



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



VINÍCIUS OLIVEIRA MARTINS

Modelo de Kuramoto em três dimensões: Dinâmica e Simulação

Campinas
21/08/2020

VINÍCIUS OLIVEIRA MARTINS

Modelo de Kuramoto em três dimensões: Dinâmica e Simulação

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Alberto Saa.

Resumo

Este trabalho consiste na análise da dinâmica do modelo de Kuramoto a fim de entender como a topologia da rede interfere na sincronização desse modelo em três dimensões e explorar esses resultados por meio de simulações computacionais. Especificamente, estudaremos a dinâmica de Chandra et al. [2019], mas levando-se em consideração a influência da topologia da rede associada.

Abstract

This work consists of a dynamical analysis of Kuramoto's model to understand how the network topology interferes with the synchronization of this model in three dimensions and to explore these results through computer simulations. Specifically, we will study the Chandra et al. [2019] dynamics, but taking into account the influence of the topology of the associated network.

Conteúdo

1	Introdução	6
1.1	Sincronização	6
1.2	Redes	7
2	Modelo de Kuramoto	8
3	Dinâmica	9
3.1	Pontos fixos	10
3.2	Estabilidade	13
4	Simulações	14
5	Resultados	16
5.1	Pontos fixos	16
5.2	Sincronização global	17
5.3	Sincronização nas vizinhanças dos osciladores	18
6	Conclusão	19

1 Introdução

Sincronização é um comportamento coletivo que emerge da interação entre agentes individuais com comportamento simples. O exemplo paradigmático deste tipo de comportamento é o de osciladores de diferentes frequências acoplados, que devido as interações entre si, dão origem a um comportamento coletivo completamente diferente de seus movimentos naturais como agentes isolados. O objetivo deste trabalho é investigar como redes de diferentes topologias influenciam a dinâmica do modelo de Kuramoto em três dimensões com o uso de simulações computacionais.

Para facilitar a leitura do texto, a seguir serão apresentadas conceitos necessários de sincronização e redes.

1.1 Sincronização

Algumas definições desempenham papéis fundamentais na teoria de sincronização. Antes, vale ressaltar que as frequências utilizadas para caracterizar os osciladores são frequências angulares. O primeiro desses conceitos é o de *Coerência de frequência*, que é descrito como quando dois osciladores acoplados com frequências naturais distintas passam a ter a mesma frequência. Podemos classificar um sistema quanto ao tipo de sincronização, quando a diferença de fase entre os osciladores tende a zero dizemos que temos sincronização em fase, já quando a diferença de fase entre os osciladores tende a π dizemos que temos sincronização em anti-fase.

O quão forte é a interação entre os osciladores é caracterizado por uma constante chamada de *Constante de acoplamento*, esse parâmetro pode ser igual para todo par de osciladores ou não. A diferença entre as frequências dos osciladores é outra característica do sistema importante chamada de *Diferença de frequência*. Essas quantidades determinam se o sistema pode ou não apresentar sincronização.

Por último, nos resta identificar matematicamente a sincronização entre osciladores acoplados, para isso usamos o *Parâmetro de ordem de Kuramoto*, que para N osciladores é definido como:

$$z = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = r e^{i\psi} \quad (1)$$

onde cada oscilador é associado a um número complexo $e^{i\theta_j}$ e θ_j é a fase do oscilador j . O módulo do parâmetro, r chamado de *Coerência de fase*, nos diz o nível de sincronização dos osciladores, o máximo que este valor pode atingir é 1, o que significa que os osciladores estão sincronizados e todos com a mesma fase. Já o argumento do parâmetro, ψ , é a média das fases dos osciladores.

1.2 Redes

O objeto principal de estudo da teoria de redes são os *Grafos* que definimos como estruturas compostas por um conjunto de *vértices*, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, e um conjunto de *arestas*, $E = \{e_1, \dots, e_k\}$, sendo que cada aresta conecta dois vértices. A quantidade de arestas de cada vértice é chamada de *Grau* do vértice. Existem grafos não-direcionados, quando a aresta não tem ideia de sentido, ou seja, a aresta que conecta o vértice j ao vértice k também conecta o vértice k ao vértice j , e grafos direcionados, quando o vértice j estar conectado ao vértice k não implica que o vértice k esta conectado ao vértice j .

Uma maneira de representar um grafo de forma eficiente é usando sua *Matriz adjacência* A , que possui entradas, tais que:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se existir aresta entre } v_i \text{ e } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

No caso de grafos não direcionados a matriz adjacência é simétrica, em grafos direcionados isso não ocorre.

Outra classificação importante é a de *Grafos ponderados* que são aqueles quais existe um peso, $p_{i,j}$, para cada aresta. Nesta caso a matriz adjacência possui entradas, tais que:

$$a_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}, & \text{se existir aresta entre } v_i \text{ e } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por último, temos os *Grafos aleatórios*. Estes são estruturas em que o conjunto de vértices V é definido porém o conjunto de arestas E não é, sendo que para um par de vértices existe uma probabilidade de existir uma aresta entre eles.

2 Modelo de Kuramoto

O modelo de Kuramoto é de grande importância teórica e prática na teoria de sincronização, proposto em 1975 por Y. Kuramoto. Este modelo consiste do seguinte sistema de N equações:

$$\frac{d\theta_l}{dt} = \omega_l + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_l) \quad (2)$$

$$\forall l = 1, \dots, N$$

onde K é a constante de acoplamento, θ_l é a fase e ω_l é a frequência natural do l -ésimo oscilador.

A partir da generalização do modelo de Kuramoto para dimensões maiores presente em Chandra et al. [2019] e considerando um grafo G com N vértices que possui matriz de adjacência $A = [a_{j,l}]$, que caracteriza as interações entre os osciladores do modelo de Kuramoto, ou seja, o vértice l representa o oscilador l , podemos reescrever o sistema (2) para uma esfera unitária do \mathbb{R}^D como:

$$\dot{\sigma}_l = \frac{K}{d_{avg}} \sum_{j=1}^N a_{lj} [\sigma_j - (\sigma_j \cdot \sigma_l) \sigma_l] + \mathbf{W}_l \sigma_l \quad (3)$$

$$\forall l = 1, \dots, N$$

onde σ_l é o vetor de estado de três dimensões do oscilador l , d_{avg} é o grau médio da topologia G e \mathbf{W}_l é uma matriz antissimétrica $D \times D$ que caracteriza a frequência natural do oscilador l .

Para o nosso caso de interesse, em que $D = 3$, o modelo é reduzido para:

$$\dot{\sigma}_l = \frac{K}{d_{avg}} \sum_{j=1}^N a_{lj} [\sigma_j - (\sigma_j \cdot \sigma_l) \sigma_l] + \omega_l \times \sigma_l \quad (4)$$

$$\forall l = 1, \dots, N$$

Claramente, a única diferença entre as equações (3) e (4) está no segundo termo, que envolve as frequências naturais dos osciladores. Na equação (4) ω_l é um vetor que depende da matriz \mathbf{W}_l , sendo $\omega_l = \omega_l \hat{\omega}_l$. Como \mathbf{W}_l é uma matriz antissimétrica, $i\mathbf{W}_l$ é hermitiana, portanto todos os autovalores de \mathbf{W}_l são puramente complexos. Assim, para $D = 3$, 0 é autovalor de \mathbf{W}_l tal como $i\omega_l$ e $-i\omega_l$ também são. Além disso, $\hat{\omega}_l$ é o autovetor associado ao autovalor 0.

3 Dinâmica

Para estudar a dinâmica do sistema (4) vamos encontrar os pontos fixos desse sistema (σ_l tal que $\dot{\sigma}_l = 0$) e classifica-los seguindo o mesmo desenvolvimento de Chandra et al. [2019]. Definimos novos parâmetros de ordem:

$$\rho_l = \frac{1}{d_l} \sum_{j=1}^N a_{lj} \sigma_j \quad (5)$$

Diferente do parâmetro (1) estes parâmetros nos informam apenas sobre a sincronização na vizinhança do oscilador l e não do sistema inteiro.

Logo, podemos reescrever o sistema (4) como:

$$\dot{\sigma}_l = \lambda_l [\rho_l - (\rho_l \cdot \sigma_l) \sigma_l] + \omega_l \times \sigma_l \quad (6)$$

onde:

$$\lambda_l = \frac{d_l K}{d_{avg}}$$

3.1 Pontos fixos

A partir deste ponto iremos tratar as equações individualmente pois o sistema não está mais acoplado, assim para facilitar a leitura abandonaremos os subíndices e retornaremos com eles nas equações finais. Igualando a equação a zero, temos:

$$0 = \lambda[\rho - (\rho \cdot \sigma)\sigma] + \omega \times \sigma$$

Definindo

$$\mu = \frac{\omega}{\lambda|\rho|}$$

podemos reescrever a equação anterior como:

$$0 = \lambda|\rho|[\hat{\rho} - (\hat{\rho} \cdot \sigma)\sigma] + |\omega|(\hat{\omega} \times \sigma)$$

$$0 = [\hat{\rho} - (\hat{\rho} \cdot \sigma)\sigma] + \frac{|\omega|}{\lambda|\rho|}(\hat{\omega} \times \sigma)$$

$$0 = [\hat{\rho} - (\hat{\rho} \cdot \sigma)\sigma] + \mu(\hat{\omega} \times \sigma) \quad (7)$$

Aplicando o produto escalar com $\hat{\omega}$ na equação (7):

$$0 = ([\hat{\rho} - (\hat{\rho} \cdot \sigma)\sigma] \cdot \hat{\omega}) + (\mu(\hat{\omega} \times \sigma) \cdot \hat{\omega})$$

$$0 = ((\hat{\rho} \cdot \hat{\omega}) - (\hat{\rho} \cdot \sigma)(\sigma \cdot \hat{\omega}))$$

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\omega} = (\hat{\rho} \cdot \sigma)(\sigma \cdot \hat{\omega}) \quad (8)$$

Podemos reescrever a equação (7) como:

$$\mu(\hat{\omega} \times \sigma) = [(\hat{\rho} \cdot \sigma)\sigma - \hat{\rho}]$$

Aplicando a norma ao quadrado dos dois lados da equação anterior:

$$\|\mu(\hat{\omega} \times \sigma)\|^2 = \|(\hat{\rho} \cdot \sigma)\sigma - \hat{\rho}\|^2$$

$$\mu^2\|(\hat{\omega} \times \sigma)\|^2 = 1 - (\hat{\rho} \cdot \sigma)^2$$

Da identidade de Lagrange, temos:

$$\mu^2(1 - (\hat{\omega} \cdot \sigma)^2) = 1 - (\hat{\rho} \cdot \sigma)^2 \quad (9)$$

Podemos reescrever (8) como:

$$(\hat{\omega} \cdot \sigma) = \frac{\hat{\rho} \cdot \hat{\omega}}{\hat{\rho} \cdot \sigma}$$

Substituindo em (9), temos:

$$[1 - (\hat{\rho} \cdot \sigma)^2] = \left[1 - \frac{(\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})^2}{(\hat{\rho} \cdot \sigma)^2} \right] \mu^2$$

Manipulando a equação anterior:

$$(\hat{\rho} \cdot \sigma)^4 - (1 - \mu^2)(\hat{\rho} \cdot \sigma)^2 - (\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})^2 \mu^2 = 0 \quad (10)$$

Podemos ver que (10) é uma equação quadrática para $(\hat{\rho} \cdot \sigma)^2$. Fazendo $x = (\hat{\rho} \cdot \sigma)^2$, temos:

$$x^2 - (1 - \mu^2)x - (\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})^2 \mu^2 = 0 \quad (11)$$

Resolvendo (11) por Bhaskara:

$$x = \frac{(1 - \mu^2) \pm \sqrt{(1 - \mu^2)^2 + 4(\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})^2 \mu^2}}{2}$$

$$x = \frac{(1 - \mu^2) \pm (1 - \mu^2) \sqrt{1 + \frac{4(\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})^2 \mu^2}{(1 - \mu^2)^2}}}{2} \quad (12)$$

Na equação (12) podemos ver que a expressão dentro da raiz é maior que 1, portanto, a raiz

$$x = \frac{(1 - \mu^2) - \sqrt{(1 - \mu^2)^2 + 4(\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})^2 \mu^2}}{2}$$

é negativa.

Logo só consideramos a raiz positiva da equação (11). Assim, temos as soluções em termos de $(\hat{\rho} \cdot \sigma)$ da equação (10):

$$\hat{\rho}_l \cdot \sigma_l^F = \pm \sqrt{\frac{(1 - \mu_l^2) + \sqrt{(1 - \mu_l^2)^2 + 4(\hat{\rho}_l \cdot \hat{\omega}_l)^2 \mu_l^2}}{2}} \quad (13)$$

Da expressão anterior podemos ver que para cada oscilador teremos dois pontos fixos, um no mesmo hemisfério que o seu parâmetro de ordem correspondente e outro ponto fixo no hemisfério oposto.

Fixando $\hat{\omega}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \hat{\omega} - \mu(\hat{\omega} \cdot \sigma) + (\sigma \times \hat{\rho}) \\ (\sigma \times \hat{\rho}) &= \mu(\hat{\omega} \cdot \sigma)\sigma - \mu \hat{\omega} \end{aligned} \quad (14)$$

Da equação (8):

$$(\hat{\omega} \cdot \sigma) = \frac{(\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})}{(\hat{\rho} \cdot \sigma)}$$

Substituindo a equação anterior na equação (14):

$$(\sigma \times \hat{\rho}) = \mu \frac{(\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})}{(\hat{\rho} \cdot \sigma)} - \mu \hat{\omega}$$

Assim, temos:

$$\xi = \frac{(\hat{\rho} \cdot \hat{\omega})}{(\hat{\rho} \cdot \sigma)} \quad (15)$$

$$(\hat{\rho} \times \sigma) = \mu(\hat{\omega} - \xi \sigma) \quad (16)$$

Podemos resolver a equação (16) como uma equação vetorial em σ :

$$\sigma = \frac{(\mu(\hat{\omega} - \xi \sigma) \times \hat{\rho})}{|\hat{\rho}|^2} + t \hat{\rho}$$

$$\sigma = \mu[(\hat{\omega} \times \hat{\rho}) - \xi(\sigma \times \hat{\rho})] + t \hat{\rho} \quad (17)$$

Aplicando o produto escalar com $\hat{\rho}$ na equação (17):

$$(\sigma \cdot \hat{\rho}) = \mu[(\hat{\omega} \times \hat{\rho}) - \xi(\sigma \times \hat{\rho})] \cdot \hat{\rho} + t(\hat{\rho} \cdot \hat{\rho})$$

Logo:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) = t$$

Substituindo a equação (16) na equação (17):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu[(\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}) - \xi\mu(\xi\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\omega}})] + t\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mu(\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}) + \xi\mu^2(\hat{\boldsymbol{\omega}} - \xi\boldsymbol{\sigma})] + t\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}) + \xi\mu^2\hat{\boldsymbol{\omega}} - \xi^2\mu^2\boldsymbol{\sigma} + t\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} + \xi^2\mu^2\boldsymbol{\sigma} = \mu(\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}) + \xi\mu^2\hat{\boldsymbol{\omega}} + t\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Assim, temos uma expressão para os pontos fixos do nosso sistema.

$$\boldsymbol{\sigma}_l^F = \frac{1}{(1 + \xi_l^2\mu_l^2)} [\mu_l(\hat{\boldsymbol{\omega}}_l \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_l) + \xi_l\mu_l^2\hat{\boldsymbol{\omega}}_l + t_l\hat{\boldsymbol{\rho}}_l] \quad (18)$$

onde:

$$t_l = (\boldsymbol{\sigma}_l^F \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_l) \quad \xi_l = \frac{(\hat{\boldsymbol{\rho}}_l \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}_l)}{(\hat{\boldsymbol{\rho}}_l \cdot \boldsymbol{\sigma}_l^F)} \quad \mu_l = \frac{d_{avg}\omega_l}{Kd_l|\rho_l|}$$

e $(\boldsymbol{\sigma}_l^F \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_l)$ esta determinado pela equação (13).

3.2 Estabilidade

Seja uma solução de estado estacionário para o sistema (6) onde todos os osciladores estão em um dos seus respectivos pontos fixos e $|\rho_l| > 0$ para todo l . Considerando uma perturbação $\boldsymbol{\sigma}_l = \boldsymbol{\sigma}_l^F + \boldsymbol{\epsilon}_l(t)$, temos:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\sigma}_l^F + \boldsymbol{\epsilon}_l(t)) = \lambda_l \left[\rho_l - (\rho_l \cdot (\boldsymbol{\sigma}_l^F + \boldsymbol{\epsilon}_l(t))) (\boldsymbol{\sigma}_l^F + \boldsymbol{\epsilon}_l(t)) \right] + \omega_l \times (\boldsymbol{\sigma}_l^F + \boldsymbol{\epsilon}_l(t))$$

$$\frac{d\boldsymbol{\epsilon}_l(t)}{dt} = -\lambda_l(\rho_l \cdot \boldsymbol{\sigma}_l^F)\boldsymbol{\epsilon}_l(t) - \lambda_l(\rho_l \cdot \boldsymbol{\epsilon}_l(t))\boldsymbol{\sigma}_l^F - \lambda_l(\rho_l \cdot \boldsymbol{\epsilon}_l(t))\boldsymbol{\epsilon}_l(t) + \omega_l \times \boldsymbol{\epsilon}_l(t) \quad (19)$$

Porém, estamos interessados na derivada da norma de $\epsilon_l(t)$, que nos dará informação sobre a estabilidade dos pontos fixos. Assim:

$$\frac{d}{dt} \|\epsilon_l(t)\| = \frac{d}{dt} \sqrt{(\epsilon_l(t) \cdot \epsilon_l(t))} = \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_l(t) \cdot \epsilon_l(t))}} \left(\frac{d\epsilon_l(t)}{dt} \cdot \epsilon_l(t) \right)$$

Substituindo a equação (19) na igualdade anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\epsilon_l(t)\| = & \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_l(t) \cdot \epsilon_l(t))}} \left(-\lambda_l(\rho_l \cdot \sigma_l^F)(\epsilon_l(t) \cdot \epsilon_l(t)) - \lambda_l(\rho_l \cdot \epsilon_l(t))(\sigma_l^F \cdot \epsilon_l(t)) \right. \\ & \left. - \lambda_l(\rho_l \cdot \epsilon_l(t))(\epsilon_l(t) \cdot \epsilon_l(t)) + (\omega_l \times \epsilon_l(t)) \cdot \epsilon_l(t) \right) \end{aligned}$$

Como σ_l deve permanecer unitário então $(\sigma_l^F \cdot \epsilon_l(t))$ deve ser nulo. Além disso, considerando os termos de grau 2 em $\epsilon_l(t)$ nulos, temos:

$$\frac{d}{dt} \|\epsilon_l(t)\| = -\lambda_l(\rho_l \cdot \sigma_l^F) \|\epsilon_l(t)\| \quad (20)$$

Portanto, podemos ver claramente pela equação (20) que o produto $(\rho_l \cdot \sigma_l^F)$ determina a estabilidade do ponto fixo. Considerando um sistema em estado coerente ($K > 0$) se $(\rho_l \cdot \sigma_l^F) > 0$ o ponto fixo é estável e se $(\rho_l \cdot \sigma_l^F) < 0$ o ponto fixo é instável, da equação (13) vemos que todo oscilador possui tanto um ponto fixo estável quanto um instável.

4 Simulações

O parâmetro de ordem (5) é muito conveniente para a análise dinâmica do sistema, porém como temos a mesma quantidade de parâmetros de ordem que osciladores não faz muito sentido usar estes vetores para entender a sincronização no sistema inteiro. Assim, utilizamos os parâmetro (1) em sua forma vetorial:

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sigma_l \quad (21)$$

Para as simulações realizadas neste trabalho consideramos um grafo de Erdős-Rényi, estes grafos podem ser definidos como um grafo aleatório com probabilidade homogênea de existência de uma aresta entre dois vértices distintos.

Podemos construir um grafo deste tipo de duas maneiras. A primeira seria definir a quantidade de vértices N (o que já define o conjunto de vértices) e a quantidade de arestas E para assim distribuir estas arestas de maneira uniforme, denotamos esta construção como $G(N, E)$. O segundo modo, que será o utilizado, consiste em definir o número de vértices N e uma probabilidade de que exista uma aresta entre dois vértices P , denotamos esta construção como $G(N, P)$.

Como não vamos simular um sistema real tanto os elementos das matrizes \mathbf{W}_l como os estados iniciais não podem ser obtidos por meio de medição ou inferência, assim devemos escolhe-los de maneira aleatória.

Para as matrizes de frequência natural usaremos uma distribuição normal com média $m = 0$ e desvio padrão $\Delta = 1$ para escolher os elementos da região triangular superior de \mathbf{W}_l e os elementos da região triangular inferior são tais que a matriz se mantenha antissimétrica. Já para os estados iniciais usaremos uma distribuição uniforme na esfera S^2 .

Escolhemos fazer nossas simulações em python pois é uma linguagem de programação que dispõe das ferramentas que precisamos. A biblioteca utilizadas foram:

- *numpy* utilizada para o sorteio dos elementos das matrizes de frequência natural e os estados iniciais.
- *networkx* utilizada para a construção dos grafos e o acesso a suas propriedades.
- *matplotlib* utilizada para a construção dos frames e gráficos necessários.
- *scipy* utilizada para a solução numérica do sistema.
- *pandas* utilizada para o armazenamento dos parâmetros $\|\rho_l\|$

5 Resultados

Para podermos observar a relação da topologia do sistema com sua sincronização, fizemos simulações variando o valor da probabilidade P . Essas simulações estão ilustradas a seguir.

5.1 Pontos fixos

Com o intuito de visualizar se a simulação do sistema realmente levava os osciladores para os pontos fixos calculados na seção 3.1 construímos uma imagem para cada instante de tempo em que resolvemos o sistema numericamente. Abaixo estão três instantes de tempo de duas simulações com 50 osciladores (esta quantidade de osciladores é baixa porém isto ajuda a visualização e exige menos esforço computacional) para $P = 1.0$ e para $P = 0.6$.

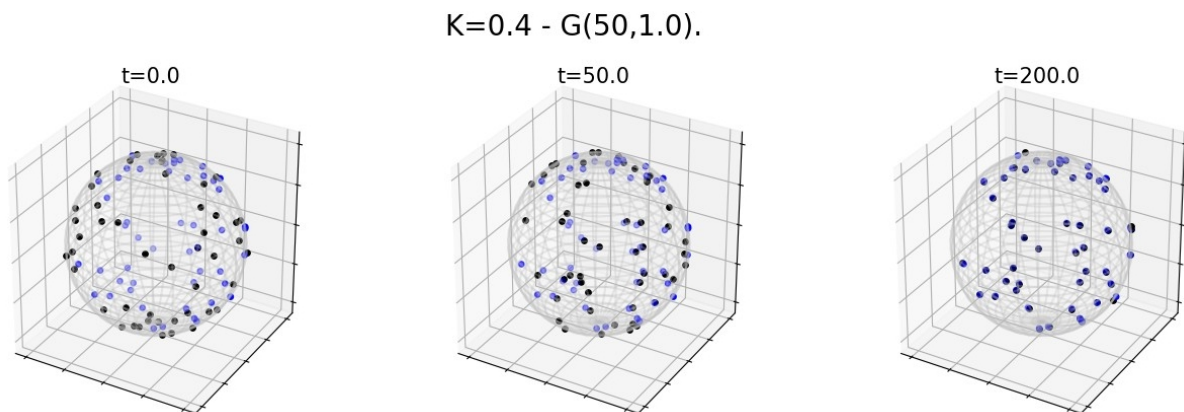


Figura 1: Estado do sistema em três instantes de tempo. $N = 50$, $P = 1.0$, $K = 0.4$, $m = 0$ e $\Delta = 1$

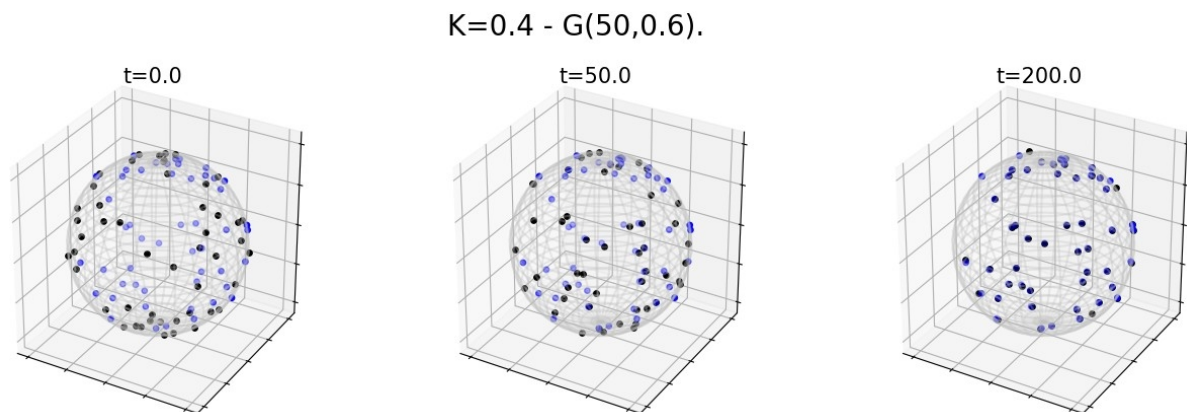


Figura 2: Estado do sistema em três instantes de tempo. $N = 50$, $P = 0.6$, $K = 0.4$, $m = 0$ e $\Delta = 1$

Podemos ver que os osciladores chegaram aos pontos fixos e também que os pontos fixos do sistema mudaram, o que está de acordo com a equação (18) pois para grafos de Erdős-Rényi o grau médio depende da probabilidade P .

5.2 Sincronização global

Construir imagens do sistema para cada instante de tempo nos permite observar como o sistema evolui, mas este modo não é muito útil para entender como se relacionam os parâmetros. Aqui consideramos 250 osciladores e variamos apenas os parâmetros P e K .

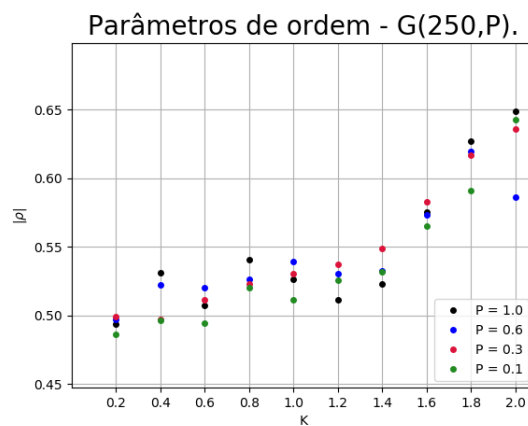


Figura 3: Parâmetros em $t = 200$. $N = 250$, $m = 0$ e $\Delta = 1$

Não é possível observar nenhuma correlação entre a norma do parâmetro (21) e a variação em P , talvez para que possamos ver uma possível correlação entre este parâmetro e P devemos fazer simulações com mais osciladores e por períodos de tempo maiores. Porém, já em relação a constante de acoplamento notamos que quando aumentamos o valor de K a norma de ρ tende a aumentar também, este comportamento também foi observado por Chandra et al. [2019].

5.3 Sincronização nas vizinhanças dos osciladores

O parâmetro (5) nos informa sobre a sincronização vizinhança l , ou seja quanto maior a norma deste vetor mais sincronizada está a vizinhança em questão. Assim, variando P em um sistema e plotando em um plano pontos tais $(d_l, |\rho_l|)$ temos o seguinte gráfico dispersão.

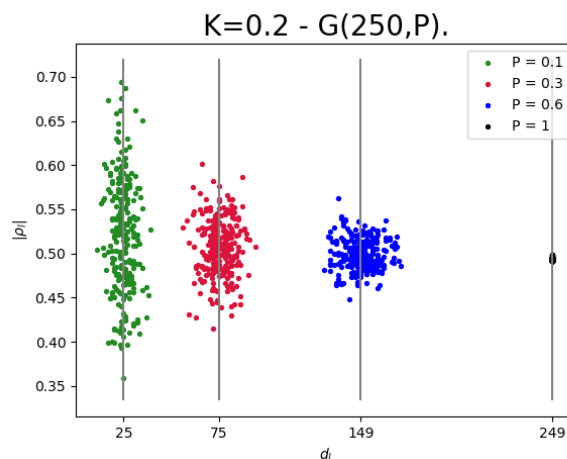


Figura 4: Parâmetros em $t = 200$. $N = 250$, $K = 0.2$, $m = 0$ e $\Delta = 1$

Logo vemos uma clara correlação entre a probabilidade P e os parâmetros individuais dos osciladores, quanto menor o valor de P maior é a dispersão dos pontos. Isto também pode ser interpretado como o desvio padrão da norma dos parâmetros individuais é inversamente proporcional ao desvio padrão dos graus dos vértices.

6 Conclusão

Pelos resultados apresentados vemos que a topologia do sistema interfere em sua sincronização em diversos aspectos. Devido ao grande esforço computacional requerido para as simulações não foi possível avaliar esses comportamentos em sistemas com um número grande de osciladores, o que pode favorecer estes resultados, e também por isto foi considerado apenas o grafo de Erdős-Rényi, que é o grafo aleatório mais simples que temos.

Portanto, devemos continuar explorando este problema teoricamente e computacionalmente, em sistemas maiores e também em outras topologias.

Referências

- Jürgen Kurths Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum. *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press, 1 edition, 2001.
- Sarthak Chandra, Michelle Girvan, and Edward Ott. Continuous versus discontinuous transitions in the d -dimensional generalized kuramoto model: Odd d is different. *Phys. Rev. X*, Jan 2019. doi: 10.1103/PhysRevX.9.011002.
- Reza Olfati-Saber. [iee proceedings of the 45th iee conference on decision and control - san diego, ca, usa (2006.12.13-2006.12.15)] proceedings of the 45th iee conference on decision and control - swarms on sphere: A programmable swarm with synchronous behaviors like oscillator networks. 2006. doi: 10.1109/cdc.2006.376811.
- Alberto Saa. *Notas de aula: Introdução à Teoria de Redes*. 2019. URL <https://mt803b.home.blog/>.