



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



GABRIEL BELÉM BARBOSA

Métodos numéricos em equações diferenciais suaves por partes em dimensão 2

Campinas
17/07/2022

GABRIEL BELÉM BARBOSA

Métodos numéricos em equações diferenciais suaves por partes em dimensão 2*

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Ricardo Miranda Martins.

*Este trabalho foi financiado pelo CNPq, 2021-2022.

1 Introdução

O estudo de sistemas de equações diferenciais no escopo de ciclos limite é um problema antigo e de grande importância matemática e histórica. Proposto como um dos 23 problemas do matemático alemão David Hilbert em 1900 na conferência do Congresso Internacional de Matemáticos de Paris (problema de número 16), o estudo de ciclos limites em um campo vetorial polinomial no plano elude matemáticos na área de estudo qualitativo de equações diferenciais até os dias atuais, salvo para polinômios de alguns graus específicos (veja Li [2003]).

Ainda mais recente e de comportamento mais desconhecido está o problema descontínuo, que é, assim como sua contraparte, de interesse em diversas áreas acadêmicas e da tecnologia. Entender a existência e comportamento sob perturbação de órbitas periódicas nesses casos é essencial para estabelecer regimes de trabalho seguros e/ou previsíveis para sistemas dinâmicos diversos, incluindo sistemas mecânicos com impacto e fricção, como robôs e maquinário industrial, conversores eletrônicos de potência, sistemas de controle híbrido, entre outros, como pode ser visto em di Bernardo et al. [2008]. Muito progresso nessa área está sendo desenvolvido; em especial, o caso com polinômio de grau 1 com duas regiões lineares, o mais simples dentre eles (e ainda não completamente entendido), foi abordado tanto em Huan and Yang [2012] em sua forma não perturbada quanto em Han and Zhang [2010] sob perturbações, ambos explorando a existência (ou surgimento, no segundo caso) e número de ciclos limites com bastante sucesso, identificando diversos casos cujo comportamento nesse sentido é determinável.

Um sistema diferencial linear pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e um sistema diferencial linear do tipo centro genérico pode ser descrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -b & -\frac{4b^2 + \omega^2}{4a} \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix},$$

cuja primeira integral é dada por

$$H(x, y) = 4(ax + by)^2 + 8a(cx - dy) + y^2 \omega^2.$$

Sendo mais restritivo nessa definição, um centro diferencial sem rotação, isto é, um centro formado por elipses cujos maiores e menores diâmetros são paralelos ao eixo x ou y , pode ser descrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix},$$

com primeira integral

$$H(x, y) = a^2 x^2 + 2a(cx - dy) + y^2. \quad (1)$$

Nesse projeto foram analisados sistemas compostos por centros e selas com a curva de descontinuidade Σ do tipo (LV) (nomenclatura estabelecida em Jimenez et al. [2020]), sendo $\Sigma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_2^-$, onde $\Gamma_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0\}$, $\Gamma_1^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \leq 0\}$, $\Gamma_2^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \geq 0\}$ e $\Gamma_2^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \leq 0\}$. A curva Σ delimita as seguintes regiões no plano:

$$R_{LV}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\},$$

$$R_{LV}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ e } y > 0\},$$

$$R_{LV}^3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ e } y < 0\},$$

$$R_{LV}^4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y < 0\}.$$

Nesse caso existem 3 tipos de órbitas; as de tipo 1, que intersectam dois ramos de Σ em exatamente dois pontos cada, as de tipo 2, que intersectam um único ponto em cada ramo de Σ , e as de tipo 3, que intersectam um único ramo de Σ em dois pontos. Todos esses tipos podem ser vistos na Fig. 9, onde também é possível ver como esses diferentes tipos obrigatoriamente se aninham (sempre nessa ordem), implicam na existência de seus predecessores e só possuem um único intervalo/região onde podem existir no sistema (com órbitas de tipo 2 se estendendo até o infinito), fato que será omitido das demonstrações aqui apresentadas.

Um argumento que não será minuciosamente expresso quando for usado (visto que seriam muitos casos para se explicitar) é que o sistema possui uma chamada região de costura,

delimitada pelos pontos nos quais os sistemas que compõe o sistema completo tangenciam os eixos x e y , e que restringe os possíveis valores iniciais para uma órbita; quando futuramente for usado tal argumento, a exigência da restrição mencionada poderá ser facilmente constatada através de alguma figura que represente o sistema em questão e da análise do sentido de cada sub-sistema antes ou depois dos pontos tangenciais responsáveis por tal restrição.

Uma órbita fechada de tipo 2 intersecta Σ em quatro pontos, $p_1 = (0, y_1)$, $q_1 = (x_1, 0)$, $p_2 = (0, y_2)$ e $q_2 = (x_2, 0)$, com $x_1, y_1 > 0$ e $x_2, y_2 < 0$, e estes pontos devem obedecer as equações de fechamento

$$\begin{aligned} H_1(x_1, 0) &= H_1(0, y_1), \\ H_2(0, y_2) &= H_2(x_1, 0), \\ H_3(x_2, 0) &= H_3(0, y_2), \\ H_4(0, y_1) &= H_4(x_2, 0), \end{aligned} \tag{2}$$

sendo H_i as primeiras integrais para os subsistemas apropriados para os ramos aos quais os pontos pertencem.

Analogamente, uma órbita fechada de tipo 1 intersecta Σ em quatro pontos, $p_1 = (0, y_1)$, $p_2 = (0, y_2)$, $q_1 = (x_1, 0)$ e $q_2 = (x_2, 0)$, com $x_1 x_2, y_1 y_2 > 0$, e estes pontos devem obedecer as equações de fechamento

$$\begin{aligned} H_1(0, y_2) &= H_1(0, y_1), \\ H_2(x_1, 0) &= H_2(0, y_2), \\ H_3(x_2, 0) &= H_3(x_1, 0), \\ H_2(0, y_1) &= H_2(x_2, 0), \end{aligned} \tag{3}$$

novamente com as primeiras integrais dos subsistemas apropriados para os ramos dos pontos (que dessa vez podem pertencer a qualquer par de ramos consecutivos).

E por fim, uma órbita fechada de tipo 3 intersecta Σ em dois pontos, $p_1 = (0, y_1)$ e $p_2 = (0, y_2)$, com $y_1 y_2 > 0$, e estes pontos devem obedecer as equações de fechamento

$$\begin{aligned} H_1(0, y_2) &= H_1(0, y_1), \\ H_2(y_1, 0) &= H_2(0, y_2). \end{aligned} \tag{4}$$

Uma órbita limítrofe é aqui definida como sendo aquelas que não se classificam como nenhuma das anteriores, em particular uma órbita que passa pela origem, que é limítrofe do tipo 1-2, pois está justamente na transição entre órbitas de tipo 1 e 2, e uma órbita que tangencia o eixo x positivo, que é limítrofe do tipo 3-1, ambas visíveis na Fig. 9.

Em todos os casos tratados, sem perda de generalidade graças a transformações de rotação no sistema, o ponto inicial das órbitas pertencerá ao ramo Γ_1^+ , ou seja, $y_1 > 0$ será a variável independente. Uma notação muito útil que será empregada nesse projeto é descrever as variáveis x_i e y_i acima como funções de y_1 de acordo com as equações de fechamento. Outra notação utilizada é a introdução de uma variável provisória y_3 , que representa a altura na qual uma órbita cruza Γ_1^+ pela última vez, enquanto não verificada a última equação de cada conjunto de equações de fechamento que garante que $y_3 = y_1$.

2 Casos de pares de centros com alta simetria

Considere o seguinte sistema que possui em $R_{LV}^{1,3}$ o centro diferencial linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Sem perda de generalidade, será tomado $a < 0$, isto é, um sistema que gira no sentido anti-horário. Além disso, note que a singularidade dos sistemas (5) está visível (pertence a uma das regiões nas quais esse sistema atua, R_{LV}^1 ou R_{LV}^3), em particular, para $\beta > 0$ tem-se a singularidade em R_{LV}^1 . De (1), esse centro possui primeira integral na forma

$$H_1(x, y) = a^2 x^2 + 2a\beta(y - ax) + y^2.$$

Além disso, o sistema possui em $R_{LV}^{2,4}$ o centro diferencial linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad (6)$$

que possui, de (1), primeira integral na forma

$$H_2(x, y) = a^2x^2 + 2a\alpha(y - ax) + y^2.$$

É possível notar que a singularidade de (6) é invisível (não pertence a nenhuma das regiões desse sistema, R_{LV}^2 ou R_{LV}^4); o caso no qual essa singularidade é visível enquanto a singularidade de (5) é invisível é análogo aplicando-se uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ no plano, enquanto esta última singularidade estar em R_{LV}^1 com $\beta > 0$ pode ser garantido com uma transformação $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, logo esses casos serão omitidos.

Uma órbita fechada de segundo tipo obedece, de (2) e das primeiras integrais do sistema,

$$\begin{aligned} a^2x_1^2 - 2a\alpha(ax_1 + y_1) - y_1^2 &= 0, \\ y_2^2 + 2a\beta(y_2 + ax_1) - a^2x_1^2 &= 0, \\ a^2x_2^2 - 2a\alpha(ax_2 + y_2) - y_2^2 &= 0, \\ y_1^2 + 2a\beta(y_1 + ax_2) - a^2x_2^2 &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

com $y_1, x_2 > 0$ e $y_2, x_1 < 0$.

Uma órbita fechada de primeiro tipo obedece, de (3) e das primeiras integrais do sistema,

$$\begin{aligned} (y_2 - y_1)(y_2 + y_1 + 2a\alpha) &= 0, \\ a^2x_1^2 - 2a\beta(ax_1 + y_2) - y_2^2 &= 0, \\ (x_2 - x_1)a(x_2 + x_1 - 2\alpha) &= 0, \\ a^2x_2^2 - 2a\beta(y_1 + ax_2) - y_1^2 &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

com $y_1, y_2, x_1, x_2 > 0$.

Vale notar alguns valores de y_1 significativos para esse sistema. Para $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$, tem-se que o ponto \tilde{A}_1^y dos sistemas (5) tangente ao eixo y se dá por

$$\tilde{A}_1^y = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\beta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Definindo

$$y_{min}^2 = \pi_2 \circ \tilde{A}_1^y$$

e visto que, pela análise das restrições de sinal e região de costura que resultam em $y_1 \geq \max(y_{min}^2, \pi_2 \circ \tilde{A}_2^y) = y_{min}^2 > 0$ (\tilde{A}_2^y definido para (6) de forma análoga), por (7), y_{min}^2 define a menor órbita do sistema, que passa e é limitada pelo ponto \tilde{A}_1^y .

Para $\frac{\beta}{2} \leq \alpha < \beta$, definindo

$$y_{min}^1 = \pi_2 \circ \tilde{A}_1^y \geq 0$$

que, de maneira análoga, define a menor órbita do sistema, que também passa e é limitada pelo ponto \tilde{A}_1^y , mas que será denominada de forma diferente a y_{min}^2 por clareza e por motivos que serão explorados mais a frente.

Para $\alpha \geq \frac{\beta}{2}$,

$$y_{lim}^{1-2} = -2a\alpha$$

define a órbita limítrofe tipo 1-2, que passa pela origem, isto é, $y_2(y_{lim}^{1-2}) = 0$ com a nomenclatura para órbitas do tipo 1, e $x_1(y_{lim}^{1-2}) = 0$ com a nomenclatura para órbitas do tipo 2. Vale ressaltar que $y_{lim}^{1-2} > y_{min}^1$ para o caso $\frac{\beta}{2} < \alpha < \beta$ e em particular $y_{min}^2 = y_{min}^1 = y_{lim}^{1-2}$ para $\alpha = \frac{\beta}{2}$, logo y_{lim}^{1-2} é um valor válido de y_1 .

Para $\alpha \geq \beta$, definindo

$$y_{min}^{(1)} = a(\beta - 2\alpha)$$

e, pela análise das restrições de sinal e região de costura, $y_1 \geq \max(y_{min}^{(1)}, \pi_2 \circ \tilde{A}_2^y) = y_{min}^{(1)}$ e $0 < y_2 \leq y_{min}^1 < y_{min}^{(1)}$, por (7), $y_{min}^{(1)}$ define a menor órbita, que passa e é limitada pelo ponto \tilde{A}_1^y , isto é, $y_2(y_{min}^{(1)}) = y_{min}^1$ na nomenclatura para órbitas do tipo 1.

Agora tratando o mesmo sistema, porém com $\beta = 0$, tem-se dois casos; se $\alpha > 0$,

$$y_{min}^2 = -2a\alpha$$

define a órbita limítrofe que passa pela origem, e portanto a menor órbita, uma vez que não é possível obter-se órbitas de tipo 1 nesse sistema por um argumento visual simples de que todos

os trajetos em R_{LV}^1 giram no mesmo sentido, logo não há como haver trajetória de y_2 para x_1 ao mesmo tempo que x_2 para y_3 .

Para $\alpha = 0$, $y_1 = 0$ define a menor "órbita", que consiste da singularidade de todos os sistemas que compõe o sistema. Para $y_1 > 0$, as órbitas são obviamente de tipo 2, uma vez as trajetórias cruzam Γ_2^- primeiro. Semelhantemente, para $\alpha < 0$, $y_1 = 0$ define a órbita limítrofe que passa pela origem e que é a menor. Para $y_1 > 0$, as órbitas são novamente de tipo 2.

Proposição 1. *Dado um sistema formado por (5) e (6) com $\beta > 0$ e $a < 0$, as seguintes afirmações são verdadeiras.*

- (a) *Se $\alpha = \frac{\beta}{2}$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > y_{min}^2$, mais uma órbita fechada do tipo limítrofe para $y_1 = y_{min}^2$, que passa pela origem;*
- (b) *Se $\alpha < \frac{\beta}{2}$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 \geq y_{min}^2$;*
- (c) *Se $\beta > \alpha > \frac{\beta}{2}$, há um contínuo de órbitas fechadas de primeiro tipo para $y_{min}^1 \leq y_1 < y_{lim}^{1-2}$, uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, e um contínuo de órbitas de segundo tipo para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$;*
- (d) *Se $\alpha \geq \beta$, há um contínuo de órbitas fechadas de primeiro tipo para $y_{min}^{(1)} \leq y_1 < y_{lim}^{1-2}$, uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, e um contínuo de órbitas de segundo tipo para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$.*

Demonstração. De (7), por composição de soluções direta para qualquer $y_1 > 0$, tem-se que

$$x_1 = \frac{y_1 - 2\alpha}{a},$$

$$\begin{aligned} y_2 &= -ax_1 \\ &= 2\alpha - y_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{y_2 - 2\alpha}{a} \\ &= -\frac{y_1}{a} \end{aligned}$$

e por fim

$$\begin{aligned}y_3 &= -ax_2 \\ &= y_1,\end{aligned}$$

o que implica que a solução tem um grau de liberdade na escolha de y_1 .

Por um argumento semelhante, é possível averiguar que a escolha de y_1 também é livre para uma órbita fechada de primeiro tipo, uma vez que, de (8),

$$y_2 = y_1 - 2a\alpha,$$

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{y_2}{a} \\ &= \frac{2a\alpha - y_1}{a},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= 2\alpha - x_1 \\ &= \frac{y_1}{a}\end{aligned}$$

e por fim

$$\begin{aligned}y_3 &= ax_2 \\ &= y_1.\end{aligned}$$

Para $\alpha = \frac{\beta}{2}$, a menor órbita possui, pela primeira equação de (7), $x_1(y_{min}^2) = 0$, isto é, esta órbita passa pela origem e portanto é limítrofe do tipo 1-2. Logo só existem órbitas fechadas de segundo tipo, mais a órbita fechada limítrofe que passa pela origem, como pode ser visto na Fig. 1.

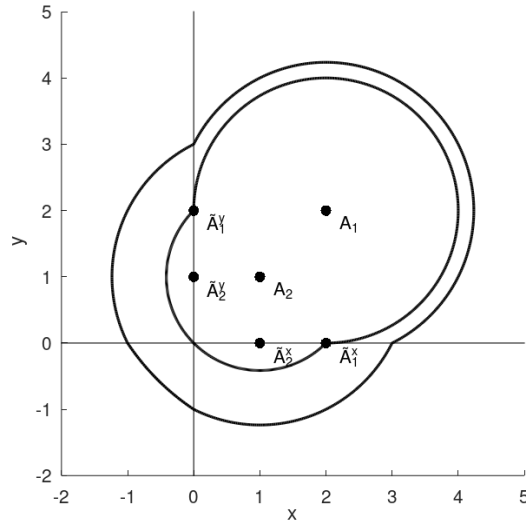


Figura 1: Sistema formado por (5) e (6), com $a = -1$, $\beta = 2$ e $\alpha = 1$.

Para $\alpha < \frac{\beta}{2}$, porém, pela primeira equação de (7), $x_1(y_{min}^2) < 0$, ou seja, as órbitas cruzam antes Γ_2^- , o que implica órbitas fechadas somente de segundo tipo, como pode ser visto na Fig. 2.

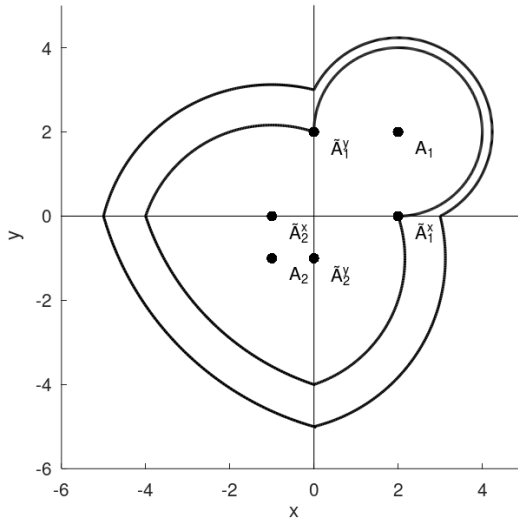


Figura 2: Sistema formado por (5) e (6), com $a = -1$, $\beta = 2$ e $\alpha = -1$.

Para $\beta > \alpha > \frac{\beta}{2}$, a menor órbita cruza o eixo Γ_1^+ antes de cruzar Γ_2^- , isto é, pela primeira equação de (8), $y_2(y_{min}^2) > 0$. Além disso, para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$, as órbitas se encontram no regime do tipo 2, ou seja, as órbitas cruzam Γ_2^- primeiro, o que implica um contínuo órbitas fechadas de primeiro tipo para $y_{min}^1 \leq y_1 < y_{lim}^{1-2}$, uma órbita limítrofe para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, e um

contínuo de órbitas de segundo tipo para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$, como pode ser visto na Fig. 3.

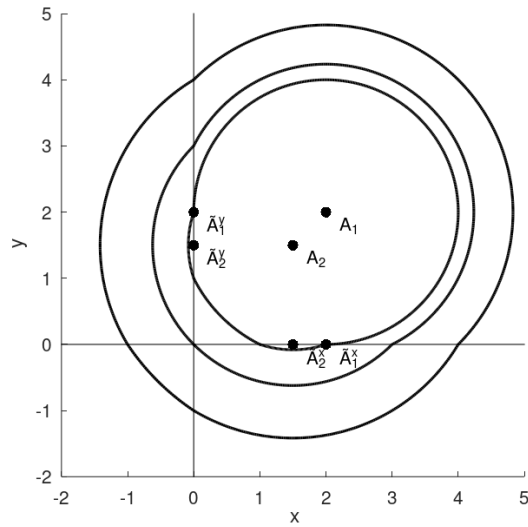


Figura 3: Sistema formado por (5) e (6), com $a = -1$, $\beta = 2$ e $\alpha = \frac{3}{2}$.

Para $\alpha \geq \beta$, a argumentação é semelhante ao caso anterior, porém a menor órbita é ao invés delimitada por y_{min}^{1*} . Logo, há um contínuo órbitas fechadas de primeiro tipo para $y_{min}^{(1)} \leq y_1 < y_{lim}^{1-2}$, uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, e um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$, como pode ser visto na Fig. 4.

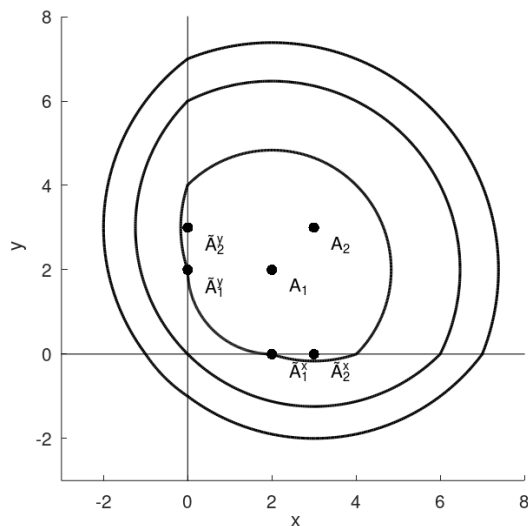


Figura 4: Sistema formado por (5) e (6), com $a = -1$, $\beta = 2$ e $\alpha = 3$.

□

Proposição 2. Dado um sistema formado por (5) e (6) com $\beta = 0$ e $a < 0$, as seguintes afirmações são verdadeiras.

- (a) Se $\alpha > 0$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > y_{min}^2$ mais uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = y_{min}^2$ que passa pela origem;
- (b) Se $\alpha = 0$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > 0$ mais a órbita limítrofe degenerada para $y_1 = 0$ que permanece na origem;
- (c) Se $\alpha < 0$, há um contínuo de órbitas fechadas de segundo tipo para $y_1 > 0$ mais uma órbita fechada limítrofe para $y_1 = 0$ que passa pela origem.

Demonstração. O fato de que as órbitas são fechadas segue diretamente da prova da Proposição 1, logo basta analisar o tipo das órbitas.

Para $\alpha > 0$, a menor órbita é a limítrofe que passa pela origem com $y_1 = y_{min}^2$, e para $y_1 > y_{min}^2$ as órbitas são de tipo 2, logo segue o item (a), como pode ser visto na Fig. 5.

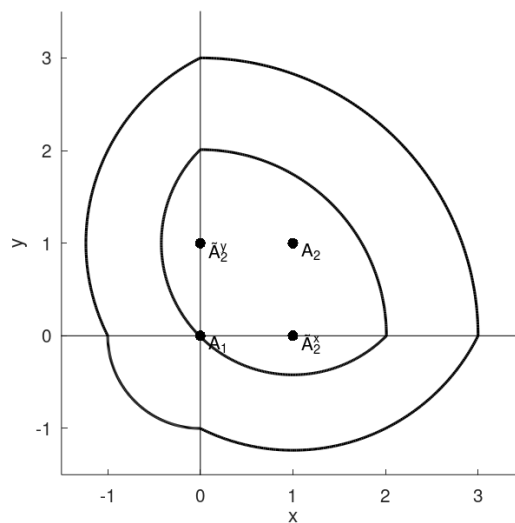


Figura 5: Sistema formado por (5) e (6), com $a = -1$, $\beta = 0$ e $\alpha = 1$.

Para $\alpha = 0$, o sistema é topologicamente equivalente a um centro centrado na origem, logo segue o item (b).

Para $\alpha < 0$, a menor órbita é a limítrofe que passa pela origem com $y_1 = 0$, e para $y_1 > 0$ as órbitas são de tipo 2, logo segue o item (c), como pode ser visto na Fig. 6; de fato, é possível ver como esse caso é uma reflexão do caso do item (a).

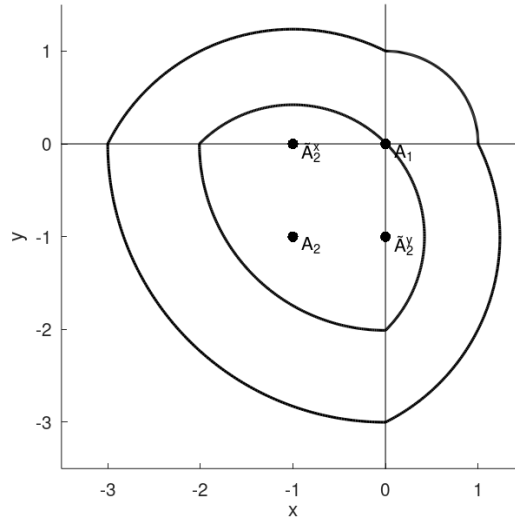


Figura 6: Sistema formado por (5) e (6), com $a = -1$, $\beta = 0$ e $\alpha = 1$.

□

Proposição 3. O sistema formado por (5) e que possui em $R_{LV}^{2,4}$ o centro diferencial linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}, \quad (10)$$

com $\beta, \alpha > 0$, possui um contínuo de órbitas fechadas de tipo 2 para $y_1 \geq y_{min}^2 = \max\{\pi_2 \circ \tilde{A}_1^y, \pi_2 \circ \tilde{A}_2^y\}$.

Demonstração. O sistema (10) possui, de (1), primeira integral na forma

$$H_2(x, y) = a^2 x^2 + 2a\alpha(ax + y) + y^2.$$

Uma órbita fechada de segundo tipo obedece, de (2) e das primeiras integrais do sistema,

$$\begin{aligned} a^2 x_1^2 + 2a\alpha(ax_1 - y_1) - y_1^2 &= 0, \\ y_2^2 + 2a\beta(y_2 + ax_1) - a^2 x_1^2 &= 0, \\ a^2 x_2^2 + 2a\alpha(ax_2 - y_2) - y_2^2 &= 0, \\ y_1^2 + 2a\beta(y_1 + ax_2) - a^2 x_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

com $y_1, x_2 > 0$ e $y_2, x_1 < 0$.

Por composição de soluções direta para qualquer $y_1 > 0$ inicial, tem-se que

$$x_1 = \frac{y_1}{a},$$

$$\begin{aligned} y_2 &= -ax_1 \\ &= -y_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{y_2}{a} \\ &= -\frac{y_1}{a} \end{aligned}$$

e por fim

$$\begin{aligned} y_3 &= -ax_1 \\ &= y_1, \end{aligned}$$

o que implica que a solução tem um grau de liberdade na escolha de y_1 . Além disso, a menor órbita do sistema passa pelo maior ponto de tangência com o eixo y por um argumento visual simples, e essa órbita cruza Γ_2^- antes de cruzar Γ_1^+ , isto é, pela primeira equação de (7), $x_1(y_{min}^2) < 0$, o que implica um contínuo de órbitas fechadas de tipo 2, como pode ser visto nas Figuras 7 e 8.

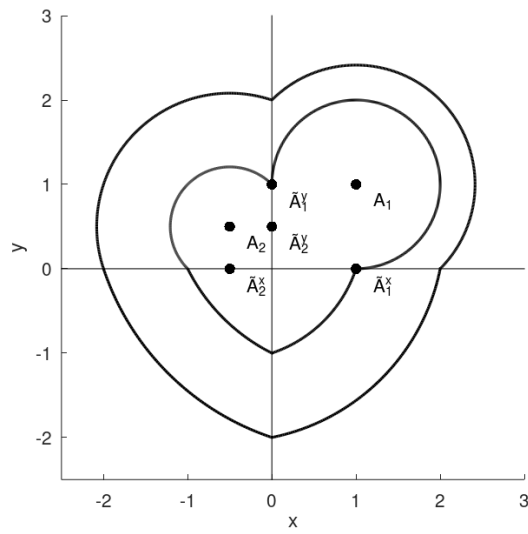


Figura 7: Sistema formado por (5) e (10), com $a = -1$, $\beta = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

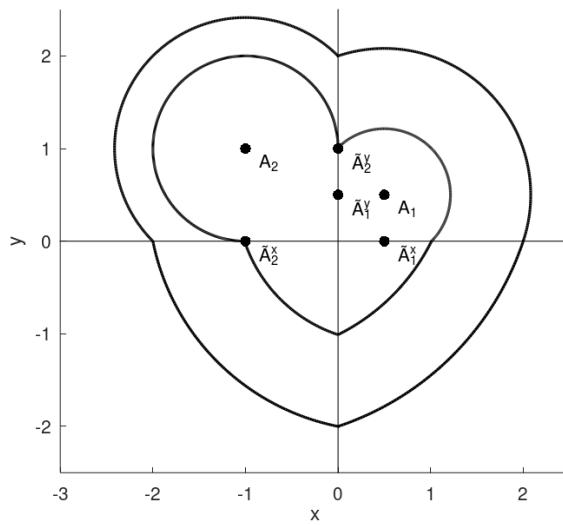


Figura 8: Sistema formado por (5) e (10), com $a = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 1$.

□

3 Variação de excentricidade e quebra de simetria em casos de pares de centros

Segundo Kuznetsov [1998], uma bifurcação é o fenômeno de surgimento de um retrato de fase topologicamente não equivalente conforme um ou mais parâmetros passam por um valor crítico. Nessa seção serão perturbados os sistemas formados por (5) e (6) com o intuito de causar uma bifurcação, cujo comportamento é então estudado.

Considere o seguinte sistema que possui em $R_{LV}^{1,3}$ o centro diferencial linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ -a \end{pmatrix}, \quad (11)$$

que possui, de (1), primeira integral na forma

$$H_1(x, y) = a^2 x^2 - 2\beta(a^2 x + y) + y^2,$$

e que possui em $R_{LV}^{2,4}$ o centro diferencial linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

que possui, de (1), primeira integral na forma

$$H_2(x, y) = x^2 - 2\alpha(x + y) + y^2.$$

De (2), uma órbita fechada de segundo tipo obedece

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2\alpha(x_1 - y_1) - y_1^2 &= 0, \\ y_2^2 - 2\beta(y_2 - a^2 x_1) - a^2 x_1^2 &= 0, \\ x_2^2 - 2\alpha(x_2 - y_2) - y_2^2 &= 0, \\ y_1^2 - 2\beta(y_1 - a^2 x_2) - a^2 x_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

De (3), uma órbita fechada de primeiro tipo obedece

$$\begin{aligned}
(y_2 - y_1)((y_2 + y_1) - 2\alpha) &= 0, \\
y_2^2 - 2\beta(y_2 - a^2x_1) - a^2x_1^2 &= 0, \\
(x_2 - x_1)(2\alpha - (x_2 + x_1)) &= 0, \\
y_1^2 - 2\beta(y_1 - a^2x_2) - a^2x_2^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

De (4), uma órbita fechada de terceiro tipo obedece

$$\begin{aligned}
(y_2 - y_1)((y_2 + y_1) - 2\alpha) &= 0, \\
(y_1 - y_2)((y_1 + y_2) - 2\beta) &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Lema 1. *Uma substituição do tipo*

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

torna o sistema formado por (11) e (12) análogo a outro sistema do mesmo tipo com $a' = \frac{1}{a}$.

Novamente será só tratado, sem perda de generalidade, o caso com $a < 0$ (sistemas que giram no sentido anti-horário), e mais especificamente $0 > a \geq -1$, devido à substituição do Lema 1 fornecer os valores restantes de $a < -1$. Também sem perda de generalidade (como previamente argumentado), será tomado $\beta \geq 0$, isto é, a singularidade do sistema em $R_{LV}^{1,3}$ está em R_{LV}^1 .

Vale notar alguns valores de y_1 significativos para esse sistema. Para $\alpha \leq \frac{\beta}{2}$,

$$y_{min}^2 = \frac{\sqrt{a^2((a^2 + 3)\beta^2 + 4\alpha^2 - 8\alpha\beta)}}{a^2} + 2\alpha - \beta$$

define a menor órbita de tipo 2 do sistema, que passa e é limitada pelo ponto \tilde{A}_1^x .

Para $\alpha \geq \frac{\beta}{2}$,

$$y_{lim}^{1-2} = 2\alpha \tag{16}$$

define a órbita limítrofe tipo 1-2, que passa pela origem, isto é, $y_2(y_{lim}^{1-2}) = 0$ com a nomenclatura para órbitas do tipo 1, e $x_1(y_{lim}^{1-2}) = 0$ com a nomenclatura para órbitas do tipo 2.

Para $\beta > \alpha \geq \frac{\beta}{2}$,

$$y_{min}^1 = 2\alpha - \beta + \sqrt{\beta^2 + a^2(4\alpha^2 - 8\alpha\beta + 3\beta^2)}$$

define a menor órbita do tipo 1, que passa e é limitada pelo ponto \tilde{A}_1^x . Em particular, quando $\alpha = \frac{\beta}{2}$, essa órbita também é limítrofe tipo 1-2.

Para $\alpha \geq \beta$,

$$y_{lim}^{3-1} = 2\alpha - \beta + \sqrt{-\beta^2(a^2 - 1)}$$

define a órbita limítrofe tipo 3-1, que passa e é limitada pelo ponto \tilde{A}_1^x .

Proposição 4. *Dado um sistema formado por (11) e (12) com $0 > a \geq -1$ e $\beta > 0$, as seguintes afirmações são verdadeiras.*

- (a) *Se $\alpha = \beta$, existe um contínuo de órbitas fechadas de terceiro tipo para $y_{min}^3 \leq y_1 < y_{lim}^{3-1}$, com uma órbita limítrofe fechada para $y_1 = y_{lim}^{3-1}$, de primeiro tipo para $y_{lim}^{3-1} < y_1 < y_{lim}^{1-2}$, com uma órbita limítrofe fechada para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, e nenhuma órbita fechada para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$;*
- (b) *Se $\alpha > \beta$, não existem órbitas fechadas;*
- (c) *Se $\frac{\beta}{2} \leq \alpha < \beta$, existe uma órbita fechada, que é de segundo tipo;*
- (d) *Existe um $\alpha^* < \frac{\beta}{2}$ tal que se $\alpha^* \leq \alpha < \frac{\beta}{2}$, existe uma órbita fechada, que é de segundo tipo, e se $\alpha < \alpha^*$, não existem órbitas fechadas.*

Demonstração. Começando pelo item (a), para $\alpha = \beta$, analisando a órbita limítrofe tipo 1-2 com $y_1 = y_{lim}^{1-2}$ tem-se que, de (14) e (13),

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^+} y_3 = \lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^-} y_3 = y_1,$$

Para $y_{lim}^{3-1} < y_1 < y_{lim}^{1-2}$ as órbitas são de tipo 1, e de (14), é direto obter que $y_2 = 2\alpha - y_1$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta - \frac{\sqrt{a^2(a^2\beta^2 + y_2(y_2 - 2\beta))}}{a^2} \\ &= \alpha - \frac{\sqrt{a^2(a^2\alpha^2 + y_1(y_1 - 2\alpha))}}{a^2} \end{aligned}$$

e, de $x_2 = 2\alpha - x_1$,

$$x_2 = \alpha + \frac{\sqrt{a^2(a^2\alpha^2 + y_1(y_1 - 2\alpha))}}{a^2}.$$

Por outro lado, da quarta equação de (14), tem-se que

$$\begin{aligned} x_2^* &= \beta + \frac{\sqrt{a^2(a^2\beta^2 + y_1(y_1 - 2\beta))}}{a^2} \\ &= \alpha + \frac{\sqrt{a^2(a^2\alpha^2 + y_1(y_1 - 2\alpha))}}{a^2}, \end{aligned}$$

que coincide com a expressão obtida das 3 primeiras equações, logo a órbita é fechada.

Já para $y_{min}^3 \leq y_1 < y_{lim}^{3-1}$ as órbitas são de tipo 3, e de (15) tem-se que $y_2 = 2\alpha - y_1$ e $y_3 = 2\beta - y_2$, logo $y_3 = y_1$, isto é, a órbita é fechada. Em particular, a órbita limítrofe tipo 3-1 com $y_1 = y_{lim}^{3-1}$ também é fechada, uma vez que, de (15) e (14),

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{3-1})^+} y_3 = \lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{3-1})^-} y_3 = y_1.$$

Para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$ as órbitas são de tipo 2, e de (14), é direto obter que $x_1 = 2\alpha - y_1$,

$$\begin{aligned} y_2 &= \beta - \sqrt{a^2x_1(x_1 - 2\beta) + \beta^2} \\ &= \alpha - \sqrt{a^2y_1(y_1 - 2\alpha) + \alpha^2} \end{aligned}$$

e, de $x_2 = 2\alpha - y_2$,

$$x_2 = \alpha + \sqrt{a^2y_1(y_1 - 2\alpha) + \alpha^2},$$

logo

$$\begin{aligned} y_3 &= \beta + \sqrt{a^4y_1(y_1 - 2\beta) + \beta^2} \\ &= \alpha + \sqrt{a^4y_1(y_1 - 2\alpha) + \alpha^2} \end{aligned}$$

e, derivando com respeito a y_1

$$y_3' = \frac{a^4(y_1 - \alpha)}{\sqrt{a^4y_1(y_1 - 2\alpha) + \alpha^2}},$$

que é monótona crescente e possui

$$\lim_{y_1 \rightarrow \infty} y_3' = a^2 < 1.$$

Além disso,

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^+} y_3' = a^4 < a^2,$$

logo $y_3 < y_1$ para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$, então não existem órbitas fechadas (de segundo tipo) nesse intervalo. Em particular, a órbita limítrofe tipo 1-2 com $y_1 = y_{lim}^{3-1}$ também é fechada, uma vez que, de (13) e (14),

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^+} y_3 = \lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^-} y_3 = y_1,$$

completando a prova da Proposição 4 (a), que é ilustrada na Fig. 9.

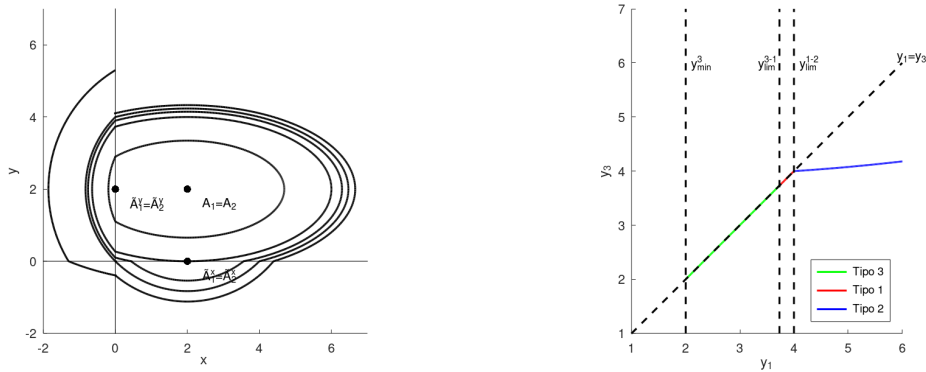


Figura 9: Sistema formado por (11) e (12) à esquerda e seu respectivo gráfico de $y_3(y_1)$ à direita, com $a = -\frac{1}{2}$ e $\alpha = \beta = 2$.

Já no caso (b), para $y_{min}^3 \leq y_1 < y_{lim}^{3-1}$, as órbitas são de tipo 3, e de (15) tem-se que $y_2 = 2\alpha - y_1$ e $y_3 = 2\beta - y_2$, logo $y_3 = y_1 + 2(\beta - \alpha) < y_1$ para todo o intervalo, pois $\alpha > \beta$. Também é aqui definida a função $r_3(y_1) = y_1 - y_3 = 2(\beta - \alpha) < 0$, que possui equivalentes para órbitas de tipo 2 e 1 (que serão introduzidas logo a frente), e que indicam uma órbita fechada quando são nulas.

Para $y_{lim}^{3-1} < y_1 < y_{lim}^{1-2}$ as órbitas são de tipo 1, e de forma análoga ao cálculo para $\alpha = \beta$ obtém-se que, de (14),

$$x_2 = 2\alpha - \beta + \frac{\sqrt{a^2(a^2\beta^2 + (2\alpha - y_1)(2(\alpha - \beta) - y_1))}}{a^2}$$

e

$$\begin{aligned} r_1(y_1) &= x_2 - x_2^* \\ &= 2(\alpha - \beta) + \frac{\sqrt{a^2(a^2\beta^2 + (2\alpha - y_1)(2(\alpha - \beta) - y_1))} - \sqrt{a^2(a^2\beta^2 + y_1(y_1 - 2\beta))}}{a^2}. \end{aligned}$$

Como mencionado, uma órbita fechada ocorre quando $r_1(y_1) = 0$. Analisando o extremo do intervalo tem-se que

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^-} r_1(y_1) = 2\alpha - \beta - \frac{\sqrt{a^2(a^2\beta^2 + 4\alpha(\alpha - \beta))}}{a^2} < 0, \quad (17)$$

uma vez que, de $|a| < 1$,

$$\begin{aligned} a^2(2\alpha - \beta)^2 &= a^2\beta^2 + 4a^2\alpha(\alpha - \beta) \\ &< a^2\beta^2 + 4\alpha(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

e usando o fato de que $2\alpha - \beta > 0$. Além disso

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{3-1})^+} r_1(y_1) = 2 \left(\alpha - \beta - \frac{\sqrt{a^2(\alpha - \beta) \left(\alpha - \beta + \sqrt{(1 - a^2)\beta^2} \right)}}{a^2} \right) < 0, \quad (18)$$

uma vez que, analogamente,

$$a^2(\alpha - \beta)^2 < (\alpha - \beta) \left(\alpha - \beta + \sqrt{(1 - a^2)\beta^2} \right).$$

Derivando com respeito a y_1 ,

$$r_1'(y_1) = \frac{\beta - y_1}{\sqrt{a^2(y_1^2 - 2y_1\beta + a^2\beta^2)}} + \frac{y_1 - 2\alpha + \beta}{\sqrt{a^2(y_1^2 - 4y_1\alpha + 4\alpha^2 + 2y_1\beta - 4\alpha\beta + a^2\beta^2)}}. \quad (19)$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}
(y_1 - 2\alpha + \beta)^2 &= 4\alpha^2 + \beta(\beta + 2y_1) + y_1^2 - 4\alpha(y_1 + \beta) \\
&> a^2(4\alpha^2 + \beta(a^2\beta + 2y_1) + y_1^2 - 4\alpha(y_1 + \beta)) \\
&= a^2(y_1^2 - 4y_1\alpha + 4\alpha^2 + 2y_1\beta - 4\alpha\beta + a^2\beta^2),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\beta - y_1)^2 &= y_1^2 - 2y_1\beta + \beta^2 \\
&> a^2(y_1^2 - 2y_1\beta + a^2\beta^2),
\end{aligned} \tag{20}$$

logo, como $\beta - y_1 < 0$ e $y_1 - 2\alpha + \beta > 0$ para $y_1 \geq y_{lim}^{3-1}$ e pelas duas desigualdades acima

$$\frac{\beta - y_1}{y_1 - 2\alpha + \beta} < -\frac{\sqrt{a^2(y_1^2 - 2y_1\beta + a^2\beta^2)}}{y_1 - 2\alpha + \beta} < -\frac{\sqrt{a^2(y_1^2 - 2y_1\beta + a^2\beta^2)}}{\sqrt{a^2(y_1^2 - 4y_1\alpha + 4\alpha^2 + 2y_1\beta - 4\alpha\beta + a^2\beta^2)}}.$$

Portanto

$$r'_1(y_1) > 0, \quad y_{lim}^{3-1} < y_1 < y_{lim}^{1-2}, \tag{21}$$

e por (18) e (17) não existem órbitas fechadas de primeiro tipo.

Para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$ as órbitas são de tipo 2, e de forma análoga ao cálculo para $\alpha = \beta$ obtém-se que, de (13),

$$x_2 = 2\alpha - \beta + \sqrt{a^2(2\alpha - y_1)(2(\alpha - \beta) - y_1) + \beta^2}$$

e

$$\begin{aligned}
r_2(y_1) &= x_2 - x_2^* \\
&= 2(\alpha - \beta) + \sqrt{a^2(2\alpha - y_1)(2(\alpha - \beta) - y_1) + \beta^2} - \frac{\sqrt{a^2(a^2\beta^2 + y_1(y_1 - 2\beta))}}{a^2}.
\end{aligned}$$

Novamente uma órbita fechada ocorre quando $r_2(y_1) = 0$. Analisando o extremo do

intervalo tem-se que

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^+} r_2(y_1) = 2\alpha - \beta - \frac{\sqrt{a^2(a^2\beta^2 + 4\alpha(\alpha - \beta))}}{a^2} = \lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^-} r_1(y_1) < 0. \quad (22)$$

Além disso

$$\lim_{y_1 \rightarrow \infty} r_2(y_1) = -\infty < 0. \quad (23)$$

Derivando com respeito a y_1 ,

$$r_2'(y_1) = \frac{\beta - y_1}{\sqrt{a^2(y_1^2 - 2y_1\beta + a^2\beta^2)}} + \frac{a^2(y_1 - 2\alpha + \beta)}{\sqrt{a^2(2\alpha - y_1)(2(\alpha - \beta) - y_1) + \beta^2}}.$$

Note que

$$\begin{aligned} a^4(y_1 - 2\alpha + \beta)^2 &= a^4(4\alpha^2 + 2\beta y_1 + y_1^2 - 4\alpha(y_1 + \beta)) + a^4\beta^2 \\ &< a^2(4\alpha^2 + 2\beta y_1 + y_1^2 - 4\alpha(y_1 + \beta)) + \beta^2 \\ &= a^2(2\alpha - y_1)(2(\alpha - \beta) - y_1) + \beta^2. \end{aligned}$$

Por (20) e como ainda $\beta - y_1 < 0$, $a^2(y_1^2 - 2y_1\beta + a^2\beta^2) > 0$, $a^2(y_1 - 2\alpha + \beta) > 0$ e $a^2(2\alpha - y_1)(2(\alpha - \beta) - y_1) + \beta^2 > 0$ para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$, tem-se que

$$-\frac{\beta - y_1}{a^2(y_1 - 2\alpha + \beta)} > \frac{\sqrt{a^2(y_1^2 - 2y_1\beta + a^2\beta^2)}}{a^2(y_1 - 2\alpha + \beta)} > \frac{\sqrt{a^2(y_1^2 - 2y_1\beta + a^2\beta^2)}}{\sqrt{a^2(2\alpha - y_1)(2(\alpha - \beta) - y_1) + \beta^2}}.$$

Portanto

$$r_2'(y_1) < 0, \quad y_1 > y_{lim}^{1-2}, \quad (24)$$

e por (23) e (22) não existem órbitas fechadas de segundo tipo.

Para $y_1 = y_{lim}^{1-2}$, como, de (22), os limites laterais de r_1 e r_2 coincidem e são menores que 0, não há órbita fechada também, completando a prova da Proposição 4 (b), que é ilustrada na Fig. 10.

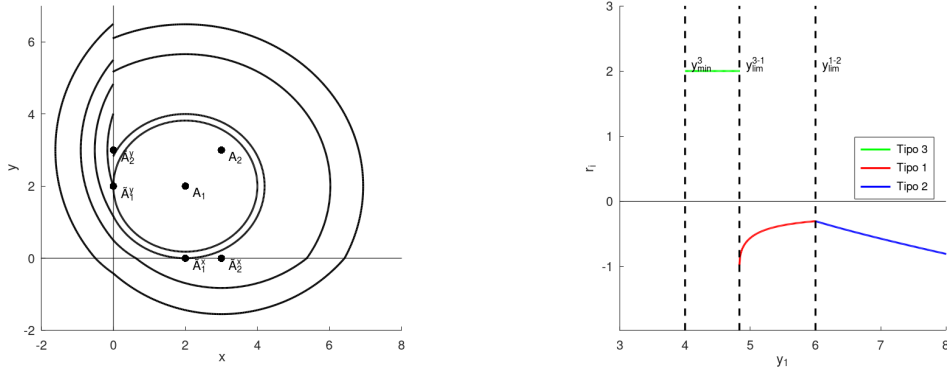


Figura 10: Sistema formado por (11) e (12) à esquerda e seu respectivo gráfico de $r_i(y_1)$, $i = 1, 2, 3$ à direita, com $a = -\frac{10}{11}$, $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Analisando o caso (c), para $y_{min}^1 \leq y_1 < y_{lim}^{1-2}$ as órbitas são de tipo 1. Definindo

$$y_{min}^* = \beta + \sqrt{\beta^2(1 - a^2)}, \quad (25)$$

que é a menor órbita no sentido inverso do sistema, como pode ser visto na Fig. 11, e da última equação de (14), no sentido inverso do sistema,

$$x_2^*(y_{min}^*) = \beta$$

tem-se que, para $y_1 < y_{min}^*$, pela restrição de que $x_2 > \beta$, $x_2^*(y_1)$ não está bem definido (mesmo que $x_2(y_1)$ esteja para $y_{lim}^1 \leq y_1 < y_{min}^*$, no sentido usual). Isso implica que, para $y_{min}^1 \leq y_1 < y_{min}^*$, $y_3(y_1) \geq y_{min}^* > y_1$, logo não há órbitas fechadas.

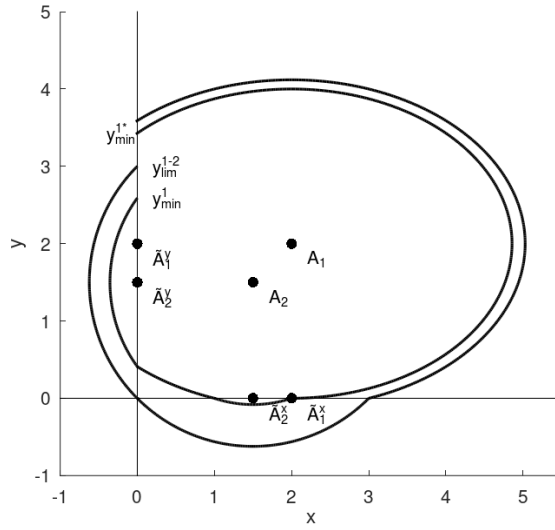


Figura 11: Sistema formado por (11) e (12), com $a = -0.7$, $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = 2$.

Analisando primeiramente o caso no qual $y_{min}^* \geq y_{lim}^{1-2}$, isto é, a menor órbita no sentido inverso já começa em uma região na qual, no sentido usual, as órbitas são de segundo tipo, como pode ser visto na Fig. 11; para $y_{min}^* > y_1 \geq y_{min}^1$, como visto acima, não existem órbitas fechadas.

Para $y_1 \geq y_{min}^* \geq y_{lim}^{1-2}$ as órbitas são de tipo 2. Analisando o extremo do intervalo tem-se que

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{min}^*)^+} r_2(y_1) = 2(\alpha - \beta) + \sqrt{\beta^2(1 - a^4) + 4a^2(\beta - \alpha) \left(\beta \left(1 + \sqrt{1 - a^2} \right) - \alpha \right)} > 0, \quad (26)$$

uma vez que, de $|a| < 1$ e $-\alpha < -\frac{\beta}{2}$,

$$\begin{aligned} 4(\alpha - \beta)^2 &= 4((1 - a^2) + a^2)(\beta - \alpha)(\beta - \alpha) \\ &< \beta^2(1 - a^2) + 4a^2(\beta - \alpha) \left(\beta \left(1 + \sqrt{1 - a^2} \right) - \alpha \right) \\ &< \beta^2(1 - a^4) + 4a^2(\beta - \alpha) \left(\beta \left(1 + \sqrt{1 - a^2} \right) - \alpha \right) \end{aligned}$$

e usando o fato de que $\alpha - \beta < 0$.

Além disso, vale (23). A análise da derivada $r_2'(y_1)$ é idêntica e obtém-se (24). Logo, somado à (26), é demonstrado que existe um ciclo limite (de segundo tipo) para $y_1 > y_{min}^*$.

Já no caso $y_{min}^* < y_{lim}^{1-2}$, para $y_{min}^* > y_1 \geq y_{min}^1$, novamente, não existem órbitas

fechadas.

Para $y_{lim}^{1-2} > y_1 \geq y_{min}^*$, $r_1(y_1)$ é também obtido como (3), e

$$r_1(y_{min}^*) = 2(\alpha - \beta) + 2\sqrt{a^2(\beta - \alpha)\left(\beta\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right) - \alpha\right)} > 0, \quad (27)$$

uma vez que, de $|a| < 1$,

$$\begin{aligned} a^2(\alpha - \beta)^2 &= a^2(\beta - \alpha)(\beta - \alpha) \\ &< (\beta - \alpha)\left(\beta\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right) - \alpha\right), \end{aligned}$$

e usando o fato de que $\alpha - \beta < 0$ e $a^2(\beta - \alpha)\left(\beta\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right) - \alpha\right) > 0$.

Para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$ as órbitas são de tipo 2, e $r_2(y_1)$ é também obtido como (3). Analisando o extremo do intervalo tem-se que

$$\lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^+} r_2(y_1) = 2\alpha - \beta - \frac{\sqrt{a^2(a^2\beta^2 + 4\alpha(\alpha - \beta))}}{a^2} = \lim_{y_1 \rightarrow (y_{lim}^{1-2})^-} r_1(y_1) > 0, \quad (28)$$

uma vez que, de $|a| < 1$ e $\alpha < \beta$,

$$a^2(2\alpha - \beta)^2 = a^2\beta^2 + 4a^2\alpha(\alpha - \beta) > a^2\beta^2 + 4\alpha(\alpha - \beta),$$

e usando o fato de que $2\alpha - \beta > 0$ e $a^2\beta^2 + 4a^2\alpha(\alpha - \beta) > a^2\beta^2 + 4\alpha(\alpha - \beta) > 0$.

Novamente, vale (23), (24) e, somado à (28), é demonstrado que existe um ciclo limite (de segundo tipo) para $y_1 > y_{lim}^{1-2}$ com $y_{min}^* < y_{lim}^{1-2}$, e como vale (19) na região na qual r_1 está definida e de (28) e (27), não existem órbitas fechadas de primeiro tipo, completando a prova da Proposição 4 (c), que é ilustrada na Fig. 12 e Fig. 13.

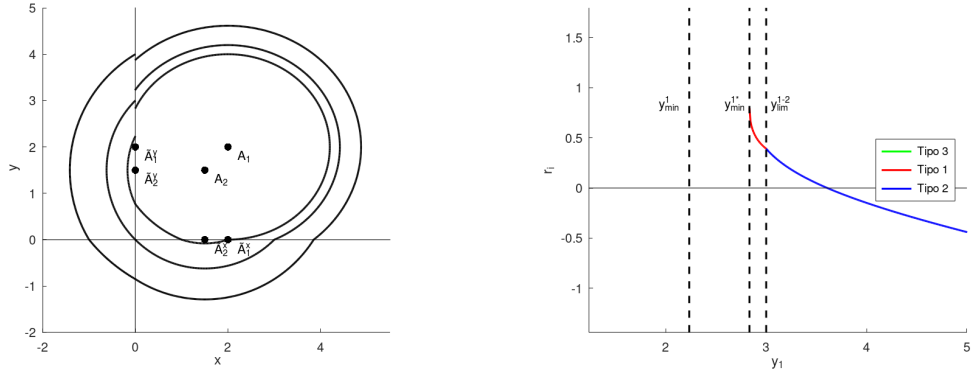


Figura 12: Sistema formado por (11) e (12) à esquerda e seu respectivo gráfico de $r_i(y_1)$, $i = 1, 2, 3$ à direita, com $a = -\frac{10}{11}$, $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = 2$. Note que $y_{min}^* < y_{lim}^{1-2}$.

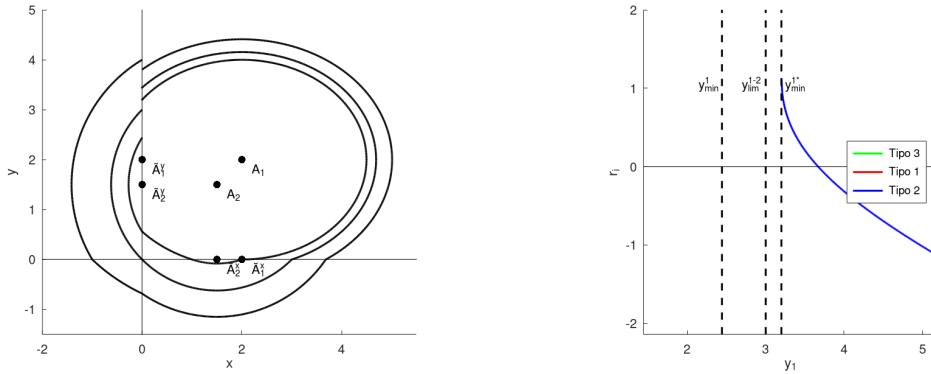


Figura 13: Sistema formado por (11) e (12) à esquerda e seu respectivo gráfico de $r_i(y_1)$, $i = 1, 2, 3$ à direita, com $a = -\frac{4}{5}$, $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = 2$. Note que $y_{min}^* > y_{lim}^{1-2}$.

Para o caso (d), por um argumento anteriormente usado de que não há ciclos limite para $y_1 < y_{min}^*$, basta analisar $y_1 \geq \max(y_{min}^2, y_{min}^*)$. Note que, de (22) e (27), $\forall -1 \leq a < 0$, $\beta \geq 0$, tomando $\alpha = \frac{\beta}{2}$, tem-se que

$$y_{min}^2 = \beta < \beta + \sqrt{\beta^2(1-a^2)} = y_{min}^*. \quad (29)$$

Por outro lado

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} y_{min}^2 = +\infty > y_{min}^*. \quad (30)$$

Além disso

$$\frac{dy_{min}^2}{d\alpha} = 2 + \frac{4(\alpha - \beta)}{\sqrt{a^2((a^2 + 3)\beta^2 + 4\alpha^2 - 8\alpha\beta)}} > 0, \quad \alpha < \frac{\beta}{2}, \quad (31)$$

uma vez que, de $|a| < 1$,

$$\begin{aligned} 4a^2(4\alpha^2 - 8\alpha\beta + (a^2 + 3)\beta^2) &< 16a^2(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &< 16(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \end{aligned}$$

e pelo fato de que $\alpha - \beta < 0$.

Juntos, (29), (30) e (31) implicam que $\exists \alpha^* < \frac{\beta}{2}$ único tal que $y_{min}^2 = y_{min}^*$, isto é,

$$2\alpha^* - \frac{2a^2\beta - \sqrt{4a^4\beta^2 + 4a^2(4\alpha^{*2} - 8\alpha^*\beta + 3\beta^2)}}{2a^2} = \beta + \sqrt{\beta^2(1 - a^2)},$$

e com a restrição $\alpha^* < \frac{\beta}{2}$, tem-se que

$$\alpha^* = \frac{a^2(2\beta + \sqrt{\beta^2(1 - a^2)}) - \sqrt{a^4\beta^2 - a^2\beta^2 + a^2y^2 - 2a^2\beta y + \beta^2 - 2\beta}}{2(a^2 - 1)}.$$

Esse resultado pode ser visto nas Figuras (14) e (14).

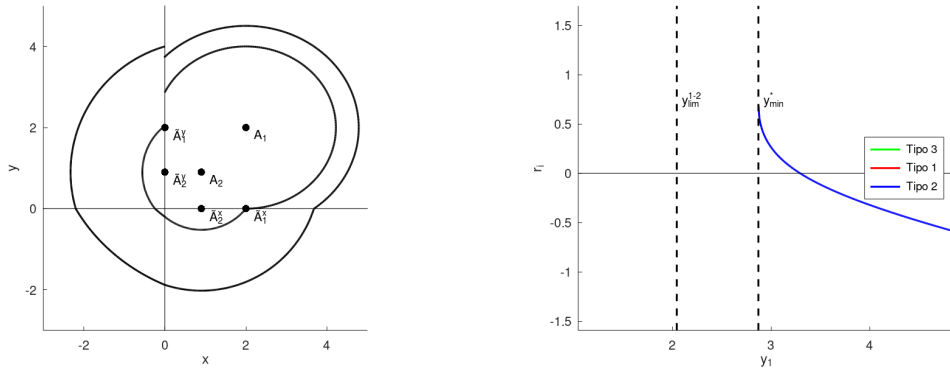


Figura 14: Sistema formado por (11) e (12) à esquerda e seu respectivo gráfico de $r_i(y_1)$, $i = 1, 2, 3$ à direita, com $a = -\frac{9}{10}$, $\alpha = \frac{9}{10}$ e $\beta = 2$. Note que $\alpha > \alpha^*$.

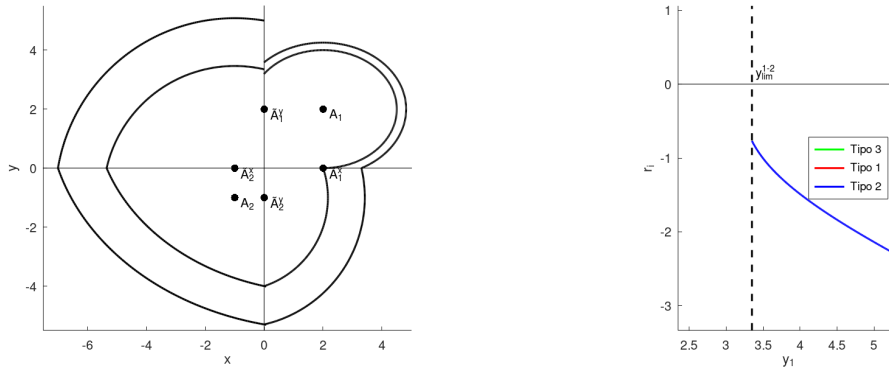


Figura 15: Sistema formado por (11) e (12) à esquerda e seu respectivo gráfico de $r_i(y_1)$, $i = 1, 2, 3$ à direita, com $a = -\frac{4}{5}$, $\alpha = -1$ e $\beta = 2$. Note que $\alpha < \alpha^*$.

□

4 Exemplos de casos de pares de centros e selas

Considerando um sistema com (5) ou (10) em $R_{LV}^{1,3}$ (repare que este último não está em suas regiões originais) e um sistema diferencial do tipo sela em $R_{LV}^{2,4}$ cuja singularidade A_2 seja colinear à singularidade de (5) (como pode ser visto nas Figuras 17 e 18) ou pertença à reta que é o reflexo pelo eixo x da reta que contém a singularidade de (10) (como pode ser visto na Fig. 16), e que possui autovetores que são reflexo um do outro por essas retas e cujos autovalores são iguais em módulo, obtém-se sistemas com alta simetria e contínuos de órbitas fechadas de segundo tipo. Modificando as selas e centros, tanto na excentricidade do segundo quanto nos autovalores do primeiro, mas mantendo os vetores \mathbf{b} de ambos iguais, foi possível causar uma bifurcação que quebra essa simetria de tal forma que foram formados ciclos limite próximos da origem.

Aqui não será apresentado um tratamento minucioso desses casos, porém com o intuito de reproduzir tais resultados, é aqui registrado que todos os sistemas da esquerda das figuras a seguir possuem $a = -\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, sendo λ_1 e λ_2 os autovalores do sistema tipo sela, $\mathbf{v}_1 = (1, \sqrt{3})^T$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1/\sqrt{3})^T$, sendo estes seus respectivos autovetores, e $\mathbf{b} = (0.5, -0.5)^T$ no caso da Fig. 16 e $\mathbf{b} = (-1, 1)^T$ no caso das Figuras 17 e 18; nos sistemas da direita, no caso

da Fig. 16

$$a \mapsto -0.7,$$

$$\lambda_2 \mapsto -8,$$

no caso da Fig. 17

$$a \mapsto -0.9,$$

$$\lambda_2 \mapsto -2,$$

e no caso da Fig. 18

$$a \mapsto -0.9,$$

$$\lambda_2 \mapsto -1.8.$$

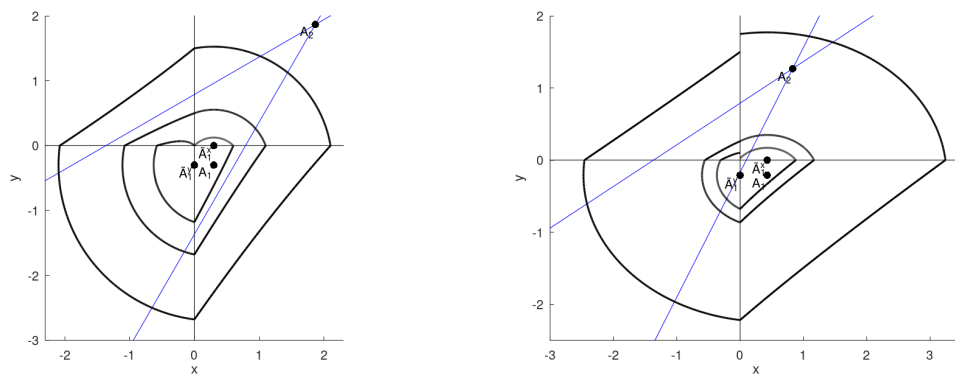


Figura 16: Sistema formado por (10) com $\alpha = -0.3$ e uma sela com alta simetria à esquerda e sua respectiva bifurcação à direita, com os autovetores em azul.

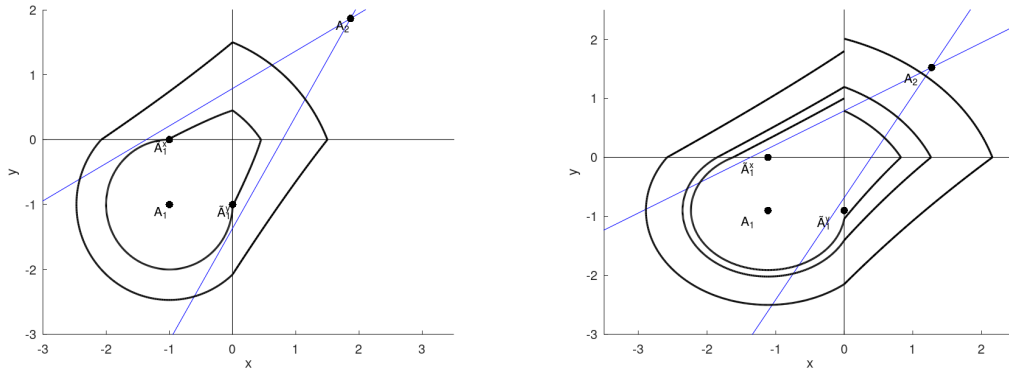


Figura 17: Sistema formado por (5) com $\beta = -1$ e uma sela com alta simetria à esquerda e sua respectiva bifurcação à direita, com os autovetores em azul.

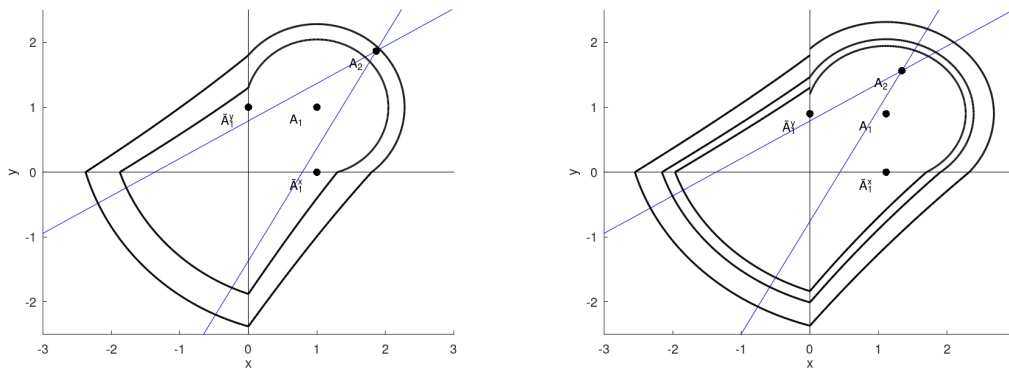


Figura 18: Sistema formado por (5) com $\beta = 1$ e uma sela com alta simetria à esquerda e sua respectiva bifurcação à direita, com os autovetores em azul.

A prova da existência e a localização de tais ciclos limite podem ser obtidas com uma aplicação do Teorema de Newton-Kantorovich semelhante ao que pode ser visto em Llibre and Ponce [2012], porém com algumas alterações nas equações de fechamento para comportar a diferença no número de regiões entre o caso ali apresentado e o tratado aqui. Essa prova será aqui omitida por brevidade e visto que o intuito dessa seção é só delinear o comportamento do caso centro-sela, e visto que pelo menos a existência é bastante evidente, dada a inversão de comportamento entre as órbitas mais internas e externas mostradas nos gráficos da direita das figuras acima, com $y_3 > y_1$ para as mais externas e $y_3 < y_1$ para as mais internas, e pela

continuidade de $y_3(y_1)$ (que é composição de funções contínuas). Obviamente ainda seria necessário analisar o possível efeito de erros numéricos na relações entre y_3 e y_1 , porém estas são tão nítidas na escala do problema que somente erros implausíveis seriam capazes de invertê-las, e portanto essa análise de erro também será omitida.

5 Conclusão

Apesar de muitos casos serem aqui tratados, eles representam apenas uma pequena fração da enorme variedade que um sistema com curva de descontinuidade do tipo (LV) pode assumir, e uma fração de relativo simples tratamento, por sinal. A abordagem que naturalmente nasceu de tamanha gama de possibilidades foi a do tratamento de casos com alta simetria primeiro, e a gradual bifurcação através da quebra de tais simetrias de forma controlada, permanecendo com equações relativamente simples e passíveis de manipulação algébrica. Para tal, as concessões empregadas para se chegar a um ponto no qual o comportamento do sistema é descrito são extremamente restritivas; só são tratados casos com sistemas iguais em quadrantes opostos, os sistemas individuais são do tipo centro (ou um par de centros e um par de selas, somente abordado de forma rasa), as singularidades de tais sistemas residem ambas em uma reta que passa pela origem e possui inclinação diretamente ligada aos parâmetros de pelo menos um dos centros (isto é, a), e nos casos da Seção 2, os centros possuem mesma excentricidade, igualdade esta que é então quebrada na Seção 3.

Os próximos passos poderiam incluir variar a excentricidade de (12) (que se manteve diretamente relacionada com o posicionamento de sua singularidade), retirar a condição de colinearidade das singularidades dos centros, retirar a condição de sistemas iguais em quadrantes opostos e depois repetir todo esse processo (ou seu equivalente particular para cada caso) para combinações de centros e selas, centros e focos, focos e focos e assim por diante.

Isso não quer dizer que casos distintos sejam mais ou menos difíceis de se tratar; pelo menos o começo do processo da análise geral, que envolve alta simetria, é trivial, e quando a assimetria é controlada, a análise provou-se, de fato, bastante tratável, com derivadas estritamente positivas ou negativas e análises pontuais de funções erro de fácil cálculo, e é provável que esse padrão se repita para casos de alta simetria e assimetria controlada distintos. Porém o vasto número de possibilidades implica que a abordagem prova-se trabalhosa e de resultados

esparsos e não generalizáveis, logo deve haver um interesse em um caso muito específico para se aplicar um tratamento semelhante ao aqui empregado, como por exemplo analisar uma gama de sistemas diretamente ligados com a modelagem de um problema físico específico; as ferramentas e estratégias empregadas nesse projeto podem de fato ser úteis nesse caso, a mérito de fornecer um guia geral de como proceder.

Referências

- M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Theory and Application*. Springer-Verlag London Ltd., London, 2008.
- M. Han and W. Zhang. On hopf bifurcation in non-smooth planar systems. *Journal of Differential Equations*, 248(9):2399–2416, 2010. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.10.002>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609004094>.
- S.-M. Huan and X.-S. Yang. On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 32(6):2147–2164, 2012. doi: 10.3934/dcds.2012.32.2147.
- J. J. Jimenez, J. C. Medrado, and J. Llibre. Crossing limit cycles for a class of piecewise linear differential centers separated by a conic. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2020: 1–36, 2020.
- Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*. Springer, Utrecht and Pushchino, 1998.
- J. Li. Hilbert’s 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(1):47–106, 2003. doi: <https://doi.org/10.1142/S0218127403006352>.
- J. Llibre and E. Ponce. Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones. *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. Series B: Applications & Algorithms*, 3, 01 2012.