



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



PEDRO DE CARVALHO ZOTTOLO

Buracos Negros Extremos: suas propriedades a partir da Geometrotermodinâmica

Campinas
30/11/2022

PEDRO DE CARVALHO ZOTTOLO

Buracos Negros Extremos: suas propriedades a partir da Geometrotermodinâmica

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira.

Resumo

A utilização da geometrotermodinâmica, principalmente no contexto de buracos negros, mostrou-se eficaz para o entendimento das propriedades fundamentais do sistema. Partindo do princípio de que se há curvatura, então há interação no sistema, conseguimos indentificar as principais propriedades e relacioná-las com as teorias da termodinâmica. Neste sentido, o objetivo deste trabalho é estudar a relação das propriedades da termodinâmica de buracos negros extremos, focando no caso de Reissner-Nordström, com as informações obtidas a partir da geometrotermodinâmica. Verificamos a aplicabilidade dessa geometria em buracos negros e os limites impostos ou pela construção ou pela termodinâmica do sistema.

Abstract

The use of geometrothermodynamics, mainly in the context of black holes, proved to be well-founded for understanding the underlying properties of the system. Assuming that if there is curvature, then there is interaction in the system, it is possible to identify the main properties and relate them to the theories of thermodynamics. In this sense, this work aims to study the relationship between the thermodynamic properties of extremal black holes, focusing on the Reissner-Nordström case, with the information transmitted from geometrothermodynamics. We verified the applicability of this geometry in black holes and the limits imposed either by the construction or by the thermodynamics of the system.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Termodinâmica de Buracos Negros	7
2.1	Estabilidade Global versus Local	9
2.2	Propriedades	12
3	Geometrotermodinâmica	12
3.1	Aplicação em Buracos Negros	15
3.2	Limites da GTD	18
3.3	Propriedades termodinâmicas na GTD	20
4	Conclusão	20

1 Introdução

O desenvolvimento da geometria a partir da termodinâmica do sistema ganhou um foco ao conseguir explorar propriedades fundamentais de sistemas, mais ainda pelo fato de ser aplicável em sistemas não-extensíveis. Essas geometrias aproveitam do fato, muito utilizado em relatividade geral, de que curvatura significa interação, então a partir dos escalares, conseguimos estudar as interações desse sistema. Dentre essas geometrias, muitas conseguem ser aplicáveis no contexto de buracos negros, como a geometria de Ruppeiner/Weinhold, a métrica de Liu-Lü-Luo-Shao, a métrica de Fisher-Rao.

Apesar de serem bem postas nesse contexto, as geometrias de Ruppeiner e Weinhold apresentam muitas divergências em seus resultados como, na métrica de Weinhold não prevê transição de fase para o buraco negro de Kerr, enquanto em Ruppeiner previa, porém com um potencial termodinâmico bastante específico. Neste sentido, Quevedo [2007] demonstra em seu trabalho que estas divergências ocorrem pelo fato de que essas métricas não são invariantes por transformações de Legendre. Sendo assim, a utilização da geometria da geometrotermodinâmica seria mais adequada para um estudo mais profundo sobre as interações de sistema.

A análise da geometria de Ruppeiner juntamente com resultados recentes sobre as propriedades fundamentais de buracos negros, em especial para o caso de Reissner-Nordström extremo, mostrou-se útil para o entendimento mais aprofundado sobre a natureza térmica de buracos negros, ver Zottolo [2022]. Da mesma forma, este trabalho visa utilizar de métricas invariantes por transformações de Legendre, num foco para a geometrotermodinâmica, para comparar com resultados obtidos através de estudos sobre as propriedades termodinâmicas de buracos negros extremos de Reissner-Nordström.

Em um primeiro momento, revisamos as características associadas a termodinâmica de buracos negros, como a entropia, temperatura e entre outros, como também as condições de estabilidade local e global dessas soluções. Mais ainda, será retomado os recentes resultados obtidos para as propriedades de buracos negros extremos, complementando assim um estudo mais sólido sobre a termodinâmica.

Posteriormente, foi estudado o formalismo da geometrotermodinâmica e suas métricas, bem como sua aplicação em buracos negros, repetindo algumas modificações

feitas nos trabalhos sobre a geometria de Ruppeiner, para verificar a possibilidade de aplicação. Foi demonstrado que essas aproximações, em geral, não podem ser realizadas e que, neste contexto, as soluções de buracos negros precisam ser estudadas de forma independente. Contudo, verificamos as informações contidas nas métricas da geometria e seus comportamentos no caso extremo.

Por fim, as relações que podemos tirar da junção entre os resultados estudados sobre a termodinâmica e sobre a geometria foi feita de maneira satisfatória, mostrando que o estudo anterior pôde ser estendido para diferentes métricas. Durante todo esse trabalho, adotamos o sistema de unidade naturais $\hbar = c = k_B = G = 1$, como também o sinal da métrica sendo $(- + + +)$.

2 Termodinâmica de Buracos Negros

A partir do desenvolvimento das leis da mecânica de buracos negros propostas por Bardeen et al. [1973] e da demonstração feita por Hawking [1975] sobre a emissão de radiação por estes objetos, o interesse da comunidade científica a cerca da termodinâmica de buracos negros passou a crescer cada vez mais. Entretanto, ainda persistem muitos problemas em aberto devido a esse caráter termodinâmico, como podemos ver no artigo desenvolvido por Hawking et al. [1995] onde é explorado a partir da topologia local o fato de buracos negros extremos terem entropia diferente do proposto por Bekenstein [1973] $S = A/4$, mais especificamente tratando da entropia igual à zero da solução extrema de Reissner-Nordström.

Neste sentido, iremos explorar as propriedades termodinâmicas de soluções de buracos negros, em particular àquelas com carga. Tomando a solução de Reissner-Nordström (RN), com métrica dada pela equação abaixo

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

Verifica-se a existência de duas regiões, r_+ e r_- , soluções da equação $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2$, denominadas de horizonte de eventos e horizonte de Cauchy, respectivamente,

dadas por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2)$$

é notável que teremos três possibilidades para cada valor de M e Q , neste trabalho focaremos quando $M = |Q|$, no qual chamamos de solução extrema.

Tomando as soluções de Δ e da relação de $S = A/4$, onde A é a área do buraco negro, conseguimos chegar nas equações que descrevem a massa, a carga e a entropia de RN

$$M = \frac{1}{2}(r_+ + r_-) \quad Q^2 = r_+ r_- \quad S = r_+^2 \quad (3)$$

e assim conseguimos construir uma relação do tipo $M(S, Q)$, dada por

$$M = \frac{\sqrt{S}}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{S} \right) \quad (4)$$

Sabemos que a partir da gravidade superficial, κ , conseguimos calcular a temperatura do nosso buraco negro, porém podemos reescrever e computar em termos da massa e da entropia, $T = \partial_S M$. Além disso, veremos outra característica de RN que é o potencial elétrico, $\phi = \partial_Q M$, ambos são dados na equação

$$T = \frac{1}{4\sqrt{S}} \left(1 - \frac{Q^2}{S} \right) \quad \phi = \frac{Q}{\sqrt{S}} \quad (5)$$

vale ressaltar que, no caso de RN extremo, a temperatura é zero e conseguimos verificar a partir desta condição, que teremos $Q^2 = S$, ou melhor ainda, $\phi = \pm 1$. Na figura 1, observamos como a temperatura do buraco negro se comporta em relação ao tamanho dele, fixando um valor de carga $Q = 2$. Percebemos que no ponto vermelho, encontra-se o caso quando a solução é extrema e, mais ainda, que a reta pontilhada representa quando a temperatura atinge seu máximo. Com esta divisão feita pela reta pontilhada, podemos definir dois tipos de buracos negros: pequenos (à esquerda da reta) e grandes (à direita da reta), consequentemente o RN no caso extremo é do primeiro tipo.

Outra propriedade em relação a termodinâmica de buracos negros que devemos explorar é a capacidade térmica, que neste caso de RN será a carga constante, é dada por

$$C_Q = T(\partial_T S)|_Q = -\frac{2S^2(S - Q^2)}{S - 3Q^2}. \quad (6)$$

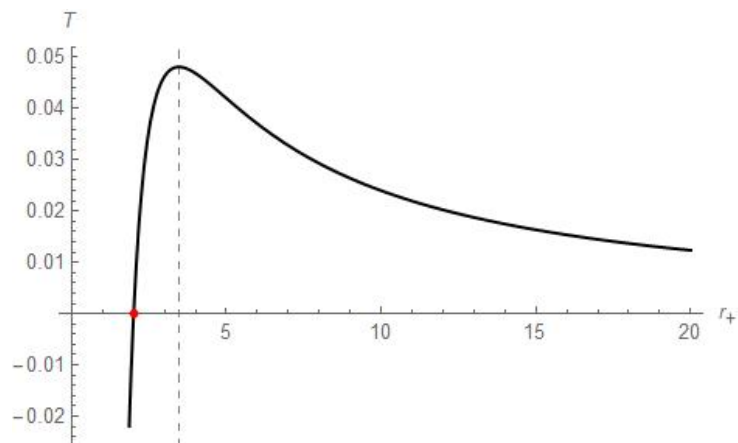


Figura 1: Temperatura em relação à r_+ , fixando $Q = 2$

Vemos na figura 2, que no caso extremo essa capacidade é zero e que, pela categorização feita na reta pontilhada na figura 1, buracos negros pequenos têm capacidade térmica maior ou igual que zero, divergindo no ponto extremo de Davies.

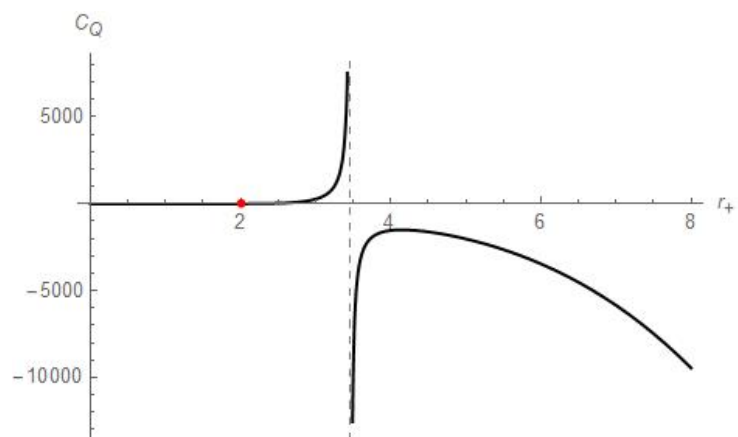


Figura 2: Capacidade térmica em relação à r_+ , fixando $Q = 2$

2.1 Estabilidade Global versus Local

O tipo de ensemble termodinâmico dependerá das combinações das variáveis extensivas e intensivas e, a partir desses ensembles, podemos estudar as condições de estabilidades do sistema analisado. Inicialmente, vamos tomar o ensemble grand-canônico, que as variáveis extensivas são determinadas a partir das variáveis intensivas. No contexto de buraco negro, as variáveis extensivas são S e Q , enquanto as intensivas são T e ϕ .

Sendo assim, o potencial de Gibbs é dado por

$$G(T, \phi) = M - \phi Q - TS \quad (7)$$

e a partir dessa relação, conseguimos definir as quantidades tomando as derivadas do potencial de Gibbs, isto é

$$\begin{aligned} M &= G - T\partial_T G|_\phi - \phi\partial_\phi G|_T \\ S &= -\partial_T G|_\phi \\ Q &= \partial_\phi G|_T \end{aligned} \quad (8)$$

Para avaliarmos a estabilidade do sistema, procuramos por dois pontos dado um ensemble: global e local, neste caso da energia de Gibbs, procuramos por pontos de mínimo global. Para isso, comparamos os potenciais termodinâmicos e identificamos o menor, este ponto (sela) é globalmente estável termodinamicamente, ver Goutéraux [2010]. Esse ponto de equilíbrio é alcançado no máximo de entropia total, dado por

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial T^2} \right|_\phi \geq 0 \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} \right|_T \geq 0 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right|_\phi \leq 0 \quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} \right|_T \leq 0 \quad (10)$$

Podemos analisar onde essas condições são satisfeitas quando levamos em conta a solução de RN e, mais ainda, se são satisfeitas em caso extremo. Tomando as equações (4) e (5) e fazendo as substituições em (7), temos que

$$G(T, \phi) = \frac{(1 - \phi^2)^2}{16T} \quad (11)$$

além disso, a equação da entropia que depende de T e ϕ é exatamente igual à equação da

energia de Gibbs. Portanto, verificando as equações (9) e (10), temos

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial T^2} \right|_{\phi} = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right|_{\phi} = \frac{(1 - \phi^2)^2}{8T^3} \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} \right|_T = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} \right|_T = \frac{\phi^2}{2T} - \frac{1 - \phi^2}{4T} \quad (13)$$

Analisando no caso extremo, fixando $\phi = \pm 1$ e $T = 0$ nas condições acima, teremos

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial T^2} \right|_{\phi=\pm 1} = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right|_{\phi=\pm 1} = 0 \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} \right|_{T=0} = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} \right|_{T=0} \rightarrow \infty \quad (15)$$

e comparando com as condições de estabilidade global, vemos que a solução extrema não é globalmente estável termodinamicamente.

Em sua tese, Monteiro [2010] mostra condições da estabilidade termodinâmica, tanto global quanto local. Diferentemente do que foi abordado no aspecto de estabilidade global, a estabilidade local leva em conta as derivadas cruzadas da entropia, ou seja, teremos que analisar a Hessiana da entropia neste caso. Por definição, a estabilidade local é onde ocorre o máximo local da entropia total. Essa condição é satisfeita quando,

$$-\frac{\partial^2 S}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \geq 0, \quad x_{\mu} = (M, Q) \quad (16)$$

Utilizando da equação (4) e calculando a Hessiana temos

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{2\sqrt{M^2(M-Q)(M+Q)}(2M^2-3Q^2)}{(M^2-Q^2)^2} - 4 & -\frac{2M^3Q^3}{(M^2(M-Q)(M+Q))^{3/2}} \\ -\frac{2M^3Q^3}{(M^2(M-Q)(M+Q))^{3/2}} & \frac{2(M^2(\sqrt{M^4-M^2Q^2-2Q^2})+M^4+Q^4)}{(M^2-Q^2)^2} \end{array} \right) \quad (17)$$

e mais uma vez, verificando o que ocorre em $M = |Q|$, temos que

$$-\left. \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right|_{\text{ext}} = -\left. \frac{\partial^2 S}{\partial M \partial Q} \right|_{\text{ext}} \rightarrow -\infty \quad (18)$$

o que claramente não satisfaz as condições. Com isso, verificamos que o caso extremo de

RN não estável tanto localmente como globalmente.

2.2 Propriedades

Além das propriedades termodinâmicas vistas nas sessões anteriores, em relação ao RN extremo, como temperatura e capacidade térmica iguais à zero, termodinamicamente instável localmente e globalmente, existem outras propriedades importantes a serem discutidas sobre essas soluções. Anderson et al. [2000] mostraram que, em termos semiclássicos, buracos negros que possuem temperatura igual à zero são do caso extremo de RN e, se houver outra solução, não formam uma união suave entre essas soluções.

Analisando as propriedades termodinâmicas a partir da geometria local, Hawking et al. [1995] demonstraram que as soluções RN extremas, por possuírem uma topologia trivial $AdS_2 \times S^2$, trazem uma entropia igual à zero. Lembrando da definição de entropia, $S = A/4$, e comparando com o resultado obtido por Hawking, vemos que a entropia desses buracos negros diferem da teoria atual, necessitando de uma nova teoria e única, para descrever essas soluções extremas. Não obstante, neste mesmo artigo Hawking, Horowitz e Ross propõem que esses objetos surjam exclusivamente de criação de pares, preservando assim a condição forte da terceira lei da termodinâmica de buracos negros, demonstrada por Edery and Constantineau [2011].

Em seu artigo, visando a emissão de radiação por parte dos buracos negros carregados, Liberati et al. [2000] demonstraram a natureza dessa radiação, evidenciando um caráter não-térmico. Isso mostra que, a emissão está de acordo com o caráter termodinâmico do sistema, uma vez que não possui temperatura e sabemos que radiação não-térmica não depende da temperatura, como por exemplo a radiação síncrotron. Essas características expressam a necessidade de dividir o estudo sobre a termodinâmica de buracos negros em dois grupos: extremos e não-extremos, trabalhando de forma independente uma da outra.

3 Geometrotermodinâmica

A utilização da análise geométrica para o estudo de sistemas termodinâmicos tem-se mostrado uma boa técnica para explorar as propriedades fundamentais do sistema.

Em contextos de buracos negros, essas geometrias ganharam um destaque, principalmente as geometrias de Ruppeiner e Weinhold, se relacionando diretamente com as características térmicas das soluções estudadas, como a capacidade térmica, taxa de absorção em temperatura constante, entre outros. Nesta lógica, a *Geometrothermodynamics* (GTD) utiliza de artifícios como estruturas de contato do espaço de fase unida com um espaço de equilíbrio, considerando as transformações de Legendre para estudar as propriedades termodinâmicas de buracos negros, Quevedo [2017].

Para definirmos a GTD, precisamos definir uma das principais componentes, que representará as transformações de Legendre como difeomorfismos. Primeiramente, precisamos estabelecer um conjunto de coordenadas a partir de três componentes: as variáveis extensivas E^a , as variáveis intensivas I^a e o potencial termodinâmico Φ . Como estamos tratando de um sistema termodinâmico com n graus de liberdade, temos $a = 1, \dots, n$, além disso, no contexto de buracos negros, o potencial termodinâmico é usualmente representado pela entropia S ou pela massa M . Com isso, definimos o conjunto de coordenadas $Z^A = \{\Phi, E^a, I^a\}$.

Definindo \mathcal{T} como uma variedade diferencial de $(2n + 1)$ -dimensões, caracterizado pelo conjunto de coordenadas Z^A , Θ como o contato de forma-um definido por $\Theta = d\Phi - I_a E^a$ e por fim G é a métrica Riemanniana invariante pelas transformações de Legendre. O conjunto (\mathcal{T}, Θ, G) é chamado de variedade de fase, destaca-se que a invariância de Legendre garante que as propriedades geométricas de G não dependam da escolha do potencial termodinâmico usado.

Agora, conseguimos descrever nosso sistema a partir de um novo elemento chamado espaço de equilíbrio, \mathcal{E} , no qual cada ponto representa um estado de equilíbrio existente do sistema, caracterizado pelas variáveis extensivas. Porém nem todo ponto em \mathcal{E} é ocupado por um dado sistema, Bravetti et al. [2013]. Definimos \mathcal{E} como um subespaço de n -dimensões, tal que $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$, determinado por um função suave $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$. Além disso, a existência do *pullback* φ^* aplicada a métrica, nos fornece uma métrica induzida g , onde $g = \varphi^*(G)$, ver Quevedo [2008].

A definição geral da métrica G é dada por,

$$G = (d\Phi - I_a dE^a)^2 + \Lambda(\xi_{ab} E^a I^b)(\chi_{cd} dE^c dI^d) \quad (19)$$

onde ξ_{ab} e χ_{ab} são tensores diagonais constantes, Λ é uma função invariante por Legendre com coordenadas Z^A e, a partir da condição $\varphi^*(\Theta) = 0$, I_a é a variável intensiva dual de E^a , tal que $I_a = \partial\Phi/\partial E^a$.

A partir das escolhas dos tensores $\xi_{ab} = \chi_{ab} = \delta_{ab}$ e da função Λ , podemos definir a métrica induzida.

$$g = \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b \quad (20)$$

O potencial termodinâmico é parametrizado a partir das variáveis extensíveis, ou seja, $\Phi = \Phi(E^a)$. A métrica g é invariante com respeito à difeomorfismos arbitrários realizados em \mathcal{E} .

É notável que conseguimos calcular as métricas de Ruppeiner e Weinhold, como também a relação entre essas métricas com a equação 20. Isto é,

$$g = Mg^W = MTg^R \quad (21)$$

onde g^W é a métrica associada a geometria de Weinhold e g^R é a de Ruppeiner, ver Åman et al. [2003]. Com isso conseguimos definir uma métrica “básica” derivada apenas da Hessiana do potencial termodinâmico, g^H .

Contudo, queremos explorar propriedades relacionadas à métrica com as propriedades termodinâmicas do sistema em questão, neste caso estaremos tratando de uma caracterização de segunda ordem de fase de transição. Essa métrica será denominada g^{II} e, a partir das escolhas de $\xi_{ab} = \delta_{ab}$ e $\chi_{ab} = \eta_{ab}$ aplicadas em G , temos

$$g^{II} = \left(E^a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \right) \left(\eta_{bc} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^c \partial E^d} dE^b dE^d \right) \quad (22)$$

Em particular, se espera que \mathcal{E} seja curvado para sistemas que apresentem interação termodinâmica e que as singularidades apresentadas nesse espaço de equilíbrio estejam relacionadas com as transições de fase do sistema, ver Bravetti et al. [2013].

Em seu artigo, Bravetti and Nettel [2014] discutem o fato dessa divergência de curvatura atuando em g^{II} sempre residir no ponto de Davies por razão da métrica g^{II} ser conformal com a métrica g^H , tomando a energia livre de Gibbs $G(T, X)$ dado pela equação

(7), e portanto não tem tanta importância no ponto de Davies. Assim, as métricas g e g^H são complementares, mais ainda essas duas métricas representam flutuações em diferentes ensembles.

É importante pontuar que, a partir da condição $\varphi^*(\Theta) = 0$ sendo satisfeita, temos que $d\Phi = \delta_{ab}I^a dE^b$, o que corresponde com a primeira lei da termodinâmica. Mais ainda, temos outra equivalência nas leis da termodinâmica, onde a condição $\partial^2\Phi/\partial E^a\partial E^b \geq 0$ corresponde a segunda lei.

3.1 Aplicação em Buracos Negros

Assim como foi feito por Aman and Pidokrajt [2006], podemos aplicar a GTD em contextos de buracos negros, tomando as equações de entropia e massa de uma determinada solução, focaremos num estudo de buracos negros de Reissner-Nordström. As equações de entropia, massa são dadas pela equação (4).

O espaço de equilíbrio de RN é dado por $\mathcal{E}_{\text{RN}}(S, Q)$, onde M , a massa, é o potencial termodinâmico e S e Q , a entropia e a carga elétrica, respectivamente, são as variáveis extensivas. Então, conseguimos escrever o mapa em que esse espaço é definido,

$$\varphi : \{S, Q\} \longrightarrow \left\{ M, S, Q, \frac{\partial M}{\partial S}, \frac{\partial M}{\partial Q} \right\} \quad (23)$$

e, pelo que foi apresentado na seção 2, os termos de derivadas parciais são, respectivamente, a temperatura T e o potencial elétrico ϕ .

A partir de transformações de Legendre, $\Phi - \delta_{ab}I^a E^b$, podemos introduzir novos potenciais termodinâmicos. Neste caso para RN, teremos três novos potenciais, dados por

$$\begin{aligned} M_1 &= M - TS \\ M_2 &= M - \phi Q \\ M_3 &= M - TS - \phi Q \end{aligned} \quad (24)$$

Note que, a escolha do potencial para a função de φ é livre e não afetará as propriedades termodinâmicas do buraco negro, pois estamos considerando essas transformações de Legendre, tanto em \mathcal{E} quanto em \mathcal{T} . Outro ponto a ser destacado aqui

é que, pela construção dos novos potenciais, M_2 é caracterizado exatamente como Shen et al. [2007] descrevem a energia interna do buraco negro a partir do modelo de van der Waals-Maxwell. Portanto, neste trabalho não será necessário observar o que acontece no modelo proposto por Shen, Cai, Wang e Su pois na GTD teremos uma preservação das propriedades da termodinâmicas do nosso buraco negro.

Com isso, conseguimos construir, sem grandes dificuldades, as métricas g e g^{II} para o caso de RN e verificar os escalares de curvatura das respectivas métricas nos pontos de extremo, ou seja, quando $M = |Q|$. Calculando a métrica dada na equação (20), tomando a massa sendo dada por (4), temos

$$g = \frac{(3Q^2 - S)(Q^2 + S)}{16S^3} dS^2 - \frac{Q(Q^2 + S)}{2S^2} dSdQ + \frac{Q^2 + S}{2S} dQ^2 \quad (25)$$

observamos que o termo g_{SS} é nulo no ponto $S = 3Q^2$, o qual é bastante conhecido nesse estudo como o ponto crítico de Davies, apontando uma transição de fase, ver Davies [1977]. Além disso, pela condição de convexidade, $\partial^2\Phi/\partial E^a\partial E^b \geq 0$, quando o buraco negro está em condição extrema, ele não satisfaz por completo essas condições.

Computando o valor do escalar de curvatura para essa métrica, temos

$$R^{RN} = \frac{8S^2Q^2(3S^2 - Q^2)}{(S - Q^2)^2(S + Q^2)^3} \quad (26)$$

o qual podemos verificar a condição $R^{RN} = 0$ no ponto comentado acima e a condição de $R^{RN} \rightarrow \infty$ quando atingimos a solução extrema. A figura 3 representa o escalar de curvatura em função das coordenadas r_+ e r_- , fixando $r_- = 2$.

Agora, para um estudo mais consistente acerca das propriedades termodinâmicas de buracos negros carregados, precisamos computar a métrica g^{II} e o escalar associado. Então, tomando a equação (22), temos

$$g^{II} = \frac{S^2 - 9Q^4}{32S^3} dS^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3Q^2}{4S} \right) dQ^2 \quad (27)$$

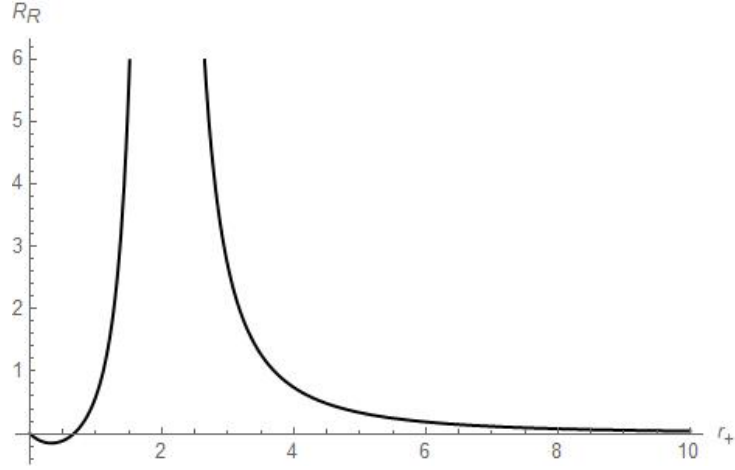


Figura 3: Escalar de curvatura para métrica g em RN, com $r_- = 2$.

e o escalar de curvatura é

$$R^{II} = \frac{288S^2Q^2(S - Q^2)}{(S - 3Q^2)^2(S + 3Q^2)^3} \quad (28)$$

Observamos, tanto na equação acima quanto no figura 4, que a divergência acontece no ponto de Davies, o que é esperado devido a conformalidade descrita por Bravetti e Nettel. Além disso, em caso extremo o escalar assume o valor igual à zero.

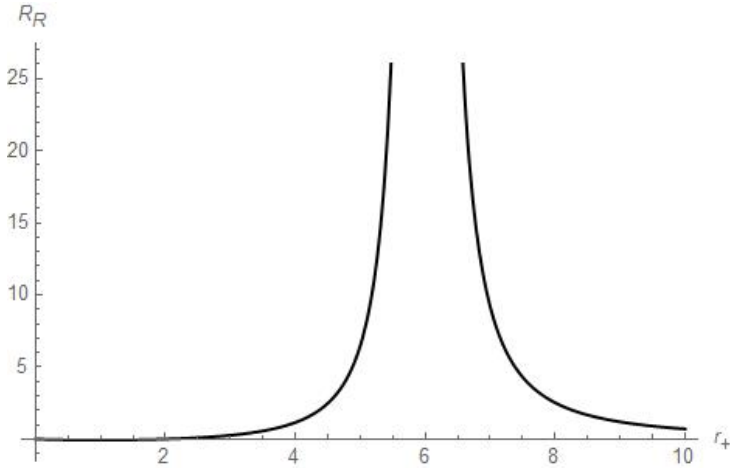


Figura 4: Escalar de curvatura para métrica g^{II} em RN, com $r_- = 2$.

Esses pontos onde , tanto a métrica g quanto g^{II} , a solução é extrema, nos mostram a limitação da aplicabilidade da GTD, ou seja, não temos ainda como representar a geometria termodinâmica desses casos. Podemos interpretar, tomando g^{II} , que o escalar ser igual a zero pode significar que não está havendo interação térmicas do sistema, mas

pode estar ocorrendo interações que não são descritas pela termodinâmica clássica.

3.2 Limites da GTD

Assim como foi feito em um primeiro momento no trabalho Zottolo [2022], podemos verificar se as aproximações feitas podem ser aplicadas na GTD. Vimos que a aproximação feita por Shen et al. [2007] já está presente na construção da GTD e não altera as propriedades do buraco negro. Com isso, podemos verificar se o mesmo acontece quando utilizamos da modificação proposta por Mirza and Zamaninasab [2007], tomando uma solução maior e no final das contas reduzir para RN.

Neste momento, partiremos de três soluções diferentes: Kerr-Newman Anti-de Sitter (KN-AdS), Kerr-Newman (KN) e Reissner-Nordström Anti-de Sitter (RN-AdS) e ao calcular o escalar de curvatura, faremos as devidas aproximações, $J \rightarrow 0$ e $l \rightarrow \infty$. A escolha de qual métrica será abordada é facultativa, portanto, utilizaremos a que se aproxima mais com os estudos realizados nessa área, ou seja, a métrica g .

Tomando as soluções de KN-AdS e RN-AdS, calculando o escalar de curvatura e fazendo as respectivas aproximações para RN, encontramos que em ambas as modificações surjem divergência em todo o espaço, ou seja,

$$R^{\text{RN-AdS}} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} \infty \quad (29)$$

$$R^{\text{KN-AdS}} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{J \rightarrow 0} \infty \quad (30)$$

entretanto, ao tomarmos a solução de KN e fazer tal processo, encontramos

$$R^{\text{KN}} \xrightarrow{J \rightarrow 0} \frac{8S^2(S^3 + 7S^2Q^2 - 2SQ^4 - 4Q^6)}{(S - Q^2)^2(S + Q^2)^3} \quad (31)$$

Apesar de preservarem o sinal de divergência quando a solução é extrema, todas as três aproximações feitas não são iguais ao escalar de curvatura dada pela equação (26). Para entendermos o motivo dessa diferença entre aproximações, dividiremos em dois caso: soluções em Anti-de Sitter e soluções em espaços planos.

Recapitulando as definições feitas na GTD, o espaço de equilíbrio \mathcal{E} é único para cada solução, ou seja, podemos nomear cada estado de equilíbrio para cada solução.

Com isso, teremos os seguintes espaços

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{\text{RN}} &= \{S, Q\} \\
\mathcal{E}^{\text{RN-AdS}} &= \{S, Q\} \\
\mathcal{E}^{\text{KN}} &= \{S, J, Q\} \\
\mathcal{E}^{\text{KN-AdS}} &= \{S, J, Q\}
\end{aligned}
\tag{32}$$

e lembrando outra característica da GTD, a métrica g é invariante por difeomorfismos realizados em \mathcal{E} , isto nos leva a analisar topologicamente os espaços de equilíbrio envolvidos.

Como todos os espaços de equilíbrio possuem dependência com a entropia S e, da mesma forma, esta entropia está relacionada com a área do buraco negro A , temos então uma dependência do espaço com a topologia local do buraco negro. Para as soluções de KN-AdS e RN-AdS, teremos uma topologia do tipo $K \times S^1$, onde K é um compacto, enquanto em RN a topologia é do tipo $M \times S^2$, com M compacto. Portanto, para preservarmos a métrica g precisamos realizar um difeomorfismo atuando nas topologias citadas, isto é

$$K \times S^1 \longrightarrow M \times S^2 \tag{33}$$

e como S^2 não é homeomorfo à S^1 , logo não há difeomorfismo satisfeito nessas aproximações. O mesmo pode ser feito com o espaço de de Sitter (dS), $K \times S^3$, e verificar por questões topológicas que as aproximações não podem ser realizadas, ver Goutéraux [2010].

Mais ainda, para a solução de KN para RN teremos que ter um difeomorfismo entre \mathcal{E}^{KN} e \mathcal{E}^{RN} , no qual o primeiro espaço de equilíbrio reside em 3 dimensões enquanto o segundo têm 2 dimensões, neste caso não haverá difeomorfismo satisfeito. De maneira geral, para quaisquer dois espaços com dimensões distintas, $m \neq n$, não teremos homeomorfismo satisfazendo esta condição.

Generalizando, só é possível realizar essas modificações, satisfazendo as condições da GTD, se e somente se, os espaços de equilíbrio envolvidos tiverem a mesma dimensão

e possuírem homeomorfismos entre seus potenciais termodinâmicos. Isto nos mostra que, no contexto de buracos negros, só podemos estudar estas soluções de maneira isolada ou fazendo as transformações de Legendre.

3.3 Propriedades termodinâmicas na GTD

Podemos interpretar os resultados obtidos durante a análise da GTD, juntamente com o que foi discutido na seção 2.2, para compreendermos melhor a natureza termodinâmica de buracos negros extremos de RN. Assim como foi mostrado, esse estudo sobre a GTD se faz de modo individual a cada solução, portanto concentraremos apenas no caso de RN.

Primeiramente, focaremos no caso da métrica g^H , na qual sua curvatura está associada a interações termodinâmicas. Pela equação (28), vemos que o escalar de curvatura é zero para o caso extremo, contudo a métrica continua analítica, isso pode evidenciar o fato de que, nesta solução extrema, há uma interação do sistema porém não representa relação com as propriedades térmicas do sistema. Com isso, conseguimos associar esta ideia com o fato de buracos negros extremos de RN emitirem radiação não-térmica e, portanto, essa interação pode ocasionar tal emissão.

Em relação a métrica g , o caráter divergente, quando estamos em solução extrema, mostra a instabilidade local e global da nossa solução, juntamente com o fato do buraco ser pequeno e não possuir capacidade térmica. Entretanto, a métrica continua sendo analítica no ponto em questão, indicando que temos que tratar não somente os casos extremos de forma única, como também os mesmos possuem uma termodinâmica diferente da usual.

4 Conclusão

A utilização da análise geométrica se fez bastante eficaz num estudo acerca da termodinâmica, principalmente no contexto de buracos negros. Deste modo, um estudo unindo a GTD, responsável por entender características fundamentais do sistema, com as propriedades termodinâmicas, possibilitou uma análise mais profunda e conceitual sobre a natureza de buracos negros extremos carregados.

Em um primeiro momento, estudamos tanto o comportamento termodinâmico quanto as propriedades desses sistemas, evienciando características únicas, porém esperadas, como temperatura igual à zero e a questão da instabilidade local e global. Algumas características térmicas foram atribuídas a partir de análises topológicas do horizonte, como a entropia igual à zero, levantando um novo questionamento sobre o comportamento de buracos negros extremos.

Em relação a GTD, vimos que sua aplicação é bastante rica e de grande ajuda na literatura de buracos negros, principalmente por termos duas métricas g e g^{II} , que se complementam na análise. Mostramos que a aproximação pelo modelo de van der Waals-Maxwell, proposta por Shen et al. [2007], está presente dentro da construção da geometria, uma vez que as transformações de Legendre nos permite trocar o potencial sem perder as informações fundamentais do buraco negro. Ainda mais, verificamos que outras aproximações estudadas para evitar a geometria plana de Ruppeiner não poderiam ser utilizadas no contexto da GTD, além de demonstrar que nesta geometria as soluções devem ser estudadas de maneira única e isoladas. Essa demonstração juntamente com as divergências nos escalares de curvatura das métricas g e g^{II} , comprovam as limitações da geometria no estudo de buracos negros.

Apesar da existência dessas limitações, conseguimos conectar ambas as áreas, sem nenhuma dificuldade, para aprofundarmos o conhecimento sobre termodinâmica de buracos negros extremos. Compreendemos que estes casos requerem novas teorias para que seu entendimento seja completo, porém sendo independente da termodinâmica clássica estudada até então. Sendo assim, este trabalho abre novos caminhos para o entendimento da termodinâmica de buracos negros, principalmente no contexto de buracos negros extremos.

Referências

- J. E. Åman and N. Pidokrajt. Geometry of higher-dimensional black hole thermodynamics. *Physical Review D*, 73(2), jan 2006. doi: 10.1103/physrevd.73.024017. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.73.024017>.
- J. E. Åman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt. Geometry of black hole thermodynamics. *General Relativity and Gravitation*, 35(10):1733–1743, oct 2003. doi: 10.1023/a:1026058111582. URL <https://doi.org/10.1023%2Fa%3A1026058111582>.
- P. R. Anderson, W. A. Hiscock, and B. E. Taylor. Do semiclassical zero temperature black holes exist? *Physical Review Letters*, 85(12):2438–2441, sep 2000. doi: 10.1103/physrevlett.85.2438. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.85.2438>.
- J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun.Math. Phys.*, 31:161–170, jun 1973. doi: 10.1007/BF01645742. URL <https://doi.org/10.1007/BF01645742>.
- J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333–2346, apr 1973. doi: 10.1103/PhysRevD.7.2333. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333>.
- A. Bravetti and F. Nettel. Thermodynamic curvature and ensemble nonequivalence. *Physical Review D*, 90(4), aug 2014. doi: 10.1103/physrevd.90.044064. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.90.044064>.
- A. Bravetti, D. Momeni, R. Myrzakulov, and H. Quevedo. Geometrothermodynamics of higher dimensional black holes. *General Relativity and Gravitation*, 45(8):1603–1617, jun 2013. doi: 10.1007/s10714-013-1549-2. URL <https://doi.org/10.1007%2Fs10714-013-1549-2>.
- P. C. W. Davies. The thermodynamics theory of black holes. *Proc. R. Soc. Lond A*, 353 (499-521), 1977. doi: 10.1098/rspa.1977.0047.
- A. Edery and B. Constantineau. Extremal black holes, gravitational entropy and nonstationary metric fields. *Classical and Quantum Gra-*

- vity*, 28(4):045003, jan 2011. doi: 10.1088/0264-9381/28/4/045003. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/4/045003>.
- B. Goutéraux. Black-hole solutions to einstein's equations in the presence of matter and modifications of gravitation in extra dimensions, 2010. URL <https://arxiv.org/abs/1011.4941>.
- S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun.Math. Phys.*, 43:199–220, aug 1975. doi: 10.1007/BF02345020. URL <https://doi.org/10.1007/BF02345020>.
- S. W. Hawking, G. T. Horowitz, and S. F. Ross. Entropy, area, and black hole pairs. *Physical Review D*, 51(8):4302–4314, apr 1995. doi: 10.1103/physrevd.51.4302. URL <https://doi.org/10.1103/physrevd.51.4302>.
- S. Liberati, T. Rothman, and S. Sonego. Nonthermal nature of incipient extremal black holes. *Physical Review D*, 62(2), jun 2000. doi: 10.1103/physrevd.62.024005. URL <https://doi.org/10.1103/physrevd.62.024005>.
- B. Mirza and M. Zamaninasab. Ruppeiner geometry of RN black holes: flat or curved? *Journal of High Energy Physics*, 2007(06): 059–059, jun 2007. doi: 10.1088/1126-6708/2007/06/059. URL <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/06/059>.
- R. Monteiro. Classical and thermodynamic stability of black holes, 2010. URL <https://arxiv.org/abs/1006.5358>.
- H. Quevedo. Geometrothermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 48(1):013506, jan 2007. doi: 10.1063/1.2409524. URL <https://doi.org/10.1063/1.2409524>.
- H. Quevedo. Geometrothermodynamics of black holes. *General Relativity and Gravitation*, 40(5):971–984, jan 2008. doi: 10.1007/s10714-007-0586-0. URL <https://doi.org/10.1007/s10714-007-0586-0>.
- H. Quevedo. Black hole geometrothermodynamics. *Journal of Physics: Conference Series*, 831(1):012005, mar 2017. doi: 10.1088/1742-6596/831/1/012005. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/831/1/012005>.

- J. Shen, R. Cai, B. Wang, and R. Su. Thermodynamic geometry and critical behavior of black holes. *International Journal of Modern Physics A*, 22(01):11–27, jan 2007. doi: 10.1142/s0217751x07034064. URL <https://doi.org/10.1142/s0217751x07034064>.
- P. Zottolo. Geometria de ruppeiner e as leis da termodinâmica: um estudo sobre buracos negros extremos, 2022. URL <https://www.ime.unicamp.br/mac/db/2022-1S-204517.pdf>. Último acesso em 20/10/2022.