UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

RAUL AUGUSTO TEIXEIRA

# Dinâmica de Sistemas e Aplicações: Uma Introdução

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Angel Pontin Garcia .

Campinas
2021

# 1 Resumo

Nesse trabalho, foi realizado um estudo de identificação e modelagem de sistemas de maneira introdutória, para gerar uma familiaridade com o conteúdo. Depois, foi criado um problema teórico da área de hidráulica envolvendo sistema de variáveis de estado, que foi posteriormente resolvido e analisado quanto à dinâmica com alterações na variável de input. Conclui-se que a dinâmica de sistemas pode ser usada para resolver diversos problemas nas mais variadas áreas.

# 2 Objetivos

O objetivo do presente trabalho é estudar as bases da dinâmica de sistemas, com a leitura de livros renomados da área e a resolução de um problema como exemplo de fixação de aprendizado. O objetivo inicial era realizar um exemplo de identificação de sistemas, mas não houve tempo suficiente para a realização desse estudo. Portanto, foi realizado o estudo da dinâmica de sistemas, que é um pouco mais simples mas ainda assim é muito útil para a fixação de aprendizado.

# 3 Introdução

O estudo da dinâmica de sistemas é uma maneira de modelar matematicamente processos reais de forma a simular e prever o comportamento desses processos. Um sistema dinâmico é composto de um vetor de variáveis de entrada observáveis $u(t)$, também chamadas de *inputs*, e de um vetor de variáveis de saída observáveis $y(t)$, também chamadas de $outputs$. Também é composto de um vetor de parâmetros $\theta$. O estudo de sistemas se resume a estudar como diferentes parâmetros e *inputs* afetam as variáveis de saída $y(t)$.

No presente trabalho, vamos estudar a dinâmica de um sistema de variáveis de estado, que consiste em, dados os parâmetros $\theta$ do sistema, avaliar a expectativa de comportamento dos *outputs* do modelo para diferentes valores de *inputs*. Outra maneira de estudar a dinâmica de sistemas seria a aplicação do processo de *identificação de sistemas*, que trata da estimação dos parâmetros $\theta$ dados valores de $u(t)$ e $y(t)$, e que não foi tratada no rpesente trabalho.

# 4 Dinâmica de Sistemas

## 4.1 O Estudo da Dinâmica de Sistemas

O estudo da dinâmica de sistemas é dividido em três partes:

- Obtenção de um modelo matemático que descreva o sistema;
- Estudo do comportamento dinâmico do sistema, avaliando como $y(t)$ é afetado por mudanças em $u(t)$;
- Aplicação do modelo para resolução de um problema.

No Capítulo seguinte, vamos aplicar os conceitos de Dinâmica de Sistemas para a resolução de um problema teórico de um sistema de variáveis de estado.

## 4.2 Sistema de Variáveis de Estado

Vamos definir aqui um caso particular de modelo de sistemas, chamado de *sistema de variáveis de estado*, que vamos usar para resolver um exemplo do próximo Capítulo.
Nos Sistemas de Variávies de Estado, são usadas variáveis $x(t)$ para representar estoques do modelo em função do tempo a partir da sua diferencial $\dot{x}(t)$, que depende do vetor de *inputs* $u(t)$ e do vetor de parâmetros $\theta$. Nesses modelos, o vetor de outputs $y(t)$ é função dos parâmetros, das variáveis de estado e dos *inputs*. Em outras palavras, teremos um sistema vetorizado da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) \\ y(t) &= g(x, u, t) \end{aligned} \tag{1}$$

# 5 Exemplo de Aplicação

## 5.1 Introdução

Vamos aplicar os conceitos de dinâmica de sistemas para modelar e simular um modelo da disciplina de hidráulica. Devido à falta de dados reais, iremos construir um modelo teórico e supor algumas condições a fim de simular o modelo.
Vamos supor que um agricultor possui em sua fazenda quatro tanques cílindricos com raio da base igual a $R$ e altura igual a $H$, que estão dispostos ao redor de uma plantação. Os quatro tanques são utilizados para irrigação da plantação a partir de uma bomba que fornece um fluxo de água igual a $I_j(t)\frac{m^3}{s}$ de cada tanque $j$. Os tanques estão ligados em cascata, de modo que há uma outra bomba que transporta $Q_e(t)\frac{m^3}{s}$ de água de um reservatório externo para o Tanque 1, e os Tanques $j, j \in \{2, 3, 4\}$, recebem água do tanque $j-1$ por escoamento, que por sua vez é controlado por uma válvula com coeficiente de vazão $q_{j-1}\frac{\frac{m^3}{s}}{\sqrt{Pa}}$. O Tanque 4 também escoa água, mas para o reservatório externo. Por fim, no instante $t$, chamemos a altura da coluna de água dentro do tanque $j$ de $H_j(t)$.
A Figura 1 representa o sistema.

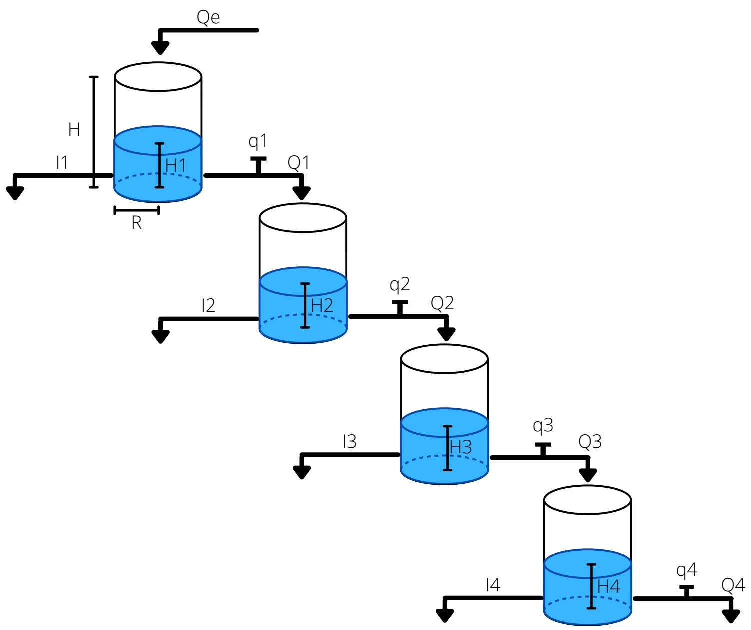


Figura 1: Desenho representativo do sistema de tanques em cascata

A fim de simplificar o modelo, consideremos que:

- As quatro válvulas são idênticas;
- O reservatório externo possui volume de água infinito, e volume máximo de água infinito;
- Os fluxos de irrigação $I_1(t), I_2(t), I_3(t), I_4(t)$ são idênticos e constantes iguais a $I\frac{m^3}{s}$;
- O fluxo de entrada do Tanque 1 é constante e igual a $Q_e\frac{m^3}{s}$
- O cano de escoamento é estreito o suficiente e a velocidade de escoamento é pequena o suficiente, de forma que o escoamento seja laminar, ou seja, de forma que o Número de Reynolds $R_e < 2000$. Essa escolha simplificará as contas na fase de modelagem;
- Os valores de $H_j(t), j \in \{1, 2, 3, 4\}$, podem eventualmente exceder a altura máxima dos tanques $H$ e podem também assumir valores negativos.

## 5.2 Dedução de Equações Auxiliares

Definido o problema na Seção 5.1, vamos deduzir as fórmulas de algumas equações que serão usadas para a Modelagem do sistema na Seção 5.3.

### 5.2.1 Fluxo de escoamento laminar de um reservatório

Seja um tanque de armazenamento de água cilíndrico de área da base $A$ e altura de água $H$ com um tubo também cilíndrico para escoamento na sua parte inferior. Esse cano possui uma válvula com coeficiente de vazão $q$ que controla o fluxo de água $Q_s$. Vamos encontrar uma expressão matemática para o valor de $Q_s$. Um desenho desse tanque está na Figura 2.

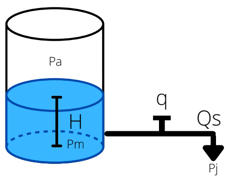


Figura 2: Tanque cilíndrico com um cano de escoamento

Onde $P_a$ é a pressão atmosférica acima da coluna de água, $P_m$ é a pressão no ponto de entrada da tubulação, e $P_s$ é a pressão no ponto de saída da tubulação, que fica na parte mais baixa do reservatório.. O Número de Reynolds desse escoamento é definido por:

$$R_e = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \tag{2}$$

Onde: $\rho$ é a massa específica do fluído; $v$ é a velocidade média do fluído; $D$ é o diâmetro do tubo, e $\mu$ é a viscosidade dinâmica do fluído.
Vamos supor que a velocidade do fluído é suficientemente pequena e o diâmetro do tubo de escoamento também é suficientemente pequeno, de modo que o número de Reynolds para o escoamento de água nesse tubo seja $R_e < 2000$. Desse modo, o escoamento será do tipo laminar, ou seja, sem turbulência. Na prática, a maior parte dos escoamentos é turbulenta, mas definir o escoamento como laminar simplificará as contas mais para frente.
Vamos calcular agora o fluxo de escoamento $Q_s$. Quando o escoamento é laminar, o fluxo pela válvula $q$ é dado pela diferença de pressão entre o ponto de entrada e o ponto de saída da tubulação, isto é:

$$Q_s = q \cdot \triangle P = q \cdot (P_m - P_j) \tag{3}$$

Mas a pressão $P_m$ é a soma da pressão $P_a$ com a pressão exercida pela coluna de água, ou seja,

$$P_m = P_a + P_{h_2o} = P_a + \rho \cdot g \cdot H \tag{4}$$

Logo, substituindo (4) em (3), o fluxo de saída $Q_s$ será igual a

$$Q_s = q \cdot (P_a + \rho \cdot g \cdot H - P_j)$$

Assumindo que $P_a = P_j$, chegamos em

$$Q_s = q \cdot (\rho \cdot g \cdot H) \tag{5}$$

Que é a expressão matemática para o fluxo de escoamento de um tubo na base de um reservatório com uma válvula de coeficiente de vazão $q$, como procurávamos.

### 5.2.2 Diferencial de Variação de Altura de Água

Seja um tanque de armazenamento de água cilíndrico de área da base $A$ e altura de água em função do tempo $H(t)$. Esse tanque possui um fluxo de entrada de água $Q_e$ e um fluxo de saída $Q_s$. Vamos encontrar uma expressão matemática para a derivada de variação de altura da água no tanque em função do tempo. Um desenho desse tanque está na Figura 3.

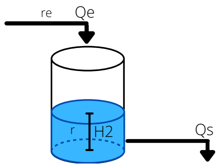


Figura 3: Tanque com um fluxo de entrada e um fluxo de saída

Onde: $r$ é a massa específica do fluído dentro do reservatório e $r_e$ é a massa específica do fluído entrando no reservatório
Vamos desprezar dilatações térmicas nas paredes do tanque, o que implica que $A$ é constante.
Pela conservação de massa de água do sistema, a variação de massa será igual à massa que entra menos a massa que sai, isso é,

$$\triangle m = m_e - m_s$$

Tendendo o intervalo de variação a zero, podemos aplicar uma diferencial:

$$\frac{dm}{dt} = m_e - m_s$$

Mas $m = r \cdot A \cdot H$, $m_e = r_e \cdot Q_e$ e $m_s = r \cdot Q_s$. Além disso, como apenas $H$ varia com o tempo, então

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(r \cdot A \cdot H)}{dt} = r \cdot A \frac{dH}{dt} = m_e - m_s = r_e \cdot Q_e - r \cdot Q_s$$

Assumamos que $r_e = r$, que é a massa específica da água. Portanto, a expressão que procuramos é

$$\dot{H} = \frac{Q_e - Q_s}{A} \tag{6}$$

## 5.3 Modelagem

Sejam as variáveis:

- $R, H, A$ e $V$, respectivamente, o raio da base, a altura e a área dos tanques;
- $Q_e$ o fluxo de água bombeado para o Tanque 1;
- $H_i(t), i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a altura de água do tanque$i$ no instante $t$;
- $\rho$ a massa específica do fluído;
- $g$ a aceleração da gravidade;
- $q$ o coeficiente de vazão das válvulas, que é fornecido pelo fabricante.

Vamos definir as variáveis do modelo de acordo com a nomenclatura de dinâmica de sistemas. Sejam:

- $u(t) = Q_e(t) = Q_e$ o input do sistema.
- $x(t) = [H_1(t), H_2(t), H_3(t), H_4(t)]^T$ as variáveis de estado.
- $y(t) = x_4(t) = H_4(t)$ o output do sistema.

Pela Equação (6), temos que a diferencial de aumento de altura de água em um tanque de água com fluxos de entrada e saída é:

$$\dot{H} = \frac{Q_e - Q_s}{A}$$

Onde $Q_e, Q_s$ são os fluxos de entrada e saída respectivamente, e $A$ é a área da base do reservatório. Sejam $Q_i(t), i \in \{1, 2, 3, 4\}$ os fluxos de saída do tubo de escoamento, respectivamente, de cada tanque $i$ no instante $t$. Assim, as diferenciais de cada tanque podem ser escritas como:

$$\dot{H}_1 = \frac{Q_e - Q_1(t) - I}{A}$$

$$\dot{H}_2 = \frac{Q_1(t) - Q_2(t) - I}{A}$$

$$\dot{H}_3 = \frac{Q_2(t) - Q_3(t) - I}{A}$$

$$\dot{H}_4 = \frac{Q_3(t) - Q_4(t) - I}{A}$$

Agora, como o escoamento é laminar, por (5),

$$Q_i(t) = q \cdot \rho \cdot g \cdot H_i(t)$$

Defina $q' := q \cdot \rho \cdot g$. Logo, as equações das diferenciais das variáveis de estado de cada tanque serão:

$$\dot{H}_1 = \frac{Q_e - q' \cdot H_1(t) - I}{A} \tag{7}$$

$$\dot{H}_2 = \frac{q' \cdot (H_1(t) - H_2(t)) - I}{A} \tag{8}$$

$$\dot{H}_3 = \frac{q' \cdot (H_2(t) - H_3(t)) - I}{A} \tag{9}$$

$$\dot{H}_4 = \frac{q' \cdot (H_3(t) - H_4(t)) - I}{A} \tag{10}$$

O que nos gera um PVI composto de um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e lineares. A escolha de tratar o escoamento como laminar resultou que as equações são lineares, assim o modelo o modelo resultante é um sistema dinâmico linear.

## 5.4 Simulação do Modelo

Como não temos dados reais de um sistema desse em funcionamento, vamos supor valores e resolvê-lo.

Vamos supor que o agricultor do problema utiliza quatro válvulas com coeficiente de vazão $q = 0.003\frac{\frac{m^3}{s}}{\sqrt{Pa}}$. Além disso, os quatro tanques possuem altura máxima $H = 1$m e raio da base $R = 0.25$m. Logo, $A \approx 0.1963495$m$^2$.

Para a simulação do modelo, estamos supondo que o bombeamento de água para dentro do Tanque 1 é constante, e que o fluxo utilizado para irrigação também é constante em relação ao tempo. Então, consideremos $Q_e(t) = 1\frac{m^3}{s}$ e $I(t) = 0.2\frac{m^3}{s}$.

Consideremos também que: a massa específica do fluído é $\rho = 10^3\frac{kg}{m^3}$, que é a massa específica da água; que $g \approx 9.80665\frac{m}{s^2}$, e que todos os reservatórios começam com uma reserva de $10$cm de altura de água, isto é, $H_i(t_0) = 0.1$m.

Assim, com todos os valores de váriaveis definidos, temos um Problema de Valor Inicial (PVI) composto de um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Para encontrar o comportamento da altura da água em cada reservatório ao longo do tempo, basta resolver o PVI de maneira analítica ou de maneira numérica. Foi escolhido a resolução da forma numérica, pois o objetivo do presente trabalho é simular os resultados do modelo. Vamos restringir a solução para $t \in [0, 1.5]$, pois já será suficiente para analisar o comportamento dos gráficos dos estoques de água, e vamos definir o passo como $h := 0.01$.

Para a solução do modelo, foi escolhido utilizar a biblioteca de resolução de sistemas de equações diferenciais "deSolve", da linguagem de programação R, devido à familiaridade do autor com essa biblioteca. O método escolhido de resolução foi o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Os gráficos obtidos do comportamento dos estoques de água estão representados nas Figuras 4, 5, 6 e 7.

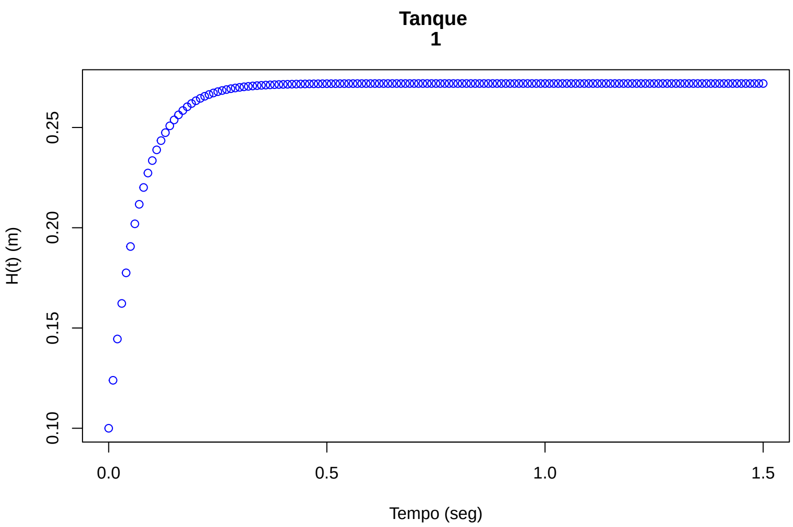


Figura 4: Comportamento da água no reservatório 1

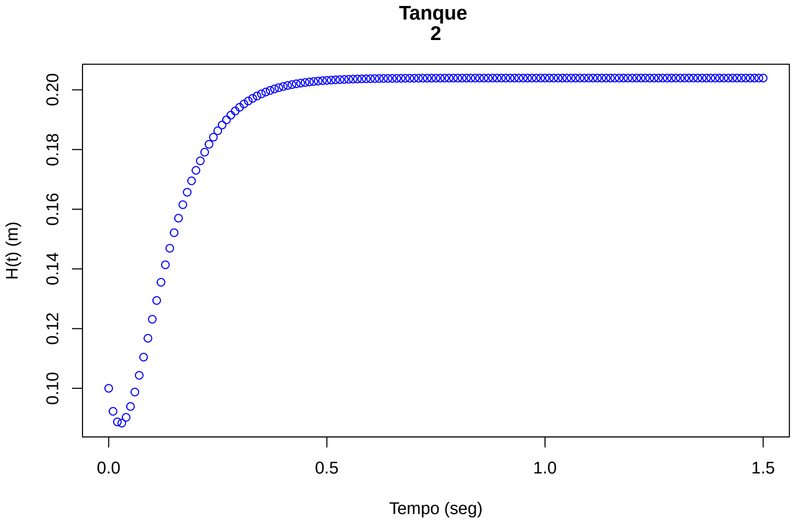


Figura 5: Comportamento da água no reservatório 2

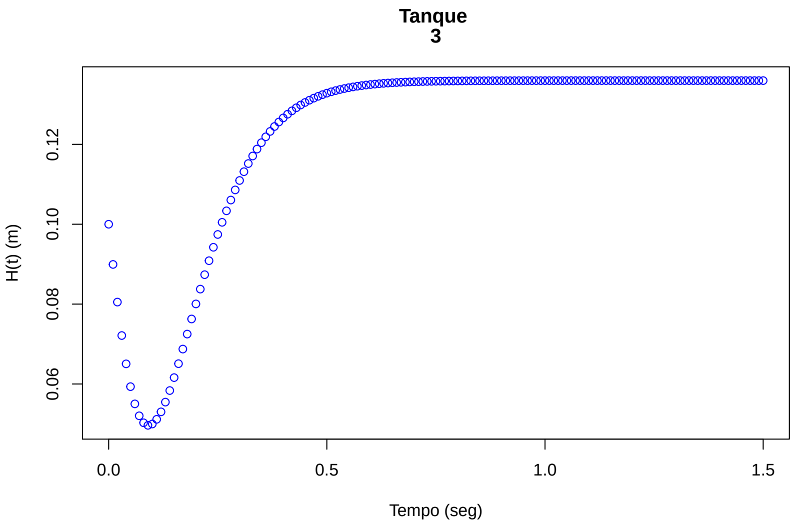


Figura 6: Comportamento da água no reservatório 3

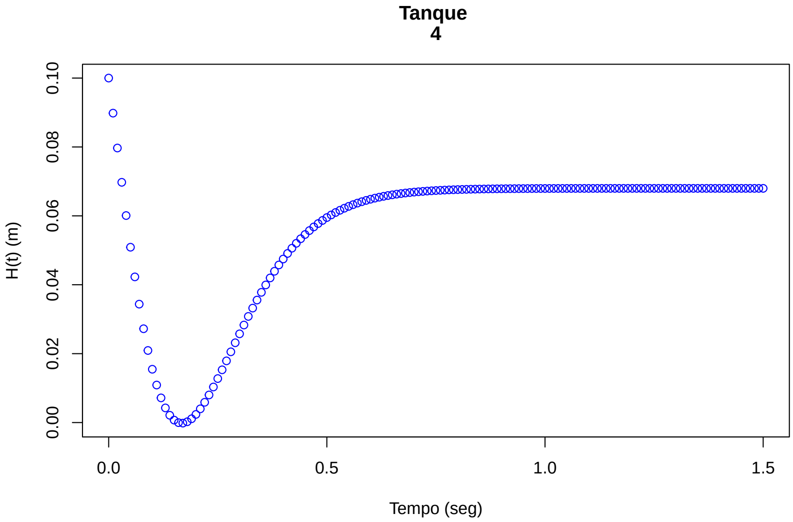


Figura 7: Comportamento da água no reservatório 4

### 5.4.1 Análise dos Gráficos

Pelos gráficos, podemos analisar o comportamento esperado do sistema real. Percebe-se que o Tanque 1 começa a encher imediatamente quando a bomba de água é ligada, em $t = 0$. Isso acontece pois o fluxo de enchimento da bomba $Q_e$ é maior que o valor de $I + Q_1$. Com o tempo, o valor de $Q_1$ vai crescendo, pois é diretamente proporcional ao valor de $H_1$, até que os fluxos de entrada se igualem aos fluxos de saída. Nesse momento, a somatória de fluxos do tanque é igual a zero, ou seja, a mesma quantidade de água que entra no Tanque 1, está saindo dele. Assim, o estoque entra em equilíbrio dinâmico.
Já no caso do Tanque 2, como o fluxo de entrada é o fluxo de escoamento $Q_1$, o valor inicial do fluxo de entrada é menor que o fluxo de saída $Q_2 + I$ pois o valor inicial de $H_1$ é baixo. Logo, o volume de água do Tanque 2 começa a abaixar até o momento em que o fluxo de entrada se iguala ao fluxo de saída, em aproximadamente $t = 0.04$. Depois disso, como $H_1$ entrou em uma tendência de crescimento mais cedo do que $H_1$, o fluxo de entrada $Q_1$ do Tanque 2 vai crescendo mais rápido do que cresce o fluxo de escoamento $Q_2$. Quando o fluxo de entrada $Q_1$ se estabiliza, após algum tempo o fluxo de saída $Q_2 + I$ alcança o valor do fluxo de entrada, e assim o reservatório entra em equilíbrio dinâmico, como no Tanque 1.
Nos Tanques 3 e 4, vemos um comportamento parecido, pois os tanques estão em cascata. A diferença é que quanto mais distante o tanque está da bomba $Q_e$, mais demorada é a dinâmica de queda e depois estabilização do estoque de água, pois cada tanque demora um tempo a mais para igualar seus fluxos de saída ao fluxo de entrada, e como o fluxo de entrada do Tanque $i$ é o fluxo de saída do Tanque $i - 1$, esse tempo vai se acumulando a cada tanque da cascata.
Note que ocorreu um atraso de resposta na nossa variável de output $y(t) = H_4(t)$, que demorou para reagir à mudança de input. Esse atraso na reação das variáveis de estado e, particularmente, do output $y(t)$ é conhecido como *Atraso de Transferência*, e se assemelha ao comportamento de um sistema elétrico com capacitores ligados em série: uma mudança no input $u(t)$ demora alguns passos de tempo para gerar alterações no output $y(t)$.
Outro fato interessante de se analisar dos gráficos é o valor de equilíbrio $H_j^*$ do Tanque $j$ ser cada vez menor conforme se $j$ aumenta. Isso acontece pois, partindo do Tanque 1, o valor de equilíbrio do sistema se dá quando $Q_1 = Q_e - I$, o que implica que o Tanque 2 chegará no equilíbrio quando $Q_2 = Q_1 - I \Leftrightarrow Q_2 = Q_e - 2I$, e assim sucessivamente, de modo que o Tanque $j$ chega no equilíbrio quando o fluxo de escoamento $Q_j = Q_e - j \cdot I$. Assim, conforme $j$ aumenta, o Tanque $j$ chega no

equilíbrio para valores cada vez menores de fluxos de escoamento, que são diretamente proporcionais à altura da água no tanque $H_j$. Logo, o valor de equilíbrio $H_j^*$ do Tanque $j$ também é cada vez menor conforme $j$ aumenta.

### 5.4.2 Estudo do Comportamento Dinâmico do Modelo

Vamos estudar o comportamento dinâmico do modelo avaliando como valores de input diferentes $u(t)$ afetam a variável de saída $y(t)$, além dos estoques $H_i(t)$.
Vamos supor que o sistema do agricultor apresentou uma falha, e a bomba $Q_e$ passou a bombear duas vezes mais água, partindo do equilíbrio dinâmico encontrado na simulação anterior. Definindo o valor inicial dos estoques do modelo como os valores finais da simulação anterior e dobrando o valor de $Q_e$, foi resolvido o sistema novamente. Os gráficos encontrados para a nova solução são as Figuras 8, 9, 10 e 11.

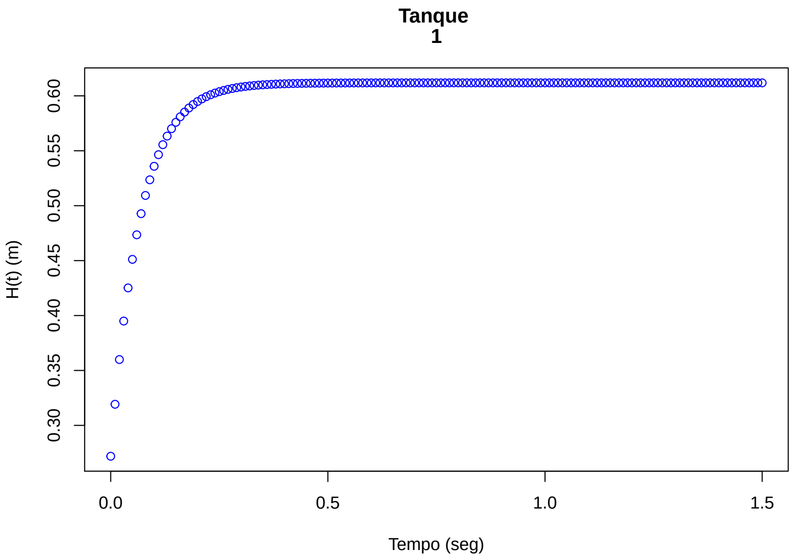


Figura 8: Comportamento da água no reservatório 1 para uma mudança no valor de input $u(t)$

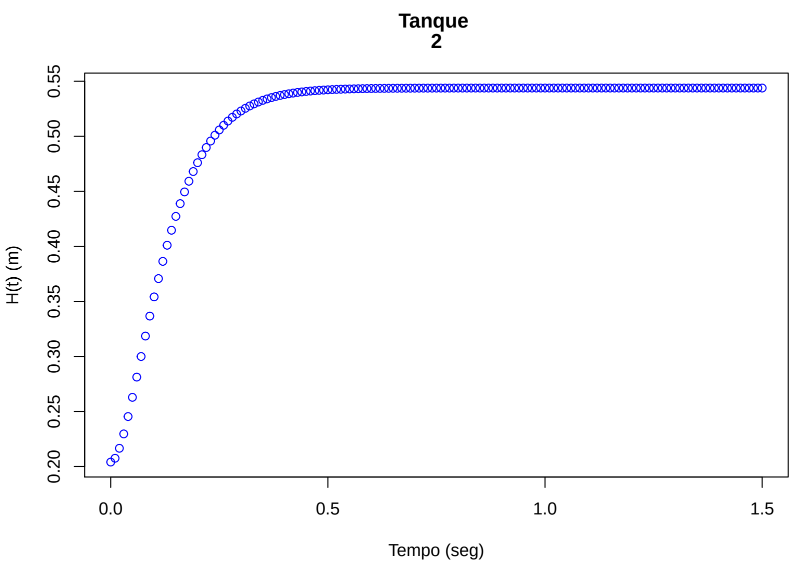


Figura 9: Comportamento da água no reservatório 2 para uma mudança no valor de input $u(t)$

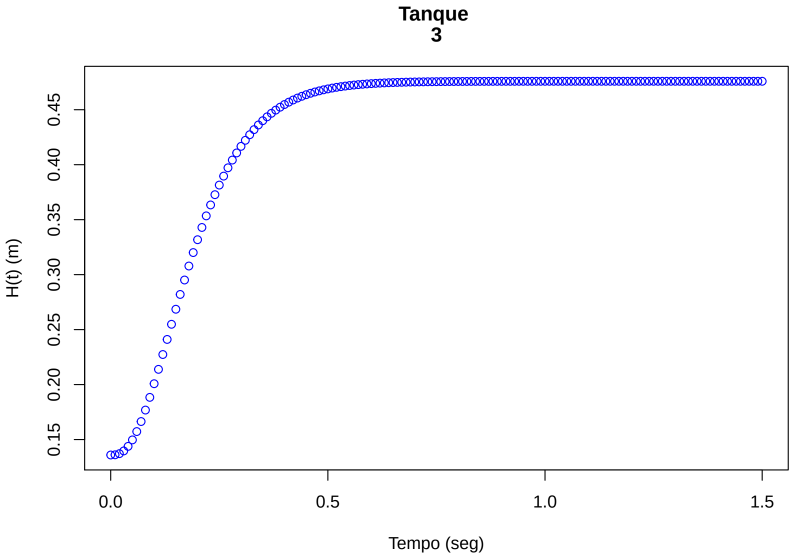


Figura 10: Comportamento da água no reservatório 3 para uma mudança no valor de input $u(t)$

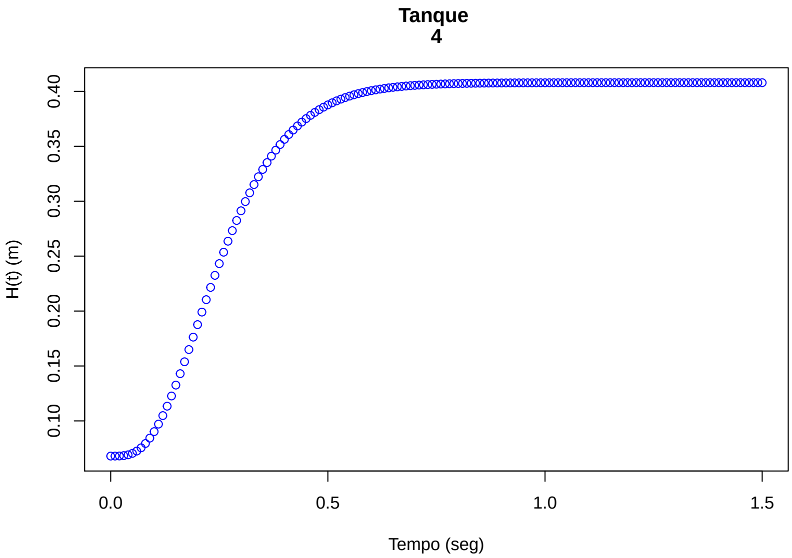


Figura 11: Comportamento da água no reservatório 4 para uma mudança no valor de input $u(t)$

Nota-se que o modelo indica que, caso houvesse um aumento repentino da variável de entrada, ou seja, caso a bomba começasse a bombear mais água, o modelo começaria a encher os tanques até atingir um novo valor de equilíbrio, quando os fluxos de entrada se igualam aos fluxos de saída. Note que o Tanque 1 começa imediatamente a encher quando o fluxo de entrada aumenta, e para cada tanque $j$ em sequência, o aumento do fluxo de entrada $Q_{j-1}$ está condicionado ao aumento do fluxo de escoamento do tanque anterior, que demora alguns passos para aumentar. Assim, cada tanque em sequência passa a demorar alguns passos a mais de tempo que o anterior para reagir à mudança em $u(t)$. Esse comportamento observado é o *Atraso de Transferência* já mencionado do sistema.

# 6 Conclusão

A disciplina de dinâmica de sistemas é muito útil para a modelagem e simulação de problemas do mundo real, pois junta várias técnicas já conhecidas, como a resolução de sistemas de Equações Diferenciais e Regressão Linear, em um compêndio de técnicas para modelagem e resolução de problemas. Além disso, apresenta algumas técnicas também para a identificação e validação de sistemas que foram estudadas mas não foram tratadas nesse trabalho. O problema resolvido foi um modelo teórico da área de hidráulica, mas é fácil enxergar que muitos outros modelos poderiam ser criados e várias técnicas mais avançadas poderiam ser usadas para resolver outros problemas de outras áreas.
O presente trabalho foi importante para uma introdução à simulação de sistemas, e apesar de não ter sido possível cumprir com os objetivos iniciais do projeto, foi iniciado e ampliado o conhecimento do autor acerca da disciplina.

# 7 Bibliografia


- LJUNG, L. **System Identification: Theory for the User**. Segunda edição. Linköping University: Prentice Hall, 1999.

- GARCIA, C. **Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1997.

- SOETAERT, K.; CASH, J.; MAZZIA, F. **Solving Differential Equations in R**. Springer, 2012.