



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



PEDRO DE CARVALHO ZOTTOLO

Geometria de Ruppeiner e as leis da Termodinâmica: um estudo sobre buracos negros extremos

Campinas
10/07/2022

PEDRO DE CARVALHO ZOTTOLO

Geometria de Ruppeiner e as leis da Termodinâmica: um estudo sobre buracos negros extremos

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Samuel Rocha.

Resumo

Trabalhos recentes demonstraram características únicas associadas à termodinâmica de buracos negros extremos, levantando assim uma discussão para dividir a teoria em duas, uma voltada para buracos negros extremos e outra para casos não extremos. Neste trabalho estudamos as propriedades teóricas e geométricas da termodinâmica de buracos negros extremos, evidenciando o caso de Reissner-Nordström. Em um primeiro momento revisamos os aspectos teóricos voltados para esse caso e no segundo momento um estudo voltado para a geometria de Ruppeiner e suas modificações, esta por sua vez permitindo uma análise mais profunda acerca do sistema termodinâmico, principalmente sobre as características da entropia.

Abstract

Recent papers has shown unique properties associated to extreme black holes thermodynamics, generating a discussion about classify the theory into two different parts, one focused on extreme black holes and the other on non-extremal cases. In this work we studied some theoretical and geometrical properties of extreme black holes thermodynamics, focusing on Reissner-Nordström black hole. Primarily we reviewed the theoretical aspects about thermodynamics and after this we studied the Ruppeiner geometry and a few modifications under this geometry, making possible to understand underlying properties about the statistical thermodynamics system, principally about the entropy of the system.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Visão Geral: Buraco Negro	7
2.1	Buraco Negro de Reissner-Nordström	8
3	Termodinâmica de Buracos Negros	12
4	Geometria de Ruppeiner	15
4.1	Ruppeiner em RN Extremo	18
4.2	Modificações da geometria de Ruppeiner	18
5	Conclusão	26

1 Introdução

As teorias da relatividade restrita e geral, formuladas por Albert Einstein, criaram e abriram novos horizontes para o entendimento do nosso universo e suas estruturas. Muitas conclusões desde então foram feitas e comprovadas, tais como lentes gravitacionais, ondas gravitacionais e a evolução do universo.

Em 1916, menos de um ano após a publicação da Teoria da Relatividade Geral por Einstein, Karl Schwarzschild descobriu uma solução para as equações de Einstein que descreve o espaço-tempo em torno de um objeto estático e esfericamente simétrico de massa M , ver Poisson [2004]. Esses objetos começaram a ser conhecidos como buracos negros, regiões nas quais nada pode escapar, nem mesmo a luz, graças a enorme força gravitacional em torno deles.

Mais tarde, foram formuladas as leis da mecânica de buracos negros por Hawking, Bardeen e Carter, trazendo novas concepções e possibilidades de estudos acerca de buracos negros. A termodinâmica de buracos negros, que até então não tinha um embasamento forte, se apoiou na construção das leis da mecânica para descrever melhor os sistemas dos buracos negros. Muitas conclusões fortes puderam ser estabelecidas a partir dessas novas leis, bem como a radiação Hawking e a generalização da segunda lei por Bekenstein.

Neste sentido, este trabalho visa estudar tanto as propriedades e teoremas da termodinâmica de buracos negros, principalmente do caso extremo de Reissner-Nordström, como as descrições geométricas formuladas por Ruppeiner e Weinhold sobre os sistemas termodinâmicos, como também as relações que podemos tirar das duas áreas e os futuros desenvolvimentos sobre termodinâmica de buracos negros extremos.

No primeiro momento, foi revisado os aspectos clássicos da relatividade sobre buracos negros, como a definição das métricas, estruturas e propriedades da geometria. Em seguida, foi aprofundado a teoria da mecânica e termodinâmica de buracos negros, focando principalmente no caso de estudo, levantando detalhes e conclusões recentes sobre este tipo de buraco negro.

Por fim, foi estudado a geometria de Weinhold e de Ruppeiner, que descrevem o sistema estatístico termodinâmico, evidenciando a geometria de Ruppeiner que possibilita

o estudo sobre a entropia local. Ainda no contexto da geometria de Ruppeiner, foi visto como diferentes relações podem modificar o resultado do escalar de curvatura. Essas relações são as modificações da geometria, seja por uma análise de outras variáveis ou por uma aproximação de outras soluções de buracos negros para Reissner-Nordström. Durante todo o trabalho, utilizaremos $G = \hbar = c = k_B = 1$, sinais de métricas - + + + e notações utilizadas em Poisson [2004].

2 Visão Geral: Buraco Negro

A métrica de Schwarzschild, dada pela equação (1), descreve o espaço-tempo em torno de um objeto de massa M esfericamente simétrico e estático, Poisson [2004].

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

onde $r^2 d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$. Pode-se notar que quando $r = 2M$ teremos uma singularidade (de coordenada) onde a métrica diverge para o infinito, chamamos essa região de raio de Schwarzschild r_s , outra singularidade ocorre quando $r = 0$. Para desviar dessa região e poder entender o que acontece quando $r < r_s$ tomamos um novo sistema de coordenadas, seja $v = t + r + 2M \ln |r - 2M|$ e $u = t - r + 2M \ln |r - 2M|$, a métrica de Schwarzschild toma forma de (2), essa transformação é de Eddington-Finkelstein.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (2)$$

É notável que quando temos $r = r_s$ a métrica fica regular, porém quando $r = 0$ a singularidade (física) não pode ser removida com uma transformação de coordenadas, Hawking [1973]. Outras transformações de coordenadas podem retirar a dificuldade de avaliar a métrica de Schwarzschild como: Kruskal, Painlevé-Gullstrand, ver Poisson [2004]. Vale ressaltar que mesmo transformando as coordenadas e analisando as regiões depois de r_s , isto não implica que sabemos o que de fato ocorre dentro do buraco negro, apenas entendemos que a geometria deixa de ser "espacial" para "temporal".

Dado um espaço-tempo assintoticamente plano (M, g_{ab}) , definimos a região do

buraco negro, \mathcal{B} , como

$$\mathcal{B} = M - J^-(\mathcal{I}^+) \quad (3)$$

onde J^- denota o passado cronológico e \mathcal{I}^+ o futuro causal. O caráter da singularidade quando $r = 2M$ é bastante intrigante do ponto de vista matemático e físico. Essa região conhecida como horizonte de eventos (HE) separa as regiões do buraco negro: o horizonte futuro(lado interno) e o horizonte passado (lado exterior). A definição do HE é dada por

$$\mathcal{H} = \partial\mathcal{B} \quad (4)$$

em outras palavras, é a fronteira da região do buraco negro. Por conta deste HE, o exterior e o interior passam a ser desconectados casualmente Horvath [2020], ou seja, não é possível enviar um sinal de dentro do buraco negro para o exterior sem quebrar as leis da física.

A conjectura de censura cósmica, proposta por Roger Penrose, apresenta duas formas: a fraca e a forte, discutindo a estrutura e formação de singularidades. A conjectura fraca nos diz que espaços-tempos gerados por condições genéricas e que são assintoticamente planos no futuro tipo-luz infinito não possuem singularidades nuas, ou seja, singularidades que carecem de um horizonte de eventos. Já a conjectura forte declara que todos os espaços-tempos genéricos são globalmente hiperbólicos, isto significa que singularidades do tipo-tempo nunca serão vistas, até mesmo para um observador dentro da região do buraco negro.

2.1 Buraco Negro de Reissner-Nordström

Sabemos que a solução de Schwarzschild descreve um buraco negro estático e esféricamente simétrico, entretanto ao incorporar a ação da teoria de Einstein-Maxwell, eq.(5), conseguimos derivar a métrica de Reissner-Nordström (RN). Além disso, pelo teorema da unicidade a única solução estática com horizonte com componente conexo é RN.

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F^{ab} F_{ab}) \quad (5)$$

Como o tensor de energia-momento em RN é dualmente invariante rotacional-

mente, a métrica irá depender exclusivamente dos valores da carga elétrica e magnética, Q e P , respectivamente. Assim, a métrica geral de RN é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (6)$$

onde $e = \sqrt{Q^2 + P^2}$ e o potencial elétrico associado à métrica é $A = -\frac{Q}{r}dt - P \cos \theta d\phi$. No momento, a métrica será dada somente pela carga elétrica, ou seja, faremos $P = 0$ e com isso podemos fazer $e \rightarrow Q$, então nossa métrica será dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (7)$$

A métrica de RN possui duas estruturas de horizontes: HE e Horizonte de Cauchy (HC), dadas pela solução de $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2$, então as coordenadas dos horizontes são, respectivamente

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (8)$$

é notável que essas soluções podem ser categorizadas em três casos diferentes para as relações de M e Q , ou seja (i) quando $M > |Q|$, (ii) quando $M = |Q|$ temos o caso extremo e (iii) quando $M < |Q|$ temos o caso de singularidade nua. No presente trabalho iremos tratar do segundo caso, quando $M = |Q|$, implicando assim em $r_+ = r_-$ e portanto a equação (7) pode ser reescrita como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{Q}{r} \right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{Q}{r} \right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9)$$

Conseguimos explorar a métrica mais a fundo e, para fazer isso, basta tomar uma mudança de coordenadas, dada por $dv = dt \frac{dr}{(1-\frac{Q}{r})}$ e portanto, teremos uma métrica com a coordenada $r = Q$ sendo não degenerada, para mais detalhes ver Strominger [2015]. Além disso, quando $r = Q$ a hipersuperfície do RN extremo é um horizonte de Cauchy e, também, é uma superfície instável, ou seja, qualquer perturbação feita nessa região faz com que a superfície de Cauchy cresça sem contornos.

Como na métrica de Schwarzschild, a solução de RN possui vetor Killing do

tipo tempo. Entretanto ao se tratar do caso extremo não há nenhuma região no qual os vetores Killing sejam do tipo espaço. Adicionalmente, o buraco negro de RN extremo é temporalmente independente em todos os lugares do espaço, em particular não há linhas distintas de tempo reverso, exceto por si mesmo, Ederly and Constantineau [2011].

Sabemos que o raio dos horizontes de RN são fixos e constantes para cada possibilidade de M e Q e com isso podemos ir mais além e calcular a área desse buraco negro. Espaços-tempo esfericamente simétricos possuem a mesma simetria de S^2 , uma vez que a métrica de S^2 é dada por $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, pode-se calcular a área através da função do raio da área, $r(\lambda)$, sendo assim

$$r(\lambda) = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad (10)$$

além disso, S^2 possui a métrica induzida de $r(\lambda)d\Omega^2$. Para RN, a partir das equações das coordenadas dos horizontes, tem-se que $r(\lambda) = r_+$ e com isso partindo da equação (10) concluimos que a área do buraco negro RN é $A_{RN} = 4\pi \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^2$, já para o caso extremo esse valor será dado por $A_{RNE} = 4\pi M^2$, e claramente $A_{RNE} < A_{RN}$. Na figura 1 vemos a secção circular dos buracos negros de Schwarzschild e RN para diferentes valores de Q dado um M fixo.

Vale ressaltar que, para $Q > 0$ a estrutura geométrica do buraco negro de RN é menor que Schwarzschild, esse fator está ligado com as interações feitas pelas cargas elétricas presentes no corpo, atingindo um mínimo quando $M = |Q|$.

Dizemos que uma superfície é retida fechada se as expansões escalares dos vetores tipo luz, l^μ e n^μ , são negativas, ou seja, definindo as expansões como

$$\theta_l = h^{\mu\nu} \nabla_\mu l_\nu \quad \theta_n = h^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu \quad (11)$$

onde $h^{\mu\nu}$ é a métrica induzida de $g_{\mu\nu}$, portanto $\theta_l < 0$ e $\theta_n < 0$ são condições para a superfície ser retida fechada. Adiantando alguns passos nos cálculos, notamos que para o caso extremo de RN temos que

$$\theta_l = -\frac{2}{r}\theta_n = \frac{(r - M)^2}{r^3} \quad (12)$$

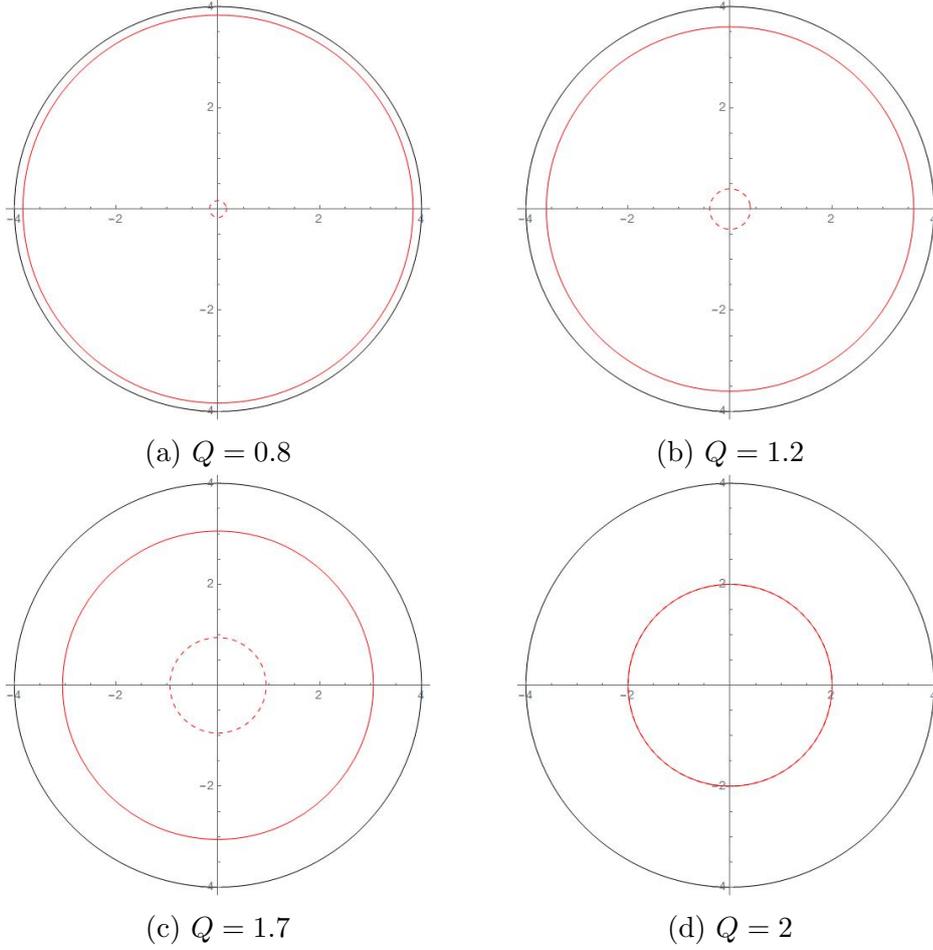


Figura 1: Comparação dos horizontes entre Schwarzschild (preto) e RN (vermelha) para $M = 2$, a contínua representa r_+ enquanto a tracejada representa r_-

com isso $\theta_l < 0$ e $\theta_n > 0$, portanto não possui superfícies retidas fechadas, para mais detalhes ver Pradhan and Majumdar [2011]. Em geral, buracos negros extremos não possuem superfícies retidas fechadas, o que implica que nestes casos não há a presença de superfícies de bifurcação e portanto a gravidade superficial desses casos é zero. Uma vez que podemos definir a gravidade superficial como

$$\nabla^a(\xi^b \xi_b) = -2\kappa \xi^a \quad (13)$$

onde ξ^a é o campo de Killing e, com isso, esse nosso campo não some numa superfície de bifurcação. Desse modo, para o caso de RN, temos que a gravidade superficial é dada por

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} \quad (14)$$

e evidentemente, no caso quando os horizontes coalescem, tem-se que $\kappa = 0$, confirmando assim a relação de superfícies de bifurcação. Destaca-se que a única solução de buraco negro estático esfericamente simétrico para as equações de Einstein com gravidade superficial igual a zero é RN extremo.

Podemos analisar a topologia perto do horizonte em RN extremo, para isso, podemos fazer uma substituição de variáveis tal que $r = M(1 + \chi)$ e então nossa métrica será

$$ds^2 \cong -\chi^2 dt^2 + \frac{M^2}{\chi^2} d\chi^2 + M^2 d\Omega^2 \quad (15)$$

essa geometria local é $AdS_2 \times S^2$. Hawking et al. [1995] atribuem essa topologia trivial como uma condição para buracos negros extremos terem zero entropia, além do mais, como vimos anteriormente, a área do RN extremo é maior que zero e portanto não podemos atribuir que a entropia sempre será dada por $S_{BH} = A/4$. Essas características, zero entropia, $\kappa = 0$, independência temporal e ausência de superfície de bifurcação são propriedades que caracterizam buracos negros extremos.

3 Termodinâmica de Buracos Negros

Buracos negros possuem um comportamento de um objeto termodinâmico, essa descoberta mudou o entendimento da comunidade científica acerca da relatividade geral, tanto em aspectos clássicos como quânticos. Em sistemas termodinâmicos clássicos, o comportamento do sistema é descrito por um número pequeno de parâmetros, consequentemente podemos pensar nessa ferramenta para o estudo sobre buracos negros. A pequena quantidade de parâmetros é válida para o sistema de buracos negros, uma vez que o teorema da calvície (*No hair theorem*) nos permite descrever esse corpo por um número finito e pequeno de parâmetros: a massa M , o momento angular J e a carga Q .

Em 1972, Hawking demonstrou que a área de um buraco negro nunca decresce, $\delta A \geq 0$, mais ainda dado dois buracos negros distintos com áreas A_1 e A_2 , ao se unirem a área do buraco negro resultante deve seguir a seguinte relação $A_3 > A_1 + A_2$, Hawking [1972]. Esse resultado ficou conhecido como a segunda lei para os buracos negros, justamente pela analogia com a segunda lei da termodinâmica, $\delta S \geq 0$.

A partir dessa demonstração, Bardeen et al. [1973] publicaram as quatro leis

da mecânica de buracos negros, desenvolvidas para buracos negros assintoticamente plano estacionário em quadro dimensões. Da mesma maneira que a lei das áreas tem analogia com a segunda lei da termodinâmica, as outras três seguem a mesma numeração em razão de suas semelhanças. Embora podemos achar uma semelhança com as funções de κ em relação a T e A em relação a S , Bardeen, Carter e Hawking argumentam que essas funções κ e A não são, respectivamente, a temperatura e entropia "verdadeira" do buraco negro.

A lei zero da mecânica de Buracos Negros assegura que a gravidade superficial, κ , é constante em todo o horizonte. A equação (13) define a construção da gravidade superficial em termos do campo de Killing e como já foi demonstrado na secção anterior, no caso de RN extremo, essa gravidade superficial é zero.

Existem muitas formulações para a primeira lei da mecânica de buracos negros. Para a termodinâmica clássica, essa lei define a conservação de energia. A primeira derivação requeria que a perturbação fosse estacionária, contudo essa derivação serviu para demonstrar que a lei é válida para perturbações não estacionárias. A primeira lei na sua forma geral é dada por

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q + \dots \quad (16)$$

onde o termo "... " representa outras contribuições de campos, as quantidades κ , Ω e Φ são definidas localmente no horizonte e, além disso, são constantes por toda a superfície. Para buracos negros carregados a equação (16), levando em conta a forma diferencial, irá ser reduzida para

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Phi dQ \quad (17)$$

e claramente no caso extremo, a primeira lei dependerá somente do termo " ΦdQ ".

Como foi dito antes, a segunda lei estabelece que a área do horizonte nunca decresce com o tempo. Contudo, a segunda lei falha para gravidades em altas dimensões e a entropia é proporcional a quantidade calculada em um horizonte em uma diferente geometria local, Sarkar [2019]. Entendemos que esta lei tem uma origem estatística, em contra partida a lei das áreas tem uma origem na geometria diferencial.

A priori, a entropia apresenta um furo quando contabilizavam o buraco negro, pois ao jogar um corpo nessa região, o processo levará à perda de entropia por parte

do corpo enquanto não haverá ganho pela outra parte, o que significa que a entropia do universo decrescerá. Originando-se nessa questão, Bekenstein [1973, 1974] atribui a entropia de buracos negros dada por

$$S_{BH} = \frac{A}{4} \quad (18)$$

onde A é a área do buraco negro, e com isso define um entropia generalizada, S' , que é dada pela soma da entropia do buraco negro e a entropia da matéria fora do buraco negro, com isso a segunda lei generalizada (*GSL*) é dada por

$$S' \equiv S_{BH} + S \quad (19)$$

e portanto a entropia do universo nunca decresce, $\delta S' \geq 0$.

A partir da argumentação usada por Bardeen, Carter e Hawking, houve uma motivação por parte de Hawking para calcular a verdadeira temperatura de um buraco negro. Partindo dos estudos envolvendo criações de partículas em espaços curvos, Hawking [1975] mostrou que a temperatura de um buraco negro é dada pela seguinte relação $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$. Todavia, ao levar a radiação Hawking em conta, a segunda lei da mecânica começa a apresentar alguns erros, pois pela conservação de energia, o buraco negro deverá perder massa em relação à radiação emitida, processo que é chamado de evaporação. Neste processo a área do buraco decrescerá e, portanto, violando a lei da área, porém a *GSL* pode ser preservada ao ser levado processos quânticos em conta.

A analogia das leis da mecânica de buracos negros com as leis clássicas da termodinâmica têm uma ruptura ao encararmos a terceira lei, na forma de Planck-Nernst, que estabelece a relação $S \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$, essa quebra se dá pela existência de buracos negros extremos. Em 1986, Israel [1986] demonstrou que buracos negros seguem a condição fraca da terceira lei: a gravidade superficial de um buraco negro, κ , não pode se reduzir a zero em um tempo finito. Ederly and Constantineau [2011] mostraram que buracos negros obedecem a condição forte da terceira lei da termodinâmica, a condição fraca implica que buracos negros extremos não podem ser formados por colapso gravitacional e nem por um número finitos de processos.

A validade dessas condições nos mostra que buracos negros extremos não mu-

dam para não-extremos e vice-versa, com isso é mais usual de pensar que buracos negros extremos são vistos como eternos. Portanto, podemos categorizar buracos negros em dois grupos: extremos (eternos) e não-extremos, trabalhando então de maneiras distintas entre esses grupos. Em termos semiclássicos, buracos negros com temperatura igual a zero não existem e, fora o caso RN extremo, se existir não há uma união suave e contínua na família de solução clássica de RN, Anderson et al. [2000].

Liberati et al. [2000] mostraram que buracos negros extremos RN incipientes emitem radiação não-térmica, portanto há um indício que esses objetos percam massa ao longo do tempo e, conseqüentemente, surja uma singularidade nua e uma violação da conjectura de censura cósmica. Esse resultado também mostra, a princípio, uma violação do teorema da calvície pois a amplitude do espectro contém uma constante que depende do histórico do colapso do objeto. Entretanto, como já vimos, buracos negros extremos RN não podem ser formados por colapso gravitacional, então não há uma violação desse teorema e além do mais, Hawking et al. [1995] discutem que RN extremo só surjam de criação de pares.

Ainda há uma questão em aberto: essa radiação com espectro não-térmico realmente viola a conjectura de censura cósmica? Liberati, Rothman e Sonogo mostram, no mesmo artigo, que o fluxo de energia emitido pelo buraco negro some assintoticamente em tempos mais tardios, portanto o buraco negro não perde massa e preserva a conjectura, evidência teórica que podemos classificar RN extremo como eterno. Todavia, esse resultado gera um novo paradoxo: como há emissão de partículas e o fluxo de energia é zero ao mesmo tempo?

4 Geometria de Ruppeiner

Muitas aproximações com a geometria de Riemann e as propriedades termodinâmicas de um certo sistema foram feitas ao longo das últimas décadas, questionando a possibilidade de extrair informações necessárias para estudar um sistema termodinâmico a partir de sua geometria. Essas aproximações podem ser levadas ao contexto do estudo de buracos negros, especialmente em relação a sua fase de transição, capacidade térmica etc. Em uma das situações, a Hessiana da entropia termodinâmica S pode ser escrita com

base nessa geometria, tal que a métrica será dada por

$$g_{ij} = -\partial_i \partial_j S(X^i) \quad (20)$$

onde X^i serão as variáveis extensíveis do sistema de acordo com o sistema de coordenadas. No caso dos BNs podemos relacionar, como vimos no capítulo anterior, pelas variáveis constantes M , J e Q .

Weinhold, em 1975, propôs uma representação métrica do sistema a partir da Hessiana da sua energia M e outras variáveis extensíveis N^a , podendo escrever $M(S, N^a)$, ver Weinhold [1975]. Assim, a equação será da forma

$$g_{ij}^W = \partial_i \partial_j M(S, N^a) \quad (21)$$

Ruppeiner estendeu os resultados de Weinhold para explorar as informações fundamentais de um sistema mecânico estatístico, afirmando que se a geometria for plana, o sistema não terá interação enquanto a curvatura será divergente na singularidade. Mais ainda, ele demonstrou que a curvatura mostra importantes informações sobre a estabilidade do sistema. Sendo assim podemos reescrever a geometria de Wienhold que era $M(S, N^a)$ para $S(M, N^a)$, resultando na métrica de Ruppeiner

$$g_{ij}^R = -\partial_i \partial_j S(M, N^a) \quad (22)$$

curiosamente, ambas geometrias são correlatas, tomando a temperatura do sistema T como $T = \partial_S M$, podemos escrever a métrica como

$$ds^2 = g_{ij}^R dM^i dM^j = \frac{1}{T} g_{ij}^W dS^i dS^j \quad (23)$$

onde $M^i = (M, N^a)$ e $S^i = (S, N^a)$.

No contexto de BNs, Aman et al. [2003] utilizaram a geometria de Ruppeiner para atribuir o fato de ser plana à ação de Einstein-Maxwell ser invariante na escala. Eles acrescentam que o argumento de Ruppeiner não é aplicável diretamente aos BNs, pois a termodinâmica dos buracos exhibe algumas características não familiares, porém

essa geometria ainda diz algo sobre os BN em si. Com isso, conseguimos formalizar a geometria de Ruppeiner e/ou Weinhold para buracos negros, levando em consideração os termos 'extensivos'.

Tomando a métrica de RN e a partir das soluções de horizontes r_+ e r_- temos que

$$M = \frac{1}{2}(r_+ + r_-) \quad Q^2 = r_+ r_- \quad S = r_+^2 \quad (24)$$

e assim conseguimos construir uma relação de $M(S, Q)$ tal que

$$M = \frac{\sqrt{S}}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{S} \right) \quad (25)$$

Conseguimos construir as relações de potencial elétrico (variável intensiva) e da temperatura para RN, sendo respectivamente $\Phi = \partial_Q M$ e $T = \partial_S M$, portanto

$$T = \frac{1}{4\sqrt{S}} \left(1 - \frac{Q^2}{S} \right) \quad \Phi = \frac{Q}{\sqrt{S}} \quad (26)$$

então, conseguimos construir nossa métrica de Weinhold para RN e depois derivar a métrica de Ruppeiner. Então a métrica será dada por

$$ds_W^2 = \frac{1}{8S^{3/2}} \left(- \left(1 - \frac{3Q^2}{S} \right) dS^2 - 8QdQdS + 8SdQ^2 \right) \quad (27)$$

Segundo Davies [1977] o calor específico C_Q de RN terá um valor crítico quando $\Phi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, isso demonstra que o calor específico irá divergir e mudar o sinal nesse ponto, contudo, podemos notar que esse valor aplicado à nossa métrica (27), o termo g_{SS}^W irá sumir.

Podemos reescrever essa métrica para retirar os termos cruzados e termos uma métrica diagonal, ou seja, fazer uma transformação adequada para diagonalizar. Tome $u = \frac{Q}{\sqrt{S}}$, então

$$ds_W^2 = \frac{1}{8S^{3/2}} \left(- (1 - u^2) dS^2 + 8Sdu^2 \right) \quad (28)$$

com $-1 \leq u \leq 1$. A métrica de Ruppeiner para esse caso será, dado que $T = \frac{1}{4\sqrt{S}}(1 - u^2)$

$$ds_R^2 = \frac{1}{T} ds_W^2 = -\frac{1}{2S^2} dS^2 + \frac{4S}{1 - u^2} du^2 \quad (29)$$

calculando o escalar de curvatura, R_R , conclui-se que essa métrica é plana pois $R_R = 0$, para mais detalhes ver Åman and Pidokrajt [2008].

4.1 Ruppeiner em RN Extremo

Quando $M = |Q|$, teremos o caso extremo e portanto pelas equações de (24) que $Q^2 = S$ e isto implica em (26) que $T = 0$ (o esperado pela teoria e leis da termodinâmica) e $\Phi = \pm 1$. Observamos que, neste caso o ponto crítico de Davies está abaixo do valor quando estamos tratando de RN extremo, $\Phi_c = 1/\sqrt{3} < \Phi = 1$. Sabemos também pelas equações de (24) que $M = r_{\pm} = r_+$ e que $S = M^2$.

Analisando a métrica de Weinhold pela equação (28), vemos que mesmo no ponto de extremo a métrica continua regular e muda de sinal, já que $u = \pm 1$. Entretanto, ao calcular a métrica de Ruppeiner para RN extremo é notável que toda a métrica vai divergir, pois

$$ds_R^2 = \frac{1}{T} ds_W^2, \quad T \rightarrow 0 \implies ds_R^2 \rightarrow \infty \quad (30)$$

Esse fator de divergência não impede na análise da geometria do problema, a princípio, pois ao calcularmos o escalar de curvatura de Ruppeiner, R_R , vimos que o mesmo não depende dos valores que $\{M, S, Q\}$ tomem, uma vez que $R_R = 0$. Isso indica que a geometria no caso extremo ainda será plana, porém não analítica em cada ponto seu, e, portanto indica sua invariância na escala. O resultado da métrica ser plana para RN, independente de ser ou não-extremo, é o mesmo se aumentarmos as dimensões do problema ou se reduzirmos as dimensões para modelos semelhante, para aprofundar mais nesse assunto ver Åman and Pidokrajt [2006] e Åman et al. [2007]

4.2 Modificações da geometria de Ruppeiner

A construção feita acerca das geometrias Weinhold e Ruppeiner na secção anterior foi dada pelo conjunto de variáveis $\{M, S, Q\}$. No capítulo 2, vimos sobre as leis

da termodinâmica para buracos negros, neste caso possuímos uma analogia do conjunto de construção das geometrias Weinhold e Ruppeiner com a primeira lei da termodinâmica, onde

$$dM = TdS + \Phi dQ + \Omega dJ \quad (31)$$

onde Ω e J são, respectivamente, velocidade angular e momento angular, para o caso de RN $J = 0$. Podemos 'reescrever' a massa em termos das variáveis já conhecidas

$$\tilde{M} = M - \Phi Q - \Omega J \quad (32)$$

e com isso conseguimos escrever uma equação análoga a primeira lei usando \tilde{M}

$$d\tilde{M} = TdS - Qd\Phi - Jd\Omega \quad (33)$$

No artigo de Shen et al. [2007], eles discutem o caráter de energia para as duas equações escritas acima, (31) e (33), em analogia com processos térmicos, neste caso o modelo está associado com o de van der Walls-Maxwell. Enquanto na primeira equação teremos uma "energia de entalpia", na segunda o termo "energia interna" é mais válido e com isso conseguimos aplicar ao estudo da termodinâmica de BN.

O caso de RN aplicado à geometria de Ruppeiner não demonstra grandes conclusões acerca do sistema termodinâmico, onde o escalar de curvatura sempre é plano. Para contornar essa situação podemos, a partir do pensamento de energia interna, construir uma geometria de Ruppeiner modificada, pensando assim em termo das variáveis $\{\tilde{M}, S, \Phi\}$, Medved [2008]. Essa escolha de variáveis, aplicadas ao conceito feito por Ruppeiner, soa mais natural e fundamental, e, portanto podendo fornecer outras características que não foram mostradas na análise passada.

Com isso, tomando as equações (25), (32) (fazendo $J = 0$) e o fato de $\Phi = \frac{Q}{\sqrt{S}}$, segue que

$$\tilde{M} = \frac{\sqrt{S}}{2} (1 - \Phi^2) \quad (34)$$

e com isso podemos aplicar a construção geométrica feita anteriormente. Desta forma, a geometria de Weinhold será dada pela Hessiana de \tilde{M} em relação à S e Φ , resultando

assim

$$d\tilde{s}_W^2 = -\frac{(1-\Phi^2)}{8S^{3/2}}dS^2 - \frac{\Phi}{\sqrt{S}}dSd\Phi - \sqrt{S}d\Phi^2 \quad (35)$$

Para derivarmos a métrica de Ruppeiner para esse caso precisamos da temperatura, que nessa transformação será dada por $T = \partial_S \tilde{M}$, obtendo o valor de

$$T = \frac{(1-\Phi^2)}{4\sqrt{S}} \quad (36)$$

vemos que para o caso extremo, isto é $\Phi = \pm 1$, a temperatura do sistema será 0, o que está de acordo com a teoria feita pelas leis da termodinâmica. Mais ainda, tanto a temperatura em termos de $\{\tilde{M}, S, \Phi\}$ quanto em termos de $\{M, S, Q\}$, não seguem o pressuposto pela terceira lei da termodinâmica, ou seja, quando $S \rightarrow 0$ implica que $T \rightarrow 0$. Conseguimos então, construir a nossa métrica de Ruppeiner

$$d\tilde{s}_R^2 = \frac{1}{T}d\tilde{s}_W^2 = -\frac{1}{2S}dS^2 - \frac{4\Phi}{(1-\Phi^2)}dSd\Phi - \frac{4S}{(1-\Phi^2)}d\Phi^2 \quad (37)$$

Para sabermos se o espaço estudado é plano, precisamos calcular o escalar de curvatura \tilde{R}_R

$$\tilde{R}_R = -\frac{1-\Phi^2}{S(1-3\Phi^2)^2} \quad (38)$$

vemos que no caso extremo $\Phi = \pm 1$ a nossa curvatura irá sumir e quando $\Phi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ o escalar irá divergir para $-\infty$ e esse ponto é exatamente o ponto crítico de Davies. Podemos analisar nosso escalar de curvatura em termos de r_+ e r_- , teremos então

$$\tilde{R}_R = -\frac{r_+ - r_-}{r_+(r_+ - 3r_-)^2} \quad (39)$$

Podemos notar que no caso extremo, $r_+ = r_-$, nosso escalar de curvatura irá sumir, mostrando uma transição de fase, porém conhecemos agora as fronteiras quase extremas. Já no ponto $r_+ = 3r_-$, o escalar de curvatura irá divergir $\tilde{R}_R \rightarrow -\infty$ e esse ponto já é de nosso conhecimento, caracterizado pelo ponto crítico de Davies. Fica claro, com essa modificação, que o escalar de curvatura atribuído à geometria de Ruppeiner é não constante e passível de uma análise mais detalhada.

Podemos ver pela figura 2 os diferentes valores de \tilde{R}_R a medida que modi-

ficamos r_+ e deixamos r_- fixo. Em momentos nos quais ocorrem a singularidade nua $r_- > r_+$, nosso escalar \tilde{R}_R é positivo e quanto mais r_+ se aproxima do 0 o escalar diverge para $+\infty$. Além dos pontos citados anteriormente, caso extremo e ponto crítico, vale ressaltar que quando $r_+ \rightarrow \infty$ nosso escalar de curvatura tende a zero, indicando uma possível transição de fase. Quando $r_- = 0$, figura 2d, retornamos para o caso do BN de Schwarzschild, com isso conseguimos calcular indiretamente a geometria de Ruppeiner associada às variáveis $\{\tilde{M}, S\}$ para Schwarzschild.

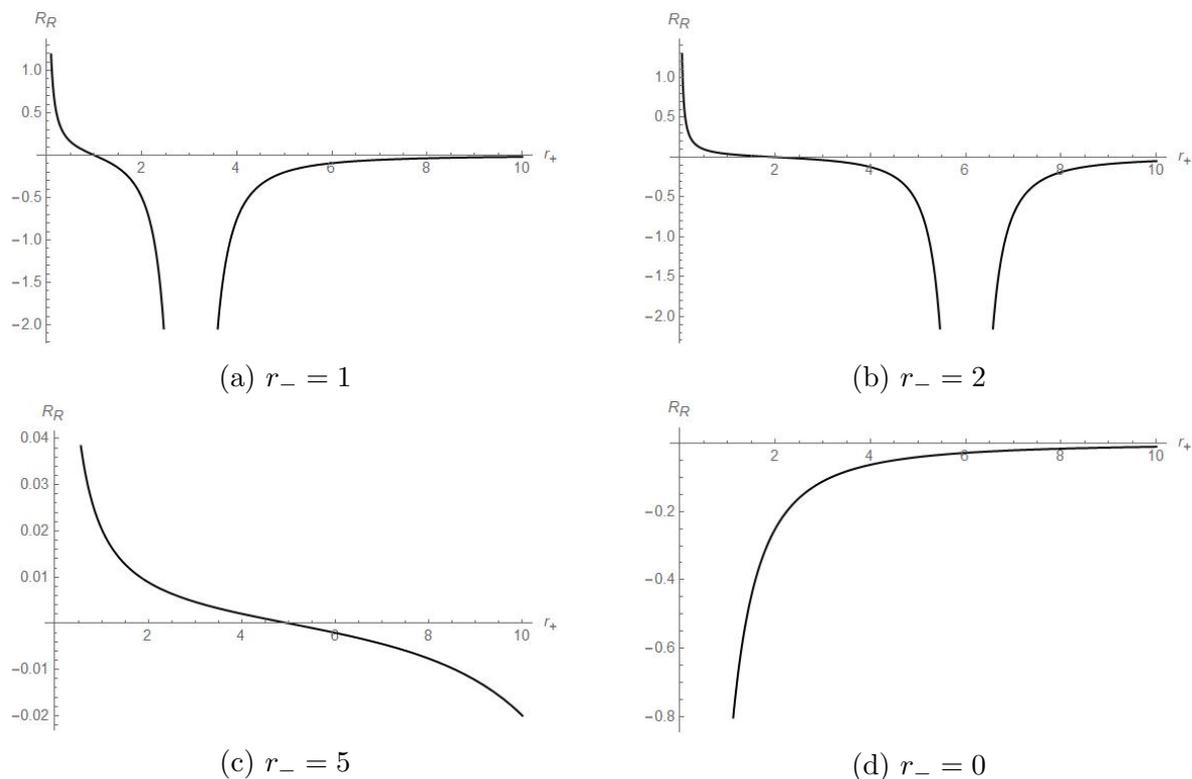


Figura 2: Escalar de curvatura para diferentes valores de r_-

Podemos utilizar do artifício de calcular indiretamente a geometria de Ruppeiner para uma nova família de soluções para modificar a geometria de Ruppeiner associada à RN. Esta nova modificação levará em conta uma nova motivação física, como o cálculo indireto, e fazer com que esse motivador iguale a zero no final das contas. Neste sentido, Mirza and Zamaninasab [2007] partiram da métrica de Kerr-Newmann Anti-DeSitter (KN-AdS) para calcular posteriormente a métrica e curvatura de Ruppeiner em RN.

A métrica de KN-AdS representa um buraco negro carregado e rotativo num

espaço de AdS, sua caracterização é dada por

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\rho^2} \left(dt - \frac{a \sin^2 \theta}{\Xi} d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(a dt - \frac{r^2 + a^2}{\Xi} d\phi \right)^2 \quad (40)$$

onde $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Xi = 1 - a^2/l^2$, os parâmetros Δ_r e Δ_θ são definidos por

$$\Delta_r = (r^2 + a^2) \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) - 2mr + q^2 \quad \Delta_\theta = 1 - \frac{a^2}{l^2} \cos^2 \theta \quad (41)$$

a constante a é o parâmetro rotacional e l é definido como $l^2 = -3/\Lambda$, na qual Λ é a constante cosmológica. Pelas relações da massa M , carga elétrica Q e momento angular J obtidas pelas integrais de Komar, podemos obter um forma generalizada da massa

$$M = \sqrt{\frac{S}{4} + \frac{1}{4S}(4J^2 + Q^4) + \frac{Q^2}{2} + \frac{J^2}{l^2} + \frac{S}{2l^2} \left(Q^2 + S + \frac{S^2}{2l^2} \right)} \quad (42)$$

A partir dessa relação conseguimos obter a temperatura, $T = \partial_S M|_{JQ}$ e as funções do potencial elétrico, $\Phi = \partial_Q M|_{SJ}$, e velocidade angular, $\Omega = \partial_J M|_{SQ}$, dadas por

$$T = \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4S^2}(4J^2 + Q^4) + \frac{1}{2l^2} S \left(1 + \frac{S}{l^2} \right) + \frac{1}{2l^2} \left(Q^2 + S + \frac{S^2}{2l^2} \right) \right] \quad (43)$$

$$\Phi = \frac{1}{2M} \left[Q \left(1 + \frac{Q^2}{S} + \frac{S}{l^2} \right) \right] \quad , \quad \Omega = \frac{1}{2M} \left[J \left(\frac{2}{l^2} + \frac{2}{S} \right) \right] \quad (44)$$

com isso conseguimos obter a métrica de Ruppeiner associada à KN-AdS e calcular o escalar de curvatura para esse caso. Partindo desse escalar, podemos tomar $J \rightarrow 0$ e $l \rightarrow \infty$ para obter o escalar em RN, para saber mais sobre as componentes da métrica e cálculo do escalar ver Mirza and Zamaninasab [2007]. Sendo assim o escalar de curvatura para RN será dado por

$$\bar{R} = \frac{S^2 + SQ^2 + 2Q^4}{(S^2 - Q^4)(S + Q^2)} \quad (45)$$

É fácil observar que quando temos o limite extremo, isto é $r_+ = r_- \Rightarrow Q = \sqrt{S}$ a equação (45) irá divergir e que no ponto crítico de Davies não acontece nada. Podemos reescrever essa equação em termos de r_+ e r_- , a partir de (24), para analisarmos o

comportamento de \bar{R} em diferentes valores de r_+ . Logo,

$$\bar{R} = \frac{r_+^2 + r_- r_+ + 2r_-^2}{r_+(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)^2} \quad (46)$$

Podemos ver na figura (3) como o escalar de curvatura se dá em diferentes valores de r_+ fixando r_- . Em singularidades nuas, quando $r_+ < r_-$, os valores de \bar{R} são negativos e divergindo no limite extremo e quando $r_+ \rightarrow 0$, já no caso extremo temos uma divergência, indicando que é um ponto crítico do nosso sistema.

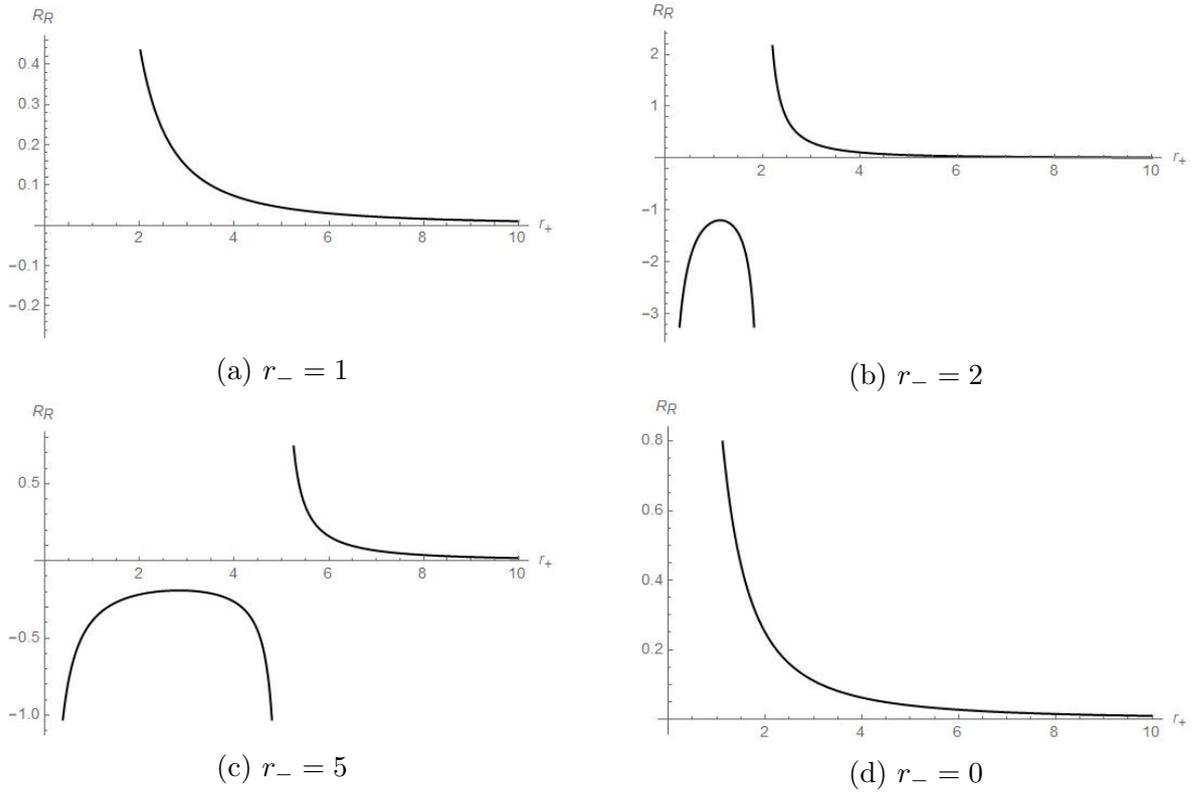


Figura 3: Escalar de curvatura para diferentes valores de r_-

Com a estruturação da geometria em KN-AdS, podemos utilizar a métrica e reduzir em Kerr-Newmann, fazendo $l \rightarrow \infty$, e então trabalhar nesta métrica nova e no final das contas, ou seja, quando acharmos o escalar de curvatura, tomar $J \rightarrow 0$ para encontrarmos o escalar em RN. Com isso a métrica em KN-AdS para KN terá algumas pequenas modificações, $\Xi = 1$, $\Delta_\theta = 1$ e Δ_r será dado por

$$\Delta_r = (r^2 + a^2) - 2mr + q^2 \quad (47)$$

A equação que define a massa também será modificada, sendo dada apenas por

$$M = \sqrt{\frac{S}{4} + \frac{1}{4S}(4J^2 + Q^4)} + \frac{Q^2}{2} \quad (48)$$

e com isso conseguimos calcular tanto a temperatura, $\partial_S M$, quanto a métrica de Ruppeiner para esse caso. As componentes da métrica de KN em Ruppeiner são dadas por

$$\begin{aligned} g_{SS}^R &= -\frac{3}{2S} + \frac{2S}{S^2 - Q^4 - 4J^2} - \frac{S + Q^2}{(S + Q^2)^2 + 4J^2} \\ g_{QQ}^R &= \frac{4S((S + Q^2)^3 + 4(S + 3Q^2)J^2)}{(S^2 - Q^4 - 4J^2)((S + Q^2)^2 + 4J^2)} \\ g_{JJ}^R &= \frac{8S(S + Q^2)^2}{(S^2 - Q^4 - 4J^2)((S + Q^2)^2 + 4J^2)} \\ g_{SQ}^R &= g_{QS}^R = \frac{4Q^3}{-S^2 + Q^4 + 4J^2} - \frac{2Q(S + Q^2)}{(S + Q^2)^2 + 4J^2} \\ g_{SJ}^R &= g_{JS}^R = 4J \left[\frac{2}{-S^2 + Q^4 + 4J^2} - \frac{1}{(S + Q^2)^2 + 4J^2} \right] \\ g_{QJ}^R &= g_{JQ}^R = -\frac{16SQ(S + Q^2)J}{(S^2 - Q^4 - 4J^2)((S + Q^2)^2 + 4J^2)} \end{aligned} \quad (49)$$

A partir dessa métrica conseguimos calcular o escalar de curvatura para KN e depois faremos $J \rightarrow 0$, pois queremos analisá-lo em RN. Portanto, o escalar de curvatura em RN será dado por

$$\hat{R} = -\frac{S}{(S + Q^2)^2} + \frac{2Q^2}{Q^4 - S^2} \quad (50)$$

é notável que no ponto de extremo a métrica irá divergir e o ponto crítico de Davies é analítico. Fazendo as substituições de Q e S em função dos raios de horizontes temos

$$\hat{R} = -\frac{r_+^2 + r_+ r_- + 2r_-^2}{r_+(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)^2} \quad (51)$$

Na figura , vemos que há uma divergência da métrica no ponto de extremo, o mesmo ocorreu em KN-Ads, porém a caracterização do escalar é inversa, em outras palavras, quando temos o caso em que $r_+ > r_-$ o escalar em KN-AdS é positivo e tende a zero para r_+ muito grande. Em contrapartida, no caso de KN, o escalar nesse mesmo caso tem sinal negativo. O mesmo é observado no caso da presença de uma singularidade nua.

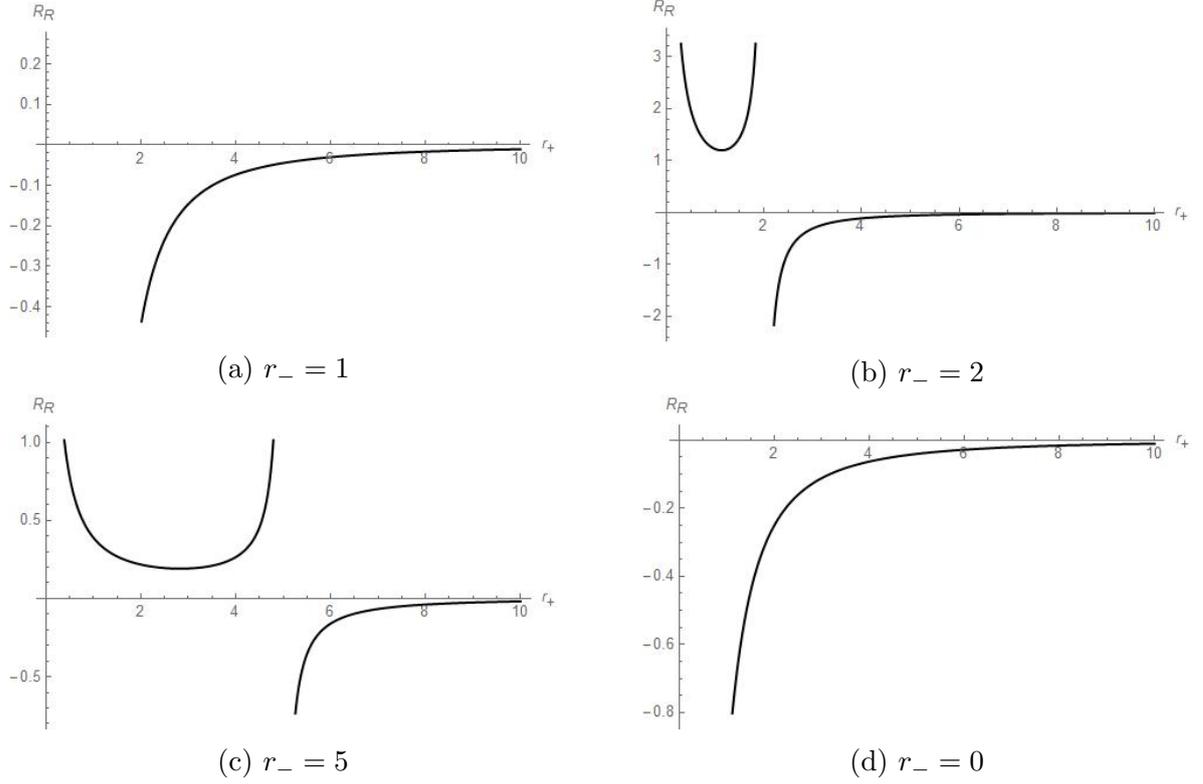


Figura 4: Escalar de curvatura para diferentes valores de r_-

O caso de RN-AdS para RN não é relevante na discussão das modificações acerca da geometria de Ruppeiner pois no trabalho de Åman et al. [2003], ao desenvolverem as contas para RN-AdS o escalar de curvatura irá depender de um fator de $\frac{1}{l^2}$ e ao aproximarmos para RN, fazendo $l \rightarrow \infty$, vamos obter um escalar igual a zero, retornando para o problema inicial da análise da geometria de Ruppeiner.

Em seu artigo, Medved [2008] discute a relação entre M e \tilde{M} e quais casos devemos escolher a melhor relação para descrever nosso sistema. Segundo o autor, para entendermos mais sobre os espaços de fases termodinâmicos do sistema, escolhemos \tilde{M} , enquanto para sabermos coisas fundamentais sobre o sistema estatístico, M é a escolha a ser feita. A partir dessa discussão, podemos relacionar as análises feitas sobre os escalares de curvatura para todos os casos em relação aos pontos expostos sobre a termodinâmica de RN extremo.

Nos casos de KN e KN-AdS, nós observamos que o comportamento do escalar diverge em caso extremo e como estamos tratando do conjunto $\{M, S, Q\}$, essa divergência está associada aos sistemas fundamentais estatísticos do buraco negro. Segundo Edery and

Constantineau [2011], buracos negros extremos possuem um único microestado clássico e com esse resultado, podemos interpretar que a divergência em Ruppeiner ocorre por conta desse microestado. Além disso, com um único microestado a entropia irá depender de um único parâmetro, o que bate com os cálculos na geometria de Ruppeiner $S = Q^2$, e portanto os graus de liberdade do nosso sistema é zero. Com isso, não temos uma certeza do que está acontecendo no sistema do buraco negro extremo, o que faz sentido já que temos uma divergência.

Ainda no sistema de $\{M, S, Q\}$, conseguimos entender a relação de Ruppeiner com a terceira lei da termodinâmica, mais precisamente, a condição forte, que estabelece que a formação de buracos negros extremos não se dá por colapso gravitacional e nem por um número finito de processos. Sendo assim, os escalares podem indicar que precisamos de uma energia infinita para sair de um caso não-extremo para um caso extremo e que o caso extremo não é formado por colapso gravitacional pois a estrela precisaria de uma energia infinita no momento do seu colapso, o que certamente é improvável. Mais ainda, vemos que essa região de quase-extremo para não-extremo é uma superfície bastante instável e quaisquer perturbações podem mudar o sistema.

Já no caso de RN, tomando o conjunto $\{\tilde{M}, S, \Phi\}$, a métrica tende a zero em dois momentos, quando $r_+ \rightarrow \infty$ e quando estamos tratando de buracos negros extremos. Como já vimos, por efeitos quânticos, os buracos negros RN extremos podem ser considerados como objetos não térmicos, isso implica que esses casos devem ser descritos fora da teoria clássica da termodinâmica de buracos negros. Além disso, como são caracterizados como eternos, há emissão de radiação e sua entropia é diferente de zero, a termodinâmica associada aos buracos negros RN extremos é diferente. Portanto, o escalar de curvatura em Ruppeiner ser zero em ponto extremo é um indício que essas conexões são válidas, necessitando-se de estudos mais avançados na área.

5 Conclusão

Neste trabalho estudamos os aspectos teóricos e geométricos sobre a termodinâmica de buracos negros, focando exclusivamente no caso de RN extremo. Esta solução possui diferentes sutilezas dos outros casos extremos, como por exemplo possuir gravidade

superficial igual a zero, indicando assim que possui temperatura igual a zero também.

Embora a geometria de Ruppeiner não possa ser utilizada em sua totalidade no estudo de buracos negros, como aponta Åman et al. [2003] em seu trabalho, esta geometria possibilitou uma nova interpretação dos sistemas termodinâmicos de buracos negros e, com isso, conseguimos relacionar as leis com essa recente área. Vale ressaltar que a geometria de Ruppeiner descreve os sistemas a partir da entropia, enquanto a geometria de Weinhold descreve a energia interna, portanto a escolha de Ruppeiner é mais assertiva quando tratamos juntamente com as leis da termodinâmica. A princípio a geometria de RN era descrita como plana, resultando num escalar igual a zero, independente de estarmos tratando do caso extremo ou não. Alguns trabalhos ainda apontavam que essa característica persistia mesmo sob variações das dimensões do problema, Åman and Pidokrajt [2006] e Åman et al. [2007].

Apesar dessa dificuldade inicial de interpretar a geometria de Ruppeiner em RN, alguns trabalhos sugeriram modificações essenciais para a modificação do escalar de curvatura. Ao todo, neste trabalho, foram estudadas duas modificações: a primeira levando em conta um novo conjunto de variáveis descritas pelo modelo de van der Walls-Maxwell, Shen et al. [2007]. Já segunda modificação foi feita a partir de novos motivadores, como o cálculo do escalar de uma outra família de buracos negros e depois reduzindo ao caso de RN, estudando dois casos KN e KN-AdS, Mirza and Zamaninasab [2007]. Essas modificações serviram para uma nova associação entre as leis da termodinâmica e os valores dos escalares de curvatura para o caso extremo de RN.

Além disso, vimos que pelas leis da termodinâmica e alguns novos estudos acerca da natureza dos buracos negros extremos de RN, estes deveriam ser tratados de maneira diferente das demais famílias de soluções. A caracterização do RN extremo leva em conta a emissão de radiação não-térmica, mas zerando em longos períodos, preservando então a CCC e com isso não podem ser tratados como objetos térmicos, bem como o fato de serem eternos e possuírem entropia diferente da proposta por Bekenstein.

Juntando essas informações estudadas sobre as leis da termodinâmica e da geometria de Ruppeiner, conseguimos associar cada uma das características abordadas em relação aos valores dos escalares de curvatura. Destaca-se que uma união entre as modificações em Ruppeiner pode servir como novas evidências para as características de

RN extremo, como por exemplo tomar o conjunto de energia interna \tilde{M}, S, Φ das soluções de KN e/ou KN-AdS e depois aproximar para RN. Outros estudos podem ser feitos seguindo a lógica deste trabalho, como tomar efeitos quânticos na geometria de Ruppeiner, ver Sarkar et al. [2006], ou tratar de novos aspectos como a métrica geometrotermodinâmica, ver Farrugia and Sultana [2016].

Referências

- J. E. Åman and N. Pidokrajt. Geometry of higher-dimensional black hole thermodynamics. *Physical Review D*, 73(2), jan 2006. doi: 10.1103/physrevd.73.024017. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.73.024017>.
- J. E. Åman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt. Geometry of black hole thermodynamics. *General Relativity and Gravitation*, 35(10):1733–1743, oct 2003. doi: 10.1023/a:1026058111582. URL <https://doi.org/10.1023%2Fa%3A1026058111582>.
- J. E. Åman, J. Bedford, D. Grumiller, N. Pidokrajt, and J. Ward. Ruppeiner theory of black hole thermodynamics. *Journal of Physics: Conference Series*, 66:012007, may 2007. doi: 10.1088/1742-6596/66/1/012007. URL <https://doi.org/10.1088%2F1742-6596%2F66%2F1%2F012007>.
- J.E. Åman and N. Pidokrajt. Ruppeiner geometry of black hole thermodynamics. *EAS Publications Series*, 30:269–273, 2008. doi: 10.1051/eas:0830042. URL <https://doi.org/10.1051%2Feas%3A0830042>.
- P. R. Anderson, W. A. Hiscock, and B. E. Taylor. Do semiclassical zero temperature black holes exist? *Physical Review Letters*, 85(12):2438–2441, sep 2000. doi: 10.1103/physrevlett.85.2438. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.85.2438>.
- J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun.Math. Phys.*, 31:161–170, jun 1973. doi: 10.1007/BF01645742. URL <https://doi.org/10.1007/BF01645742>.
- J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333–2346, apr 1973. doi: 10.1103/PhysRevD.7.2333. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333>.
- J. D. Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D*, 9(12):3292–3300, jun 1974. doi: 10.1103/PhysRevD.9.3292. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3292>.
- P. C. W. Davies. The thermodynamics theory of black holes. *Proc. R. Soc. Lond A*, 353 (499-521), 1977. doi: 10.1098/rspa.1977.0047.

- A. Edery and B. Constantineau. Extremal black holes, gravitational entropy and nonstationary metric fields. *Classical and Quantum Gravity*, 28(4):045003, jan 2011. doi: 10.1088/0264-9381/28/4/045003. URL <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F28%2F4%2F045003>.
- Christine Farrugia and Joseph Sultana. Thermodynamic geodesics of a reissner nordström black hole. *General Relativity and Gravitation*, 49(1), dec 2016. doi: 10.1007/s10714-016-2169-4. URL <https://doi.org/10.1007%2Fs10714-016-2169-4>.
- S. Hawking. The event horizon. *Black Holes (eds. Dewitt and Dewitt)*, 1973.
- S. W. Hawking. Black holes in general relativity. *Commun.Math. Phys.*, 25:152–166, jun 1972. doi: 10.1007/BF01877517. URL <https://doi.org/10.1007/BF01877517>.
- S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun.Math. Phys.*, 43:199–220, aug 1975. doi: 10.1007/BF02345020. URL <https://doi.org/10.1007/BF02345020>.
- S. W. Hawking, G. T. Horowitz, and S. F. Ross. Entropy, area, and black hole pairs. *Physical Review D*, 51(8):4302–4314, apr 1995. doi: 10.1103/physrevd.51.4302. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.51.4302>.
- J. E. Horvath. *Astrofísica de Altas Energias: Uma Première*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.
- W. Israel. Third law of black-hole dynamics: A formulation and proof. *Phys. Rev. Lett.*, 57:397–399, Jul 1986. doi: 10.1103/PhysRevLett.57.397. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.397>.
- S. Liberati, T. Rothman, and S. Sonego. Nonthermal nature of incipient extremal black holes. *Physical Review D*, 62(2), jun 2000. doi: 10.1103/physrevd.62.024005. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.62.024005>.
- A. J. M. Medved. A commentary on ruppeiner metrics for black holes. *Modern Physics Letters A*, 23(26):2149–2161, aug 2008. doi: 10.1142/s0217732308027333. URL <https://doi.org/10.1142%2Fs0217732308027333>.

- B. Mirza and M. Zamaninasab. Ruppeiner geometry of RN black holes: flat or curved? *Journal of High Energy Physics*, 2007(06): 059–059, jun 2007. doi: 10.1088/1126-6708/2007/06/059. URL <https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2007%2F06%2F059>.
- E. Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- P. Pradhan and P. Majumdar. Circular orbits in extremal reissner–nordstrom spacetime. *Physics Letters A*, 375(3):474–479, jan 2011. doi: 10.1016/j.physleta.2010.11.015. URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.physleta.2010.11.015>.
- S. Sarkar. Black hole thermodynamics: general relativity and beyond. *General Relativity and Gravitation*, 51(5), May 2019. doi: 10.1007/s10714-019-2545-y. URL <https://doi.org/10.1007%2Fs10714-019-2545-y>.
- Tapobrata Sarkar, Gautam Sengupta, and Bhupendra Nath Tiwari. On the thermodynamic geometry of BTZ black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2006(11):015–015, nov 2006. doi: 10.1088/1126-6708/2006/11/015. URL <https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2006%2F11%2F015>.
- J. Shen, R. Cai, B. Wang, and R. Su. Thermodynamic geometry and critical behavior of black holes. *International Journal of Modern Physics A*, 22(01):11–27, jan 2007. doi: 10.1142/s0217751x07034064. URL <https://doi.org/10.1142%2Fs0217751x07034064>.
- A. Strominger. Black holes from a to z, 2015. URL scholar.harvard.edu/files/yshi/files/physics_211_black_holes_final.pdf. Acessado em 28 de Março de 2022.
- F. Weinhold. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. *J. Chem. Phys*, 63(2479), 1975. doi: 10.1063/1.431689. URL <https://doi.org/10.1063/1.431689>.