



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



RAFAEL ALEXANDROW FRANCHI CARNIELLO

Fluxo de Calabi em 2D: Uma abordagem espectral

Campinas
2022

RAFAEL ALEXANDROW FRANCHI CARNIELLO

Fluxo de Calabi em 2D: Uma abordagem espectral

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do Prof. Alberto Saa.

Resumo

Neste trabalho estudamos a solução numérica do fluxo de Calabi em duas dimensões aplicado à descrição de ondas gravitacionais a partir de fontes compactas axisimétricas sem rotação, dado pela métrica de Robinson-Trautman. Para isso, primeiro, explicitamos as expressões de energia e velocidade da fonte compacta através do momento de Bondi e grupo BMS. Em seguida, as condições de valor inicial para a colisão de dois buracos negros é definida e a equação do fluxo de Calabi que descreve a evolução temporal do sistema é apresentada. Por fim, o método de Galerkin espectral é utilizado para fazer a decomposição em harmônicos esféricos da equação diferencial parcial, levando a um sistema de equações diferenciais ordinárias, resolvido utilizando Runge-Kutta. A partir dos resultados, obteve-se a evolução temporal das emissões radiativas bem como sua velocidade. Assim, o método numérico obtém uma solução eficiente em termos de tempo e memória computacional, sendo relativamente simples de implementar.

Abstract

In this work we study the Calabi flow numerical solution in two dimensions applied to the description of gravitational waves coming from axisymmetric compact sources without spin, given by the Robinson-Trautman metric. For that, first, the energy and velocity expressions from the compact source are explicitated using the Bondi momentum and BMS group. In sequence, the initial condition value for the colision of two black holes is defined and the Calabi flow describing the time evolution is presented. Finally, the spectral Galerkin method is utilized for decomposing in the spherical harmonics a partial differential equation, leading to a system of ordinary differential equations, solved with Runge-Kutta. By the results, the time evolution from the radiative emissions were obtained, as well as its velocity. Therefor, the numerical method obtains an efficient solution in terms of computational time and memory, being relativly simple to implement.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	História das Ondas Gravitacionais	7
3	Fluxo de Calabi	10
4	Fundamentação Teórica	12
4.1	Espaço-Tempo de Robinson-Trautman	12
4.2	Condição Inicial de Brill-Lindquist	16
5	Metodologia Proposta	18
5.1	Método de Galerkin	18
6	Resultados	19
7	Conclusão	23
A	Algoritmo Implementado em Python	25

1 Introdução

A observação de ondas gravitacionais vem ganhando grande importância como uma nova forma de aprender sobre o universo. Com sua primeira confirmação feita em 2015 pelos experimentos LIGO e Virgo [1], registrando o evento de colisão de dois buracos negros de aproximadamente 36 e 29 massas solares, a busca por novos modelos computacionais eficientes que simulem, analiticamente ou numericamente, a emissão de radiações gravitacionais se intensificou. Isto segue pela estratégia adotada para inferir as detecções. Cada interferômetro, ao identificar uma variação no feixe de luz, já decrescido os fenômenos geofísicos, registra o padrão de onda formado e, a partir de um banco de soluções computacionais para diferentes tipos de sistemas binários, calcula a probabilidade do evento ter ocorrido. Assim, com o crescente número de eventos capturados pelos experimentos desde então, totalizando 90 resultados até janeiro de 2020, se torna imprescindível aumentar a quantidade de *templates* disponíveis para realizar as novas medições, abrangendo casos como: sistemas múltiplos, buracos negros (BN) super-massivos, estrelas de nêutrons (EN), etc.

O principal objetivo deste trabalho é estudar a emissão de ondas gravitacionais causadas pela colisão de objetos compactos para o caso axissimétrico sem momento angular, descritas pela métrica de Robinson-Trautman, que leva ao fluxo de Calabi em duas dimensões, e utilizar o método de Galerkin para performar uma decomposição espectral das equações de Einstein no vácuo, resolvendo numericamente a evolução temporal. Na seção de história das ondas gravitacionais, retoma-se os principais eventos que levaram ao desenvolvimento da teoria, partindo das primeiras propostas no século XIX e chegando ao atual cenário de “estado da arte”. Na seção sobre o fluxo de Calabi, os preliminares matemáticos são apresentados, expondo a notação básica e dando uma intuição do seu comportamento em duas dimensões para a precisa caracterização a posteriori da equação diferencial física que modela o problema. Na quarta seção, é apresentado as propriedades físicas do espaço-tempo RT, fixando todos os graus de liberdade das coordenadas de Bondi. Na seção de metodologia proposta, a decomposição espectral das equações no harmônico esférico é apresentada para a condição inicial de um sistema binário de buracos negros. Na seção de resultados, as estratégias de implementação são explicitadas bem

como os resultados obtidos para dois valores de condição inicial distintas. Por fim, as conclusões sobre o método como uma ferramenta computacional extremamente eficiente são apresentadas e possíveis caminhos para o desenvolvimento da pesquisa são apresentados.

2 História das Ondas Gravitacionais

Desde a primeira confirmação experimental das ondas gravitacionais em 2015 feita pelos interferômetros LIGO e Virgo, uma nova série de detecções seguiram, revelando colisões entre sistemas binários BN-BN, BN-EN e EN-EN, totalizando 90 resultados até janeiro de 2022 [2]. No entanto, para além dos recentes sucessos experimentais, o primeiro interesse por radiações emitidas através de campos gravitacionais data do final do século XIX. Desta forma, retomemos o seu desenvolvimento histórico para a compreensão do atual cenário teórico.

Em 1893 o físico autodidata Heaviside propôs em seu artigo seminal “*A Gravitational and Electromagnetic Analogy*” [6] a primeira versão das ondas gravitacionais. Utilizando o argumento da lei circuital e considerando a velocidade de corpos finita, o autor derivou uma expressão de campo tipo magnético para a gravidade. Para exemplificar os resultados obtidos, aplicou as equações ao cálculo da influência do Sol sobre a Terra, encontrando numerosas perturbações orbitais. Assumindo que estas eram pequenas o suficiente para não serem percebidas por observação, concluiu que as ondas geradas deveriam se propagar a velocidade da luz, como no campo eletromagnético.

Doze anos depois (1905), Poincaré, ao sintetizar sua visão da mecânica no trabalho “*Sur la dynamique de l’électron*” [7], assume que todos os fenômenos físicos, incluindo a segunda lei de Newton, podem ser reduzidos a interações eletromagnéticas sujeitos a contração de Lorentz. Assim, estendendo a descrição ondulatório de elétrons para corpos em movimento, é proposta uma onda que transmite a gravidade se propagando a velocidade da luz, chamada no artigo de *onde gravifique*. Esta teoria ficou conhecida como “analogia eletromagnética”.

Influenciado pelo trabalho do físico-matemático francês, Einstein, logo após finalizar o postulado da relatividade geral (1915), tenta manipular suas equações de campo gravitacional para obter uma forma análoga as equações de Maxwell. Em meio as dificul-

dades de se obter um sistema de coordenadas apropriado para a descrição do fenômeno, recebeu a sugestão de seu colega De Sitter para utilizar uma aproximação de primeira ordem no espaço perturbado de Minkowski. O resultado, conhecido como gravidade linearizada [8], leva a emissão de três tipos de ondas gravitacionais classificadas por Weyl: longitudinal-longitudinal, transversal-longitudinal, transversal-transversal.

Porém, a existência de ondas gravitacionais não se consolidou diretamente na comunidade científica. Em 1922, Arthur Eddington, um dos físicos céticos, demonstra que dois, dos três tipos de ondas, poderiam viajar a qualquer velocidade dependendo do referencial adotado [9]. O que violaria a teoria em questão. Assim, passados mais de uma década sem encontrar novas soluções que contra argumentassem as críticas, Einstein escreve um artigo a *Physical Review* em 1936 negando a existência de ondas gravitacionais [10].

O início da elucidação sobre as críticas levantadas deu-se em 1957 nos trabalhos de Pirani, em que o formalismo da tétrede foi utilizado para detectar a presença de ondas gravitacionais como descontinuidades no tensor de Riemann ao longo de hipersuperfícies nulas em três dimensões [11]. Esta definição excluía qualquer tipo de onda longitudinal. No mesmo artigo foi descrito o efeito de ondas gravitacionais passando ao longo de um grupo de partículas teste via equações de desvio geodésico. O resultado foi um avanço chave para o entendimento do transporte de energia, posteriormente levando ao desenvolvimento dos aparelhos de medição.

Mais tarde, o trabalho desenvolvido por Pirani contribuiria para a classificação de Petrov [12] dos espaços-tempos em diferentes tipos de conteúdos gravitacionais. Isto possibilitou a descoberta do teorema de Goldberg e Sachs (GS) conectando a classificação de Petrov e as famílias de raios de luz no espaço-tempo (congruências nulas) ajudando a entender as propriedades físicas dos diferentes tipos de campos gravitacionais [13].

Uma das principais questões em aberto era possibilidade do consumo da massa pelo corpo emissor dado que as ondas gravitacionais descritas por Pirani transportavam energia. A primeira solução para tal problema veio por meio da descoberta das ondas planas exatas por Bondi, Pirani e Robinson em 1959 [14]. Estas foram consideradas não físicas dado que as soluções não poderiam descrever corretamente qualquer emissão de corpos compactos massivos, pois era feita através da construção de duas folhas no

espaço-tempo de Minkowski.

Inspirados pelas ondas planas exatas, Robinson e Trautman (1960) publicam uma família de soluções de ondas gravitacionais esféricas, chamadas posteriormente de espaço-tempo RT [15]. Não estava claro inicialmente se poderiam representar fontes isoladas compactas. Ainda que a métrica de Schwarzschild fosse um caso especial do espaço-tempo RT, o processo radiativo parecia apresentar singularidades nas ondas frontais. No ano seguinte, Sachs formula a condição que ondas gravitacionais deveriam ser apenas *outgoing* [16]. Como a métrica RT é algebricamente especial, imediatamente foi considerada uma forte candidata para a descrição das ondas gravitacionais. Também, em 1961, Newman e Penrose complementaram o teorema GS baseado na conexão do spinor afim de uma forma que todas as características da congruência nula foram entendidas como o comportamento assintótico das métricas planas assintóticas, investigadas utilizando os escalares de Weyl [18].

Em 1962, Robinson e Trautman apresentaram um estudo detalhado sobre as suas soluções para as equações de campo no vácuo com exemplos de constantes de movimento, propriedades da fonte e das ondas [20]. No mesmo ano, Bondi, van der Burg e Metzner definiram a *news function* [22], que quantifica no futuro infinito nulo o fluxo das ondas gravitacionais e usaram para mostrar que fontes compactas perdem massa durante o processo de emissão no caso axissimétrico. Sachs estende o resultado para fontes compactas isoladas no caso geral e investiga o grupo de transformações em que as condições de fronteira mantêm a métrica inalterada, levando o nome de grupo Bondi-Metzner-Sachs (BMS). Este é a generalização do grupo de Poincaré e descreve as simetrias dos espaços-tempos assintoticamente planos. As novas estratégias foram aplicadas no espaço-tempo RT por Foster e Newman em 1967, encontrando casos em que a métrica de Schwarzschild era a solução estacionária no futuro assintótico [24]. Porém, muitas aproximações foram necessárias dado a dificuldade técnica de resolver as equações de campo.

A existência de solução e convergência para condições iniciais gerais nas equações de campo RT foram apenas bem estabelecidas nos anos 90 [25; 26; 27]. Os autores demonstram que, uma condição inicial regular RT converge para a solução de Schwarzschild com evolução de tempo positiva. Mesmo assim, havia grande dificuldade em manipular as equações analiticamente e o problema de evolução completa do campo foi resolvido apenas

em 1999 quando Prager e Lun propuseram a abordagem espectral [28]. Desde então, o espaço-tempo RT vem sendo estudado com a adição do método numérico, possibilitando cálculos precisos de valores de energia e *recoil* causado pela emissão de ondas gravitacionais. Como sugestão de aprofundamento no tópico da história das ondas gravitacionais, recomenda-se [30] e [29].

3 Fluxo de Calabi

Seja \mathcal{M} uma variedade compacta complexa de dimensão n . Uma métrica Hermitiana g em \mathcal{M} em coordenadas locais é dada por

$$g = g_{i\bar{j}} dz^i \oplus, dz^{\bar{j}}, \quad (1)$$

em que $\{g_{i\bar{j}}\}$ é uma matriz definida positiva Hermitiana de uma função suave. E usa-se $\{g^{i\bar{j}}\}$ para denotar a matriz inversa de $\{g_{i\bar{j}}\}$. A classe de Khähler de $w = \sqrt{-1}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge dz^{\bar{j}}$ tem forma (1, 1) fechada. A classe de Khähler de w é sua cohomologia $[w]$ em $H^2(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Qualquer outra forma de Khähler da mesma classe tem a forma

$$w_\varphi = w + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi > 0, \quad (2)$$

para alguma função real φ em \mathcal{M} , onde

$$\partial\bar{\partial}\varphi = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_{\bar{j}} \varphi dz^i \wedge dz^{\bar{j}} = \varphi_{,i\bar{j}} dz^i \wedge dz^{\bar{j}}. \quad (3)$$

A métrica de Khähler correspondente é denotada $g_\varphi = (g_{i\bar{j}} + \varphi_{,i\bar{j}})dz^i \oplus dz^{\bar{j}}$ e utiliza-se $\{g_\varphi^{i\bar{j}}\}$ para denotar a matriz inversa de $\{g_{i\bar{j}} + \varphi_{,i\bar{j}}\}$. Por simplicidade, utiliza-se tanto g e w para denotar a métrica de Khähler. Defini-se o espaço potencial de Khähler como

$$\mathcal{H}_w = \{\varphi | w_\varphi = w + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi > 0, \quad \varphi \in C^\infty(\mathcal{M})\}, \quad (4)$$

que é chamado o espaço das métricas de Khähler.

Dado uma métrica de Khähler w , seu volume tem forma

$$w^n = \frac{(\sqrt{-1})^n}{n!} \det(g_{i\bar{j}}) dz^1 \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{n}}. \quad (5)$$

A curvatura de Ricci de w localmente é dada por

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det(g_{k\bar{l}}). \quad (6)$$

E a forma de Ricci é

$$Ric_w = \sqrt{-1} R_{i\bar{j}} dz^i dz^{\bar{j}} = -\sqrt{-1} \partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det(g_{k\bar{l}}). \quad (7)$$

Que é uma forma real fechada em $(1, 1)$.

Dado uma variedade de Khähler compacta polarizada $(\mathcal{M}, [w])$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{H}_w$, E. Calabi introduziu o funcional de Calabi como

$$\mathcal{C}a(w_\varphi) = \int_{\mathcal{M}} R_\varphi^2 w_\varphi^n, \quad (8)$$

em que R_φ é a curvatura escalar de w_φ . Note que, tanto o volume escalar

$$V_\varphi = \int_{\mathcal{M}} w_\varphi^n, \quad (9)$$

e sua curvatura escalar total

$$S_\varphi = \int_{\mathcal{M}} R_\varphi w_\varphi^n, \quad (10)$$

permanecem inalteradas quando φ varia em \mathcal{H}_w . Como consequência, a média da curvatura escalar é

$$\underline{R} = \frac{S_\varphi}{V_\varphi}, \quad (11)$$

sendo uma constante dependente apenas da classe $[w]$. Usualmente se utiliza a seguinte energia de Calabi modificada

$$\tilde{\mathcal{C}}a(w_\varphi) = \int_{\mathcal{M}} (R_\varphi - \underline{R})^2 w_\varphi^n, \quad (12)$$

para substituir $\mathcal{C}a(w_\varphi)$ dado que só diferem por uma constante topológica. E. Calabi estudou o problema variacional para minimizar $\mathcal{C}a(w_\varphi)$ em \mathcal{H}_w . A existência de um ponto crítico parece intratável a primeira vista dado que a equação é não linear de quarta ordem. E. Calabi propõe o então chamado fluxo de Calabi para abordar o problema da existência. O fluxo de Calabi é um fluxo de gradiente do funcional de Calabi definido como a seguinte equação parabólica com respeito ao parâmetro $t \geq 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}}(t) = \partial_i \partial_{\bar{j}} R_{g(t)}. \quad (13)$$

No nível potência, o fluxo de Calabi tem forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = R_\varphi - \underline{R}. \quad (14)$$

Sob o fluxo de Calabi, tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} (R_\varphi - \underline{R})^2 w_\varphi^n = -2 \int_{\mathcal{M}} (D_\varphi R_\varphi, R_\varphi) w_\varphi^n, \quad (15)$$

em que D_φ é operador de Lichnérowicz com respeito a w_φ . O operador de Lichnérowicz D é definido como

$$Df = f_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta}, \quad (16)$$

no qual as derivadas covariantes são com respeito a w . Então a energia de Calabi é estritamente decrescente ao longo do fluxo. Para o aprofundamento sobre o tema, é sugerido as seguintes referências [3], [4] e [5].

4 Fundamentação Teórica

4.1 Espaço-Tempo de Robinson-Trautman

O espaço-tempo RT é o conjunto de soluções mais simples para a equação de campo gravitacional de Einstein no vácuo representando fontes compactas rodeadas de ondas gravitacionais. A forma padrão da métrica [20] é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(K(u, \theta, \phi) - \frac{2m_0}{r} - r \partial_u (\ln Q^2) \right) du^2 - 2dudr + \frac{r^2 d\Omega^2}{Q^2(u, \theta, \phi)}, \quad (17)$$

em que m_0 é uma constante, Q e K são funções suaves, $d\Omega^2$ é a métrica esférica unitária, com ângulos (θ, ϕ) , distância radial r , e u o tempo retardado.

Além de ∂_r gerar a congruência geodésica nula sem cisalhamento, com r sendo o parâmetro afim, i.e., é algébricamente especial e a foliação $2 + 2$ associada com ele é baseado em constantes superfícies u com curvatura Gaussiana igual a K/r^2 . A expressão completa de $K(u, \theta, \phi)$ é

$$K = Q^2 \left(1 + \frac{1}{2} \nabla_\Omega^2 (\ln Q^2) \right) = Q^2 + Q \nabla_\Omega^2 Q - (\nabla_\Omega Q)^2, \quad (18)$$

em que ∇_Ω é o operador gradiente em S^2 . A tétrede nula induzida pela foliação é

$$k_\mu = \delta_r^\mu \quad (19)$$

$$l_\mu = \delta_u^\mu + \frac{g_{uu}}{2} \delta_r^\mu \quad (20)$$

$$m_\mu = \frac{Q}{2r} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu \right). \quad (21)$$

Calculando o tensor de Riemann nesta base obtém-se

$$R_{ABCD} = \frac{N_{ABCD}}{r} + \frac{III_{ABCD}}{r^2} + \frac{D_{ABCD}}{r^3}, \quad (22)$$

com N , III e D constantes covariantes ao longo de ∂_r . Isto deixa claro a interpretação de corpos compactos rodeados de ondas gravitacionais. Então, calculando os escalares de Weyl

$$\Psi_0 = \Psi_1 = 0 \quad (23)$$

$$\Psi_2 = -\frac{m_0}{r^3} \quad (24)$$

$$\Psi_3 = -\frac{Q}{\sqrt{8}r^2} \mathcal{D}K \quad (25)$$

$$\Psi_4 = -\frac{\sin \theta}{4r^2} \mathcal{D} \left(\frac{Q^2 \mathcal{D}g_{uu}}{\sin \theta} \right), \quad (26)$$

em que $\mathcal{D} = \partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi$. Como esperado, $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, e não há nenhuma onda gravitacional *ingoing*. Logo, todas as ondas são emitidas por uma fonte compacta que também gera um campo tipo Columb representado por Ψ_2 . O único caso sem ondas gravitacionais é Ψ_4 , quando K é constante, i.e., $\Psi_3 = \Psi_4 = 0$, e é possível reconhecer os escalares de Weyl para a métrica de Schwarzschild com massa m_0 .

Utilizando a transformação da métrica esférica para o *frame* de Bondi é possível determinar

$$U = \int_{u_0}^u Q(u', \theta, \phi) du' + \alpha(\theta, \phi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (27)$$

$$R = \frac{r}{Q(u, \theta, \phi)} + \mathcal{O}(r^0) \quad (28)$$

$$(\Theta, \Phi) = (\theta, \phi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (29)$$

em que a ordem líder das coordenadas angulares foi escolhida para igualar o frame original de Lorentz com o frame de Bondi. No entanto, ainda há grande liberdade de gauge, dado que é possível performar super-translações parametrizadas por α que determinara os termos de alta ordem. Assim, obtém-se

$$M_B(u, \theta, \phi) = \frac{m_0}{Q^3(u, \theta, \phi)} + \mathcal{P}(\partial_a U_0, \partial_a \partial_b U_0; u, \theta, \phi), \quad (30)$$

em que \mathcal{P} é um polinômio homogêneo em $x^a = (\theta, \phi)$ derivadas de $U = \int_{u_0}^u Q(u', \theta, \phi) du' + \alpha(\theta, \phi)$. Determinar \mathcal{P} para um momento genérico de u é uma tarefa não trivial, então, adota-se $x^a = (\theta, \phi) = u_0$, o que faz $\mathcal{P} = 0$ em u_0 , e, todos os termos de alta ordem, com

exceção do termo líder, desaparecem. Então, o momento de Bondi é

$$P^\mu = (P^0(u_0), \mathbf{P}(u_0)) = \frac{m_0}{4\pi} \oint_{S^2} \frac{(1, \hat{r})}{Q^3(u_0, \theta, \phi)} dS. \quad (31)$$

Defini-se o centro de massa velocidade de Bondi [31] como

$$v(u_0) = \frac{1}{P^0(u_0)} \mathbf{P}(u_0). \quad (32)$$

Note que esta definição funciona para qualquer *frame* de referência, porém é muito difícil calcular em para um *frame* genérico de Bondi, em que P pode ser diferente de 0 até u_0 e a expressão para o momento não funcionaria.

Feitas as devidas considerações, as equações de Einstein no vácuo para o espaço-tempo RT podem ser escritas como uma EDP não linear de quarta ordem

$$6m_0 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{Q^2} \right) = \nabla_\Omega^2 K, \quad (33)$$

em que a coordenada r não aparece. Assim, escolhendo uma função inicial $Q(u = u_0, \theta, \phi)$, determina-se um problema de Cauchy, i.e., a evolução no tempo esta bem definida com a métrica de superfície sendo a deformação contínua da esfera. Ou seja,

$$ds^2 = \frac{d\Omega^2}{Q^2(u_0, \theta, \phi)}, \quad (34)$$

com única restrição em relação a $Q(u_0, \theta, \phi)$ sendo a convergência do momento de Bondi em u_0 para gerar uma solução fisicamente válida.

A integração em S^2 das soluções de campo no vácuo geram uma quantidade conservada ao longo da evolução de u , dada por

$$q_0 = \oint_{S^2} \frac{ds}{Q^2(u, \theta, \phi)}, \quad (35)$$

representando a área de deformação da esfera. Então, é fixado $q_0 = 4\pi$, para que a área das r superfícies constantes seja igual a $4\pi r^2$. Disto, reconhecemos as soluções em questão como um fluxo de Calabi em duas dimensões.

4.2 Condição Inicial de Brill-Lindquist

A emissão de ondas gravitacionais na fase pós fusão dos buracos negros pode ser modelada pelo caso axissimétrico de $Q(u_0, \theta, \phi)$. Para isso, utiliza-se um procedimento que empresta uma geometria espacial plana tridimensional e cria uma métrica que se aproxima de Schwarzschild a grandes distâncias da origem conhecida como condição inicial de Brill-Lindquist. Parte-se das coordenadas bi-esféricas para o espaço plano tridimensional [32], tal que

$$x = \frac{a \sin \theta \sinh \eta}{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta} \cos \phi \quad (36)$$

$$y = \frac{a \sin \theta \sinh \eta}{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta} \sin \phi \quad (37)$$

$$z = \pm \frac{a}{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta}, \quad (38)$$

com $0 \leq \eta < \infty$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ e $a > 0$. Nestas coordenadas, o vetor de posição é

$$\rho(\eta, \theta) = a \sqrt{\frac{\cosh \eta - \cos \theta \sinh \eta}{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta}}, \quad (39)$$

e o elemento de linha é

$$ds^2 = \frac{c_0}{\Phi^4} (d\eta^2 + (\sinh^2 \eta) d\Omega^2), \quad (40)$$

em que o c_0 é constante e

$$\Phi = S(\eta, \theta, \phi, \hat{n}) = \sqrt{\cosh \eta + (\hat{n} \cdot \hat{r}) \sinh \eta}. \quad (41)$$

Ainda é possível escolher Φ como

$$\Phi^{-1} = \frac{\alpha_1}{S(\eta + \eta_1, \theta, \phi, \hat{z})} + \frac{\alpha_2}{S(\eta + \eta_2, \theta, \phi, -\hat{z})}, \quad (42)$$

com $\alpha_i > 0$ obtendo uma geometria não plana que se aproxima de uma geometria plana a grandes distâncias, i.e.,

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}} \sqrt{\frac{\cosh \eta + \cos \theta \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \theta \sinh \eta}} \right)^4 ds^2, \quad (43)$$

para $\eta \gg \eta_i$. Ainda, quando $\eta \gg 1$, a geometria se aproxima da parte espacial de Schwarzschild longe da origem, com métrica

$$g_{ij} \approx \left(1 + \frac{2M_0}{\rho} \right) \delta_{ij}, \quad (44)$$

no qual as escalas foram fixadas da seguinte forma

$$a = \frac{M_0 \alpha_1 e^{\frac{\eta_2 - \eta_1}{2}}}{2\alpha_2}. \quad (45)$$

Então, a superfície de constante $\eta = \eta_0 > 0$ pode ser usada para gerar uma condição inicial como

$$Q(u_0, \theta, \phi) = Q_0 \left(\frac{\alpha_1}{S(w_1, \theta, \phi, \hat{z})} + \frac{\alpha_2}{S(w_2, \theta, \phi, -\hat{z})} \right)^{-2} \quad (46)$$

$$= Q_0 \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{(1 + w_1 \cos \theta)}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{(1 - w_2 \cos \theta)}} \right)^{-2} \quad (47)$$

$$= Q(u_0, \theta), \quad (48)$$

com $0 \leq w_i = \tanh(\eta_0 + \eta_i) < 1$ e

$$Q_0^2 = \frac{1 + q^4}{1 - w^2} + \frac{4q(1 + q^2)}{\sqrt{1 - w^2}} + 3\frac{q^2}{w} \ln \left(\frac{1 + w}{1 - w} \right). \quad (49)$$

Esta é a condição inicial de BL que representa a fase pós fusão de uma colisão frontal entre buracos negros [31]. Em que Q_0 é escolhido de tal forma que a condição de normalização seja satisfeita. Note que para $q = 1$ (o caso com mesmas massas), a função tem simetria de reflexão, portanto, a evolução é inteiramente determinada por $q_0 = 4\pi$.

5 Metodologia Proposta

5.1 Método de Galerkin

A evolução temporal dos espaços-tempos RT são descritos por uma equação diferencial parcial não linear de quarta ordem, sendo assim, não há método analítico para resolução. Como descrito na seção de história das ondas gravitacionais, em 1999 Prager e Lun utilizam uma abordagem numérica espectral [28], permitindo o cálculo preciso das emissões radiativas. A abordagem consiste em reduzir a EDP para um sistema de EDOs por meio de uma projeção em um espaço de dimensão finita gerado por uma base escolhida, geralmente polinômios ortogonais [34]. Portanto, o problema passa a ser determinar os coeficientes modais da expansão para a evolução temporal.

Aplicando a decomposição em harmônicos esféricos de Q , obtém-se

$$Q_N(u, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^{m=l} b_m^l(u) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (50)$$

tal que toda a dependência de u é carregada por $b_m^l(u)$. A base ortogonal formada por Y_l^m em S^2 seguirá a definição de semi-normalização de Schimdt

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (51)$$

em que P_l^m são os polinômios ortogonais de Legendre e sua relação de ortogonalidade é dada por

$$\langle Y_l^m, Y_{l'}^{m'} \rangle = \oint_{S^2} \bar{Y}_l^m Y_{l'}^{m'} dS = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (52)$$

Para o caso especial axissimétrico, ou seja, com simetria de rotação em torno do eixo z ($\phi \rightarrow \phi + \epsilon, \epsilon \in [0, 2\pi]$), apenas os coeficiente $m = 0$ são não nulos, independento de ϕ . Portanto, o harmônico esférico é dado por

$$Q_N(u, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^N b^l(u) P_l(x), \quad (53)$$

com $x = \cos \theta$, e todas as integrais em ϕ são triviais, então a condição de normalização se

reduz a

$$q_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{Q^2(u_0, x)} = 2. \quad (54)$$

Ainda, a velocidade estacionária é

$$\gamma(\infty) = b^0; v_x(\infty) = 0; v_y(\infty) = 0; v_z(\infty) = -\frac{b^1}{b^0}. \quad (55)$$

E, por fim, o momento de Bondi será igual a

$$\Delta = 1 - \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{Q^3(u_0, x)} \right)^{-1}. \quad (56)$$

Utilizando a decomposição é possível reescrever as equações de campo no vácuo para o espaço-tempo RT como

$$\frac{\partial Q(u, \theta, \phi)}{\partial u} = \sum_{l=0}^N \dot{b}^l(u) P_l(x) = \frac{1}{12m_0} Q^3 \nabla_{\Omega}^2 K. \quad (57)$$

Aplicando $\langle Y_l, \cdot \rangle$ em ambos os lados, obtém-se um sistema de $(N + 1)$ EDOs

$$\dot{b}^l = -\frac{2l+1}{24m_0} \langle P_l, Q^3 \nabla_{\Omega}^2 K \rangle, \quad (58)$$

com $l = 0, 1, 2, \dots, N$.

Dado que $\nabla_{\Omega}^2 K = [(1-x^2)K_x]_x = (1-x^2)^2(QQ_{xxxx} - Q_{xx}^2) - 8(x-x^3)QQ_{xxx} - 4(1-3x^2)QQ_{xx}$ e os coeficientes modais são dados por

$$b^l = \frac{1}{4\pi} \langle Y_l, Q(u_0) \rangle = \frac{1}{4\pi} \oint_{S^2} Y_l(\theta, \phi) Q(u_0, \theta, \phi) dS. \quad (59)$$

Como último passo do método de Galerkin, basta utilizar Runge-Kutta para encontrar cada b_l , considerando a condição de valor inicial.

6 Resultados

Nesta seção é apresentado a resolução da evolução das equações de u e suas respectivas propriedades físicas durante a emissão de ondas gravitacionais. As principais

estratégias de implementação utilizadas são discutidas, bem como suas contribuições no erro numérico.

O primeiro passo do algoritmo consiste em determinar os coeficientes modais $b(u_0)$. Para isso, utilizamos a condição de valor inicial de Brill-Lindquist no caso BL-2 axissimétrico

$$Q(0, \theta) = Q_0 \left(\frac{q}{\sqrt{(1 + w \cos \theta)}} + \frac{1}{\sqrt{(1 - w \cos \theta)}} \right)^{-2}, \quad (60)$$

com $q = 1$ e $w = 0.5$, representando a fase pós fusão do sistema binário de buracos negros. Assim, os coeficientes modais em u_0 são computados, e é possível visualizar a condição inicial obtida pelos coeficientes utilizando a decomposição em harmônicos esféricos. Em seguida, é necessário determinar o sistema de equações diferenciais a ser resolvido. O valor de cada coeficiente b é passado como um *array* dentro da expansão, e a rotina de resolução de PVIs com Runge-Kutta de quarta ordem é aplicado ao sistema, levando a determinação das funções de evolução.

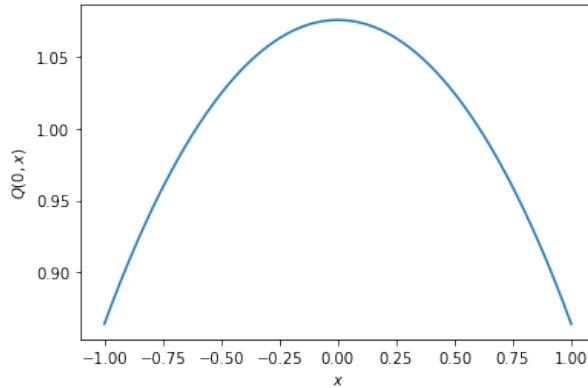


Figura 1: Condição inicial de Brill-Lindquist para $q = 1$ e $w = 0.5$.

Para a implementação dos polinômios de Legendre, a fórmula de recorrência de Bonnet foi utilizada,

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (61)$$

Esta estratégia permite não utilizar programação simbólica, com a clássica fórmula de Rodriguez, o que acelera as operações. Além disso, para o cálculo das derivadas dos polinômios, a recorrência explicitada em [35] também foi utilizada, tal que

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n(x) = \binom{n}{k} \frac{(n+1)_k}{2^k} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-n+k)_j (n+1+k)_j}{(1+k)_j} \frac{z^j}{j!}. \quad (62)$$

O controle do erro numérico é um fator importante de verificação durante a implementação. Existem duas formas que podem ser utilizadas para quantificar tal incerteza: usar as conhecidas constantes de movimento, e estimar parâmetros analíticos da solução estacionária. Assim, é possível demonstrar que

$$[b_0^0(\infty)]^2 - [b_0^1(\infty)]^2 - 2|b_1^1(\infty)|^2 = 1; \quad (63)$$

$$b^l(\infty) = 0, \quad l \geq 2. \quad (64)$$

A primeira equação de fato será utilizada para o controle, explicitando o cálculo numérico para cada coeficiente modal. Já, a segunda equação, será apenas utilizada qualitativamente a partir de uma análise visual da evoluções dos coeficientes com $l \geq 2$. Ainda, para o caso da solução estacionária axissimétrica, é possível calcular Δ analiticamente, em que obteve-se $\Delta = 6.482436 \cdot 10^{-3}$, sendo possível computar a diferença para os coeficientes obtidos. Portanto, na tabela 1, todos os erros para o caso estacionário são apresentados, além de seu respectivo tempo de computação.

N	$ q_0 - 2 $	$ (b^0)^2 - (b^1)^2 - 1 $	Δ	v_k	t (seg)
2	$7 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6.393258 \cdot 10^{-3}$	0	0.34
3	$7 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6.393258 \cdot 10^{-3}$	0	0.55
5	$2 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6.482127 \cdot 10^{-3}$	0	10.78
7	$7 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6.482435 \cdot 10^{-3}$	0	77.19
9	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6.482436 \cdot 10^{-3}$	0	337.67

Tabela 1: Determinação da fração de energia (Δ), estimativa de erro e tempo de computação para a evolução de u , de $u_0 = 0$ até $u_0 = (24m_0)^{-1}$, com condição inicial para $q = 1$, $w = 0.5$ e 1000 passos de integração.

Não é possível calcular diretamente os erros associados a escolha dos N coeficientes modais para a expansão $Q_N(u, \theta, \phi)$, mas é possível ilustrar a convergência com os gráficos de evolução para cada $b^l(u \geq u_0)$.

Na figura 2, com $N = 9$, pode-se constatar a simetria de reflexão em relação a $z = 0$, como esperado, dado que todos os b^l ímpares são nulos durante a evolução,

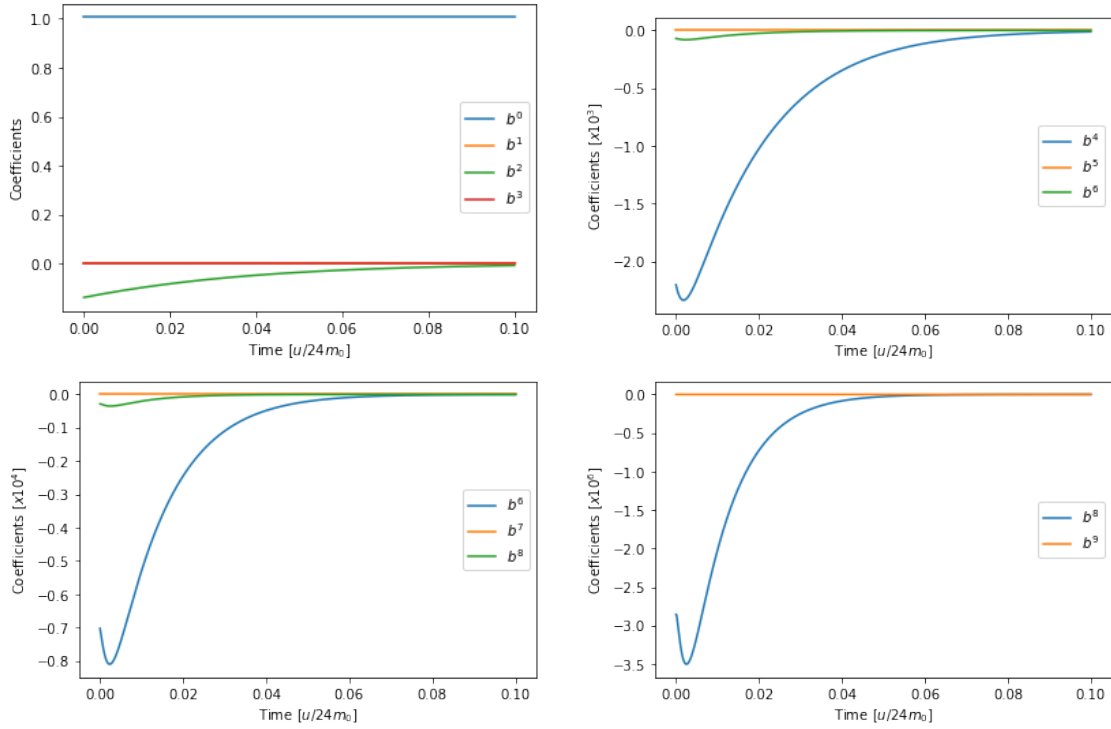


Figura 2: Coeficientes modais da evolução de u com condição inicial para $q = 1$ e $w = 0.5$.

portanto computar um N ímpar é praticamente equivalente a computar $N - 1$, note a inalteração das estimativas de erros em 1 para $N = 2$ e $N = 3$.

Agora, considere o caso para a condição inicial de BL-2 com $q = w = 0.5$, ou seja, este caso não apresenta condição de valor inicial com função par, logo a velocidade de *recoil* v_k será não nula.

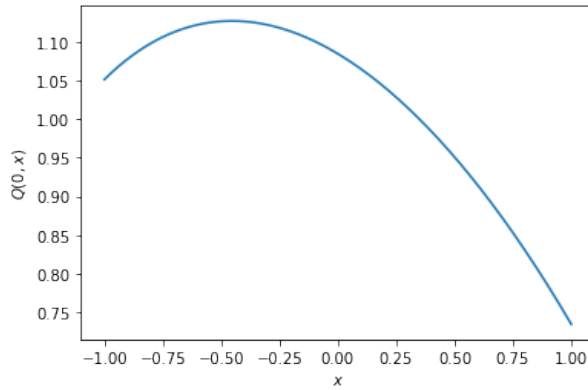


Figura 3: Condição inicial de Brill-Linquist para $q = w = 0.5$.

Calculando analiticamente os parâmetros de controle de erro numérico obtém-se $\Delta = 1.116493 \cdot 10^{-2}$ e $v_k = 0.166$. Note que, para o cálculo de v_k no caso sem simetria

de reflexão utilizou-se a aproximação para pequenos valores de w , tal que:

$$v = \frac{q-1}{q+1}w. \quad (65)$$

Os valores obtidos para $N = 6$ no caso $q = w = 0.5$ ilustrando a convergência seguem na tabela 2. Analisando a evolução dos coeficientes modais verifica-se que todos os b^l são diferentes de 0, dado que não há simetria adicional.

N	$ q_0 - 2 $	$ (b^0)^2 - (b^1)^2 - 1 $	Δ	v_k	t (seg)
2	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.281631 \cdot 10^{-2}$	0.164	0.99
3	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.145350 \cdot 10^{-2}$	0.164	2.06
5	$3 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.160228 \cdot 10^{-2}$	0.164	12.18
6	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.160296 \cdot 10^{-2}$	0.164	73.25

Tabela 2: Determinação da fração de energia (Δ), estimativa de erro e tempo de computação para a evolução de u , de $u_0 = 0$ até $u_0 = (24m_0)^{-1}$, com condição inicial para $q = w = 0.5$ e 1000 passos de integração.

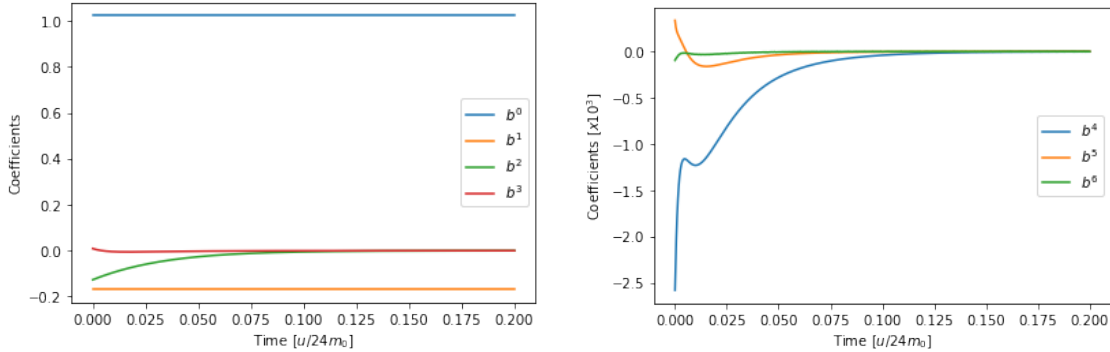


Figura 4: Coeficientes modais da evolução de u com condição inicial para $q = w = 0.5$.

7 Conclusão

Este trabalho buscou estudar o fluxo de Calabi em duas dimensões aplicado a descrição de emissões de ondas gravitacionais por objetos compactos. Primeiro, para uma contextualização do desenvolvimento teórico sobre o fenômeno de ondas gravitacionais, um breve panorama histórico foi apresentado na seção 2. Partindo das primeiras propostas que aproximavam as teorias do eletromagnetismo e mecânica, passando pelas controvérsias envolvendo a gravidade linearizada, e terminando com os mais recentes

avanços na área, provando a existência de soluções, condições iniciais e algoritmos de simulação no espaço-tempo de Robinson-Trautman. Na terceira seção, os preliminares matemáticos são apresentados, assim, a definição e caracterização do fluxo de Calabi sobre uma variedade compacta complexa com métrica de Kähler foi exposta, dando uma intuição sobre o comportamento deste fluxo em duas dimensões. Então, na seção 4, as propriedades físicas do espaço-tempo RT são exploradas, permitindo chegar nas equações que descrevem a evolução das ondas gravitacionais a partir da correta escolha dos graus de liberdade para determinar o momento de Bondi. Em seguida, o método numérico espectral utilizado é apresentado na seção 5, permitindo a decomposição da métrica em harmônicos esféricos, que leva a resolução do fluxo de Calabi. Por fim, uma discussão sobre as escolhas de implementação e os resultados para a condição inicial de Brill-Lindquist são apresentados.

Em termos teóricos, este trabalho endossa os recentes avanços em relatividade geral numérica, demonstrando a simplicidade do algoritmo espectral, com uma resolução eficiente em termos de tempo e memória computacional, sendo relativamente simples de implementar. Em termos práticos, abre portas para explorar diferentes casos de condição inicial (sem simetria, com rotação, multi corpos, etc.) na decomposição espectral, e novas abordagens competitivas de resolução de equações diferenciais.

A Algoritmo Implementado em Python

```
1 import numpy as np
2 from scipy import integrate
3 from scipy.special import legendre
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import time
6
7 class galerkin_method:
8     #Initialize class
9     def __init__(self, q, w, x, N):
10        #Attributes
11        self.q = q
12        self.w = w
13        self.x = x
14        self.N = N
15        self.recoil_v_exact = ((self.q-1)/(self.q+1))*self.w
16        self.Q_u0_exact = self.initial_condition()
17        self.q0_exact = self.normalization_condition(self.Q_u0_exact)
18        self.f_energy_exact = self.fraction_of_energy(self.Q_u0_exact,
19        self.recoil_v_exact)
20        self.b_u0 = self.initial_b_coef()
21        self.recoil_v_coef = -(self.b_u0[1]/self.b_u0[0])
22        self.Q_u0_coef = self.Q_decomp(self.b_u0, self.N, 0)
23        self.q0_coef = self.normalization_condition(self.Q_u0_coef)
24        self.f_energy_coef = self.fraction_of_energy(self.Q_u0_coef, self.
25        recoil_v_coef)
26        self.solution = self.solve()
27
28        #Auxiliary methods
29        def Q_decomp(self, b, i, n):
30            Q = np.zeros_like(self.Q_u0_exact)
31            for j in range(i+1):
32                Q += np.array(b[j]*np.polyval(legendre(j).deriv(n), self.x))
33            return Q
34
35        def K_coef(self, b, i):
```

```

34     return np.power((1-np.power(self.x,2)), 2)*(self.Q_decomp(b,i,0)*
self.Q_decomp(b,i,4)-np.power(self.Q_decomp(b,i,2), 2))-(8*(self.x-
self.x**3))*(self.Q_decomp(b,i,0)*self.Q_decomp(b,i,3))-4*(1-3*self.x
**2)*(self.Q_decomp(b,i,0)*self.Q_decomp(b,i,2))
35
36     #Main methods
37     def initial_condition(self):
38         corr = np.sqrt((1+self.q**4)/(1-self.w**2) + (4*self.q*(1+self.q
**2))/(np.sqrt(1-self.w**2)) + 3*(self.q**2/w)*np.log((1+self.w)/(1-
self.w)))
39         return corr*np.power((1/((self.q/np.sqrt((1+self.w*self.x))) + (1/
np.sqrt((1-self.w*self.x))))), 2)
40
41     def normalization_condition(self, Q_u0):
42         return integrate.simps((1/np.power(Q_u0, 2)), self.x)
43
44     def fraction_of_energy(self, Q_u0, v):
45         return 1 - (2/(np.sqrt(1-v**2)))*(1/(integrate.simps((1/np.power(
Q_u0, 3)), self.x)))
46
47     def initial_b_coef(self):
48         return [((2*i+1)/(2))*(integrate.simps((self.Q_u0_exact*np.polyval
(legendre(i).deriv(0), self.x)), self.x)) for i in range(self.N+1)]
49
50     def b_ODE_sys(self, u, b):
51         db_du = [(-2*i+1)*integrate.simps((np.power(self.Q_decomp(b,i,0),
3)*(self.K_coef(b,i))*(np.polyval(legendre(i).deriv(0), self.x))),
self.x) for i in range(self.N+1)]
52         return db_du
53
54     def solve(self):
55         t_span = np.array([0, 0.1])
56         times = np.linspace(t_span[0], t_span[1], 1000)
57         return integrate.solve_ivp(self.b_ODE_sys, t_span, self.b_u0,
t_eval=times, method='RK45')
58
59     #Initial condition 01

```

```

60 def initial_condition(x):
61     corr_0 = np.sqrt((1+q**4)/(1-w**2) + (4*q*(1+q**2))/(np.sqrt(1-w**2))
        + 3*(q**2/w)*np.log((1+w)/(1-w)))
62     return corr_0*np.power((1/(q/np.sqrt((1+w*x))) + (1/np.sqrt((1-w*x)))
        )), 2)
63
64 #Paramteres
65 q = 1
66 w = 0.5
67 x = np.cos(np.linspace(np.pi, 0.0, 1000))
68
69 #Plotting
70 plt.plot(x, initial_condition(x))
71 plt.xlabel("$x$")
72 plt.ylabel("$Q(0,x)$")
73 plt.show()
74
75 if __name__ == "__main__":
76     #Paramteres
77     q = 1.0
78     w = 0.5
79     x = np.cos(np.linspace(np.pi, 0, num=1000))
80     tests = [2, 3, 5, 7, 9]
81
82     for N in tests:
83         #Solve model
84         start_time = time.time()
85         model = galerkin_method(q, w, x, N)
86         elapsed = time.time() - start_time
87
88         print('Number of Modes: %d' % N)
89         print('Run Time: %.18f sec' % elapsed)
90         print('Analytic Normalization Condition: %.18f' % model.q0_exact)
91         print('Analytic Fraction of Energy: %.18f' % model.f_energy_exact)
92         print('Coefficients b(u_0): %s' % model.b_u0)
93         print('Error of Normalization Condition: %.18f' % abs(model.q0_coef
        -2))

```

```

94     print('Error of  $(b_0)^2 - (b_1)^2$ : %.18f' % abs(model.b_u0[0]**2 -
model.b_u0[1]**2 - 1))
95     print('Numerical Fraction of Energy: %.18f' % model.f_energy_coef)
96     print('Analytical Recoil Velocity: %.18f' % abs(model.recoil_v_exact
))
97     print('Numerical Recoil Velocity: %.18f' % abs(model.recoil_v_coef))
98     print('')
99
100 #Plot part 01
101 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[0], '--', label='$b^0$')
102 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[1], '--', label='$b^1$')
103 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[2], '--', label='$b^2$')
104 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[3], '--', label='$b^3$')
105 plt.xlabel('Time  $[u/24 m_0]$ ')
106 plt.ylabel('Coefficients')
107 plt.legend(loc='center right')
108 plt.show()
109
110 #Plot part 02
111 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[4]*10**3, '--', label='$b^4$')
    )
112 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[5]*10**3, '--', label='$b^5$')
    )
113 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[6]*10**3, '--', label='$b^6$')
    )
114 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[7]*10**3, '--', label='$b^7$')
    )
115 plt.xlabel('Time  $[u/24 m_0]$ ')
116 plt.ylabel('Coefficients  $[x10^3]$ ')
117 plt.legend(loc='center right')
118 plt.show()
119
120 #Plot part 03
121 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[6]*10**4, '--', label='$b^6$')
    )
122 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[7]*10**4, '--', label='$b^7$')
    )

```

```

123 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[8]*10**4, '-', label='$b^8$'
124 )
125 plt.xlabel('Time  $[u/24 m_0]$ ')
126 plt.ylabel('Coefficients  $[x10^4]$ ')
127 plt.legend(loc='center right')
128 plt.show()
129
130 #Plot part 04
131 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[8]*10**6, '-', label='$b^8$'
132 )
133 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[9]*10**6, '-', label='$b^9$'
134 )
135 plt.xlabel('Time  $[u/24 m_0]$ ')
136 plt.ylabel('Coefficients  $[x10^6]$ ')
137 plt.legend(loc='center right')
138 plt.show()
139
140 #Initial condition 02
141 def initial_condition(x):
142     corr_0 = np.sqrt((1+q**4)/(1-w**2) + (4*q*(1+q**2))/(np.sqrt(1-w**2))
143     + 3*(q**2/w)*np.log((1+w)/(1-w)))
144     return corr_0*np.power((1/((q/np.sqrt((1+w*x))) + (1/np.sqrt((1-w*x)))
145     )), 2)
146
147 #Paramteres
148 q = 0.5
149 w = 0.5
150 x = np.cos(np.linspace(np.pi, 0.0, 1000))
151
152 #Plotting
153 plt.plot(x, initial_condition(x))
154 plt.xlabel("$x$")
155 plt.ylabel("$Q (0,x)$")
156 plt.show()
157
158 if __name__ == "__main__":
159     #Paramteres

```

```

155 q = 0.5
156 w = 0.5
157 x = np.cos(np.linspace(np.pi, 0, num=1000))
158 tests = [2, 3, 5, 6]
159
160 for N in tests:
161     #Solve model
162     start_time = time.time()
163     model = galerkin_method(q, w, x, N)
164     elapsed = time.time() - start_time
165
166     print('Number of Modes: %d' % N)
167     print('Run Time: %.18f sec' % elapsed)
168     print('Analytic Normalization Condition: %.18f' % model.q0_exact)
169     print('Analytic Fraction of Energy: %.18f' % model.f_energy_exact)
170     print('Coefficients b(u_0): %s' % model.b_u0)
171     print('Error of Normalization Condition: %.18f' % abs(model.q0_coef
-2))
172     print('Error of (b_0)^2 - (b_1)^2: %.18f' % abs(model.b_u0[0]**2 -
model.b_u0[1]**2 - 1))
173     print('Numerical Fraction of Energy: %.18f' % model.f_energy_coef)
174     print('Analytical Recoil Velocity: %.18f' % abs(model.recoil_v_exact
))
175     print('Numerical Recoil Velocity: %.18f' % abs(model.recoil_v_coef))
176     print('')
177
178 #Plot part 01
179 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[0], '- ', label='$b^0$')
180 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[1], '- ', label='$b^1$')
181 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[2], '- ', label='$b^2$')
182 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[3], '- ', label='$b^3$')
183 plt.xlabel('Time $[u/24 m_0]$')
184 plt.ylabel('Coefficients')
185 plt.legend(loc='center right')
186 plt.show()
187
188 #Plot part 02

```

```
189 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[4]*10**3, '-', label='$b^4$')
    )
190 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[5]*10**3, '-', label='$b^5$')
    )
191 plt.plot(model.solution.t, model.solution.y[6]*10**3, '-', label='$b^6$')
    )
192 plt.xlabel('Time  $[u/24 m_0]$ ')
193 plt.ylabel('Coefficients  $[x10^3]$ ')
194 plt.legend(loc='center right')
195 plt.show()
```

Referências

- [1] Abbott, B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abernathy, M.R. Acernese, F. Ackley, K. Adams, C. Adams, T. Addesso, P. Adhikari, R.X. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physics Review Letters*, 116 (2016). URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [2] Virgo Laboratory (2022), acessado 11 Julho 2022. URL <https://www.virgo-gw.eu/>.
- [3] X. X. Chen W. Y. He. On the Calabi Flow (2007). URL <https://arxiv.org/abs/math/0603523v3>.
- [4] Chang, S. The 2-D Calabi Flow. *Nagoya Mathematical Journal*, Vol. 181 (2006), 63–73 (2006).
- [5] Bakas, I. The algebraic structure of geometric flows in two dimensions. *Journal of High Energy Physics* 2005, 038–038 (2005). URL <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2005/10/038>.
- [6] Heaviside, O. Whittaker, E. *Electromagnetic Theory*, chap. Appendix B, 455 – 466. No. v. 1 in AMS Chelsea Publishing Series (American Mathematical Society, 1893). URL <https://books.google.com.br/books?id=ErOjV0HBQSYC>.
- [7] Poincaré, H. Sur la dynamique de l' electron. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 140, 1504 – 1508 (1905).
- [8] Einstein, A. Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungs- berichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* 688–696 (1916).
- [9] Kennefick, D. *Traveling at the Speed of Thought: Einstein and the Quest for Gravitational Waves* (Princeton University Press, 2007). URL <http://www.jstor.org/stable/j.ctt19w72w0>.
- [10] Einstein, A. Rosen, N. On gravitational waves. *Journal of the Franklin Institute* 223, 43 – 54 (1937). URL [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(37\)90583-0](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(37)90583-0).

- [11] Pirani, F. A. E. Invariant formulation of gravitational radiation theory. *Phys. Rev.* 105, 1089–1099 (1957). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1089>.
- [12] Petrov, A. *Einstein Spaces* (Pergamon, 1969). URL <https://doi.org/10.1016/C2013-0-02070-1>.
- [13] Goldberg, J. N. Sachs, R. K. Republication of: A theorem on Petrov types. *General Relativity and Gravitation* 41, 434–444 (2009). URL <https://doi.org/10.1007/s10714-008-0722-5>.
- [14] Bondi, H., Pirani, F. A. E. Robinson, I. Gravitational waves in general relativity. III. Exact plane waves. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 251, 519 – 533 (1959). URL <https://doi.org/10.1098/rspa.1959.0124>.
- [15] Robinson, I. Trautman, A. Spherical gravitational waves. *Phys. Rev. Lett.* 4, 431–432 (1960). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.4.431>.
- [16] Sachs, R. Gravitational waves in general relativity. VI. The outgoing radiation condition. *Proc. R. Soc. Lond. A* 264, 309–338 (1961). URL <http://doi.org/10.1098/rspa.1961.0202>.
- [17] Newman, E. Penrose, R. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics* 3, 566–578 (1962). URL <https://doi.org/10.1063/1.1724257>.
- [18] Newman, E. T. Tamburino, L. A. Empty space metrics containing hypersurface orthogonal geodesic rays. *Journal of Mathematical Physics* 3, 902–907 (1962). URL <https://doi.org/10.1063/1.1724304>.
- [19] Newman, E. T. Unti, T. W. J. Behavior of asymptotically flat empty spaces. *Journal of Mathematical Physics* 3, 891–901 (1962). URL <https://doi.org/10.1063/1.1724303>.
- [20] Robinson, I. Trautman, A. Some spherical gravitational waves in general relativity. *Proc. R. Soc. Lond. A* 265, 463–473 (1962). URL <http://doi.org/10.1098/rspa.1962.0036>.

- [21] Bondi, H. Gravitational waves in general relativity. *Nature* 186, 535 (1960). URL <https://doi.org/10.1038/186535a0>.
- [22] Bondi, H., van der Burg, M. G. J. Metzner, A. W. K. Gravitational waves in general relativity, VII. Waves from axi-symmetric isolated system. *Proc. R. Soc. Lond. A* 269, 21–52 (1962). URL <http://doi.org/10.1098/rspa.1962.0161>.
- [23] Sachs, R. Gravitational waves in general relativity. VIII. Waves in asymptotically flat space-time. *Proc. R. Soc. Lond. A* 270, 103–126 (1962). URL <http://doi.org/10.1098/rspa.1962.0206>.
- [24] Foster, J. Newman, E. T. Note on the robinson-trautman solutions. *Journal of Mathematical Physics* 8, 189–194 (1967). URL <https://doi.org/10.1063/1.1705185>.
- [25] Rendall, A. D. Existence and asymptotic properties of global solutions of the Robinson- Trautman equation. *Classical and Quantum Gravity* 5, 1339–1347 (1988). URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/5/10/012>.
- [26] Singleton, D. On global existence and convergence of vacuum Robinson-Trautman solutions. *Classical and Quantum Gravity* 7, 1333–1343 (1990). URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/8/012>.
- [27] Chruściel, P. T. Semi-global existence and convergence of solutions of the Robinson-Trautman (2-dimensional Calabi) equation. *Communications in Mathematical Physics* 37, 289–313 (1991). URL <https://doi.org/10.1007/BF02431882>.
- [28] Prager, D. A. Lun, A. W.-C. Numerical integration of the axisymmetric Robinson-Trautman equation by a spectral method. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics* 41, 271–280 (1999).
- [29] Saa, A. One hundred years of black holes: the centenary of the Schwarzschild solution. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 38, n^o 4, e4201 (2016).
- [30] Cervantes-Cota, J., Galindo-Uribarri, S. Smoot, G. A brief history of gravitational waves. *Universe* 2, 22 (2016). URL <https://doi.org/10.3390/universe2030022>.

- [31] Macedo, R. P. Saa, A. Gravitational wave recoil in Robinson-Trautman spacetimes. *Physical Review D* 78 (2008). URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.104025>.
- [32] Aranha, R. F., Soares, I. D. Tonini, E. V. Mass-energy and momentum extraction by gravitational wave emission in the merger of two colliding black holes: The non-head-on case. *Physical Review D* 85 (2012). URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.024003>.
- [33] Carroll, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, chap. 7, 274 – 322 (Cambridge University Press, 2019).
- [34] Holmes, P., Lumley, J. L. Berkooz, G. Galerkin projection, 129–154. *Cambridge Monographs on Mechanics* (Cambridge University Press, 1996). URL <https://doi.org/10.1017/CBO9780511622700>.
- [35] Laurent, G. M., Harrison, G. R. The scaling properties and the multiple derivative of Legendre polynomials (2017). URL <https://arxiv.org/abs/1711.00925>.