots, n$ e $g_j = \text{Card}(\{x : \mathbf{J}(x) = u_j\})$ o número de pixels de valor u_j na imagem \mathbf{J} para $j = 1, \dots, m$. Dado $p \geq 1$, o custo para transformar um valor v_i de \mathbf{I} num valor u_j de \mathbf{J} é dado por $c_{ij} = d^p(v_i, u_j) \quad \forall i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, m$. A métrica de Wasserstein $\mathcal{W}_p : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty)$ é dada por:

$$\mathcal{W}_p = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}^* \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

onde x_{ij}^* é a solução do seguinte problema de transporte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}, \\ \text{sujeito a } \sum_{j=1}^m x_{ij} = f_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = g_j, \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

4.3 Índice de Irregularidade

O Índice de Irregularidade é dado por uma relação entre a Distância Pixel a Pixel e a Métrica de Wasserstein. Podemos defini-lo como o operador $\Phi_p^g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow [0, 1]$ dado por:

$$\Phi_p^g(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = \frac{\mathcal{D}_p(\mathbf{I}, \mathbf{J}) - \mathcal{W}_p(\mathbf{I}, \mathbf{J})}{\mathcal{D}_p(\mathbf{I}, \mathbf{J})}, \mathcal{D}_p(\mathbf{I}, \mathbf{J}) \neq 0$$

e $\Phi_p^g(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = 0$ se $\mathcal{D}_p(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = 0$. Equivalentemente, temos:

$$\Phi_p^g(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{D}_p(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = 0, \\ 1 - \frac{\mathcal{W}_p(\mathbf{I}, \mathbf{J})}{\mathcal{D}_p(\mathbf{I}, \mathbf{J})}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $\Phi_p(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = \Phi_p(\mathbf{J}, \mathbf{I})$, $0 \leq \Phi_p(\mathbf{I}, \mathbf{J}) \leq 1$ e que quanto maior a irregularidade de $\mathbf{J} = \Psi(\mathbf{I})$ maior o valor esperado para $\Phi_p(\mathbf{I}, \mathbf{J})$.

5 Resultados Computacionais

Aplicamos o Ruído Gaussiano e o Ruído Sal e Pimenta nas 6 imagens apresentadas na Figura 3 com o objetivo de estudar possíveis relações entre as medidas estudadas na seção anterior. Para o Ruído Gaussiano, consideramos $\mu = 0$ e uma variância que vai de 0,00001 a 0.3. Para o Ruído Sal e Pimenta consideramos uma probabilidade p_r que vai de 0,00001 a 0.3.

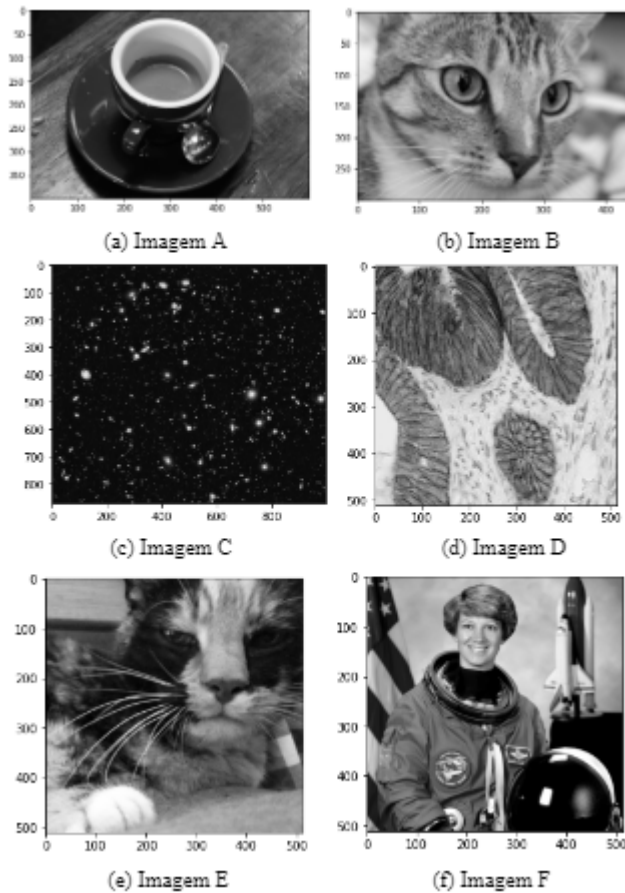


Figura 3: Imagens Utilizadas

5.1 Medida de Irregularidade

A Figura 4 apresenta os resultados das Medidas de Irregularidade obtidos para as imagens apresentadas na Figura 3.

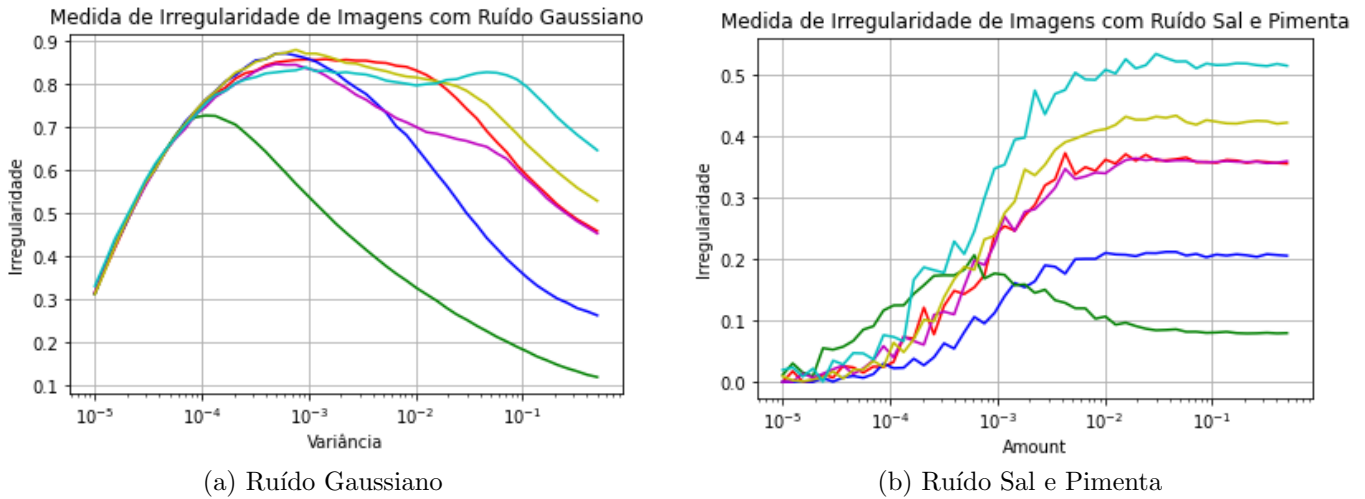


Figura 4: Medida de Irregularidade de imagens com ruído Gaussiano e Ruído Sal e Pimenta onde a curva em vermelho corresponde à imagem A, a em azul à imagem B, a em verde à imagem C, a em magenta à imagem D, a em amarelo à imagem E e a em ciano à imagem F.

Note que os valores de Irregularidade são influenciados pela quantidade de ruído aplicado às imagens e que cada imagem apresenta uma curva com comportamento distinto e valores discrepantes das demais. Dessa forma, a medida é mais sensível à imagem do que ao ruído estudado.

5.2 Structural Similarity Index (SSIM)

A Figura 5 apresenta os resultados de Structural Similarity Index obtidos para as imagens apresentadas na Figura 3.

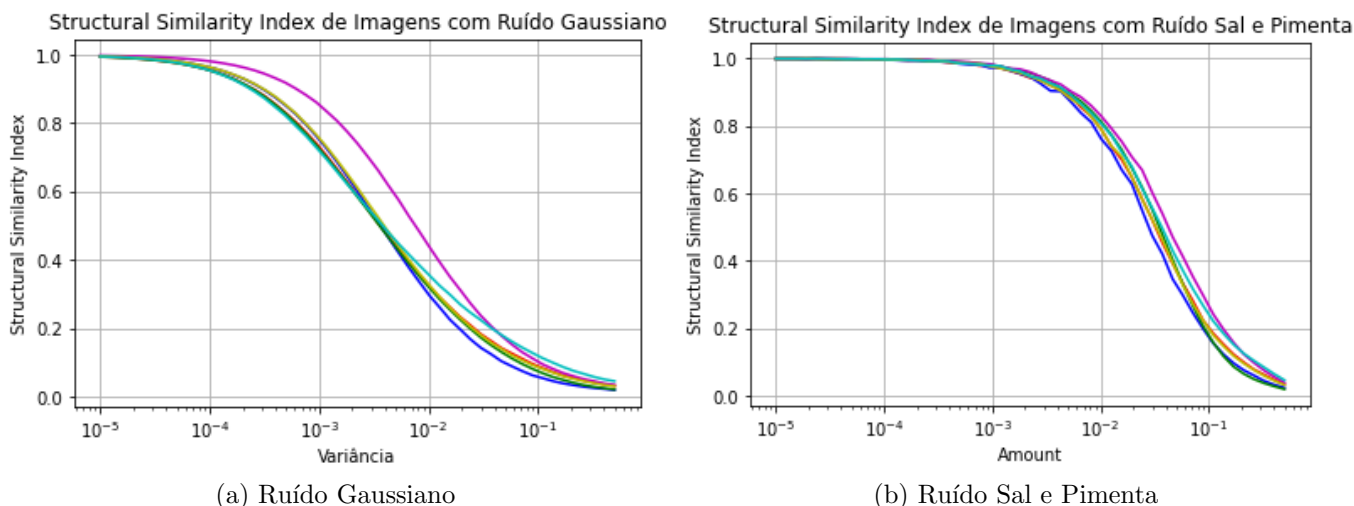


Figura 5: Structural Similarity Index de imagens com ruído Gaussiano e Ruído Sal e Pimenta onde a curva em vermelho corresponde à imagem A, a em azul à imagem B, a em verde à imagem C, a em magenta à imagem D, a em amarelo à imagem E e a em ciano à imagem F.

Note que os valores de *SSIM* são influenciados pela quantidade de ruído aplicado às imagens e que cada imagem apresenta uma curva com o mesmo comportamento e valores próximos das demais. Dessa forma, a medida é mais sensível ao ruído do que à imagem estudada.

5.3 Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR)

A Figura 6 apresenta os resultados de Peak Signal-to-Noise Ratio obtidos para as imagens apresentadas na Figura 3.

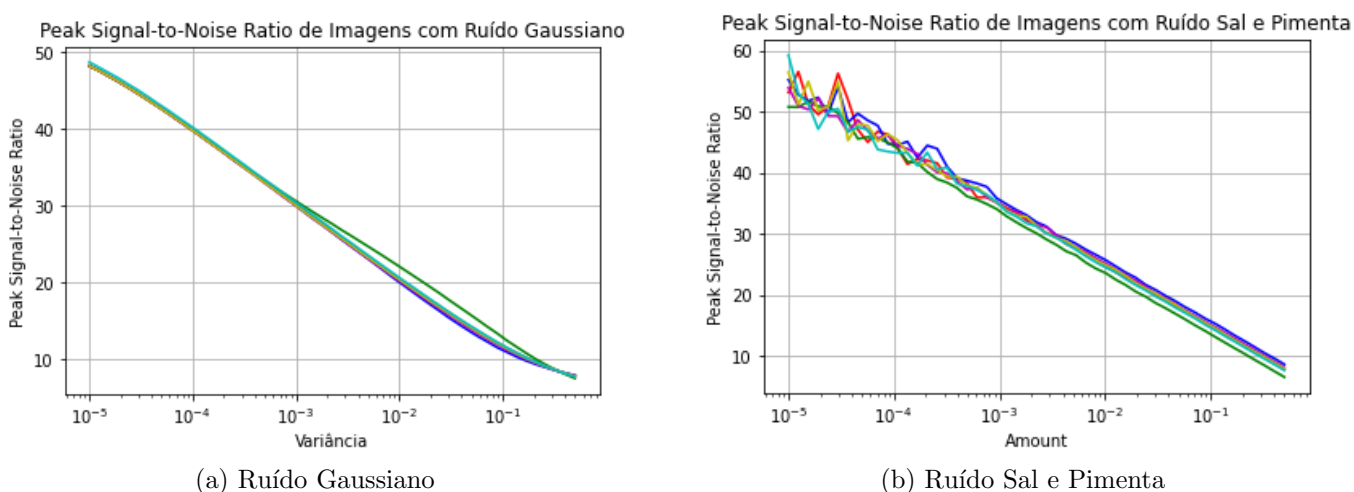


Figura 6: Peak Signal-to-Noise Ratio de imagens com Ruído Gaussiano e Ruído Sal e Pimenta onde a curva em vermelho corresponde à imagem A, a em azul à imagem B, a em verde à imagem C, a em magenta à imagem D, a em amarelo à imagem E e a em ciano à imagem F.

Note que os valores de *PSNR* são influenciados pela quantidade de ruído aplicado às imagens e que cada imagem apresenta uma curva com o mesmo comportamento e valores próximos das demais. Dessa forma, a medida é mais sensível ao ruído do que à imagem estudada.

5.4 Structural Similarity Index (SSIM) VS Medida de Irregularidade

A Figura 7 apresenta os resultados de Structural Similarity Index e de Medida de Irregularidade obtidos para as imagens apresentadas na Figura 3.

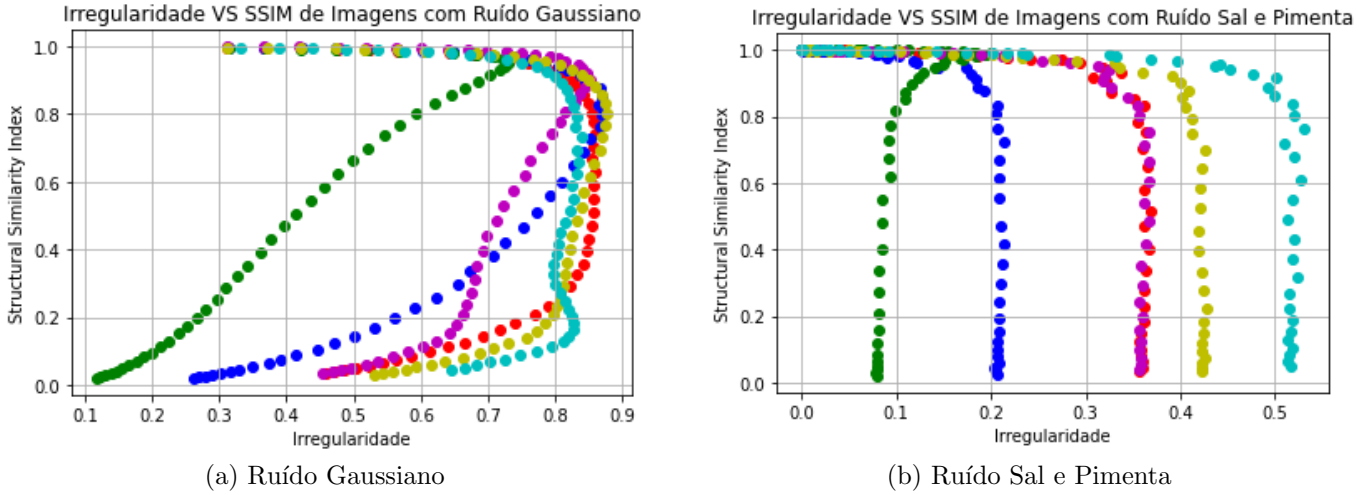


Figura 7: Irregularidade VS SSIM de imagens com Ruído Gaussiano e Ruído Sal e Pimenta onde os pontos em vermelho correspondem à imagem A, os em azul à imagem B, os em verde à imagem C, os em magenta à imagem D, os em amarelo à imagem E e os em ciano à imagem F.

Note que não se nota uma relação explícita entre as duas medidas.

6 Conclusão

Concluimos que o Índice de Irregularidade não permite analisar a influência de ruídos em uma imagem uma vez que essa medida é mais sensível à imagem do que ao ruído envolvido.

Medidas como Structural Similarity Index (SSIM) e Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) já são medidas comumente utilizadas para analisar a semelhança de imagens degradadas e não degradadas. Na degradação dada pelos Ruídos Gaussiano e Sal e Pimenta, observamos que quanto maior o valor de σ e de p_r , menor o valor apresentado nas duas medidas e quanto menor o valor de σ e de p_r , maior o valor de $SSIM$ e $PSNR$.

Concluimos, também, que não existe uma relação explícita entre as medidas Structural Similarity Index e a de Irregularidade.

Referências

- [1] Bovik A. *The Essential Guide to Image Processing*. Academic Press, second edition, 2009.
- [2] Valle M. E., Francisco S., Granero M. A., and Velasco-Forero Santiago. Irregularity index for vector-valued morphological operators. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 64(7):754–770, 2022.
- [3] Gonzalez R. C. and Wood R. E. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, third edition, 2002.