



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



ANDRÉ LUIZ DOS SANTOS

O comportamento evolutivo de manchas de poluição em ambientes aquáticos e sua influência na biota: modelagem, discretização, algoritmização e simulações computacionais

Campinas
21/08/2020

ANDRÉ LUIZ DOS SANTOS

O comportamento evolutivo de manchas de poluição em ambientes aquáticos e sua influência na biota: modelagem, discretização, algoritmização e simulações computacionais

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer.

Sumário

1	Introdução	4
2	Modelagem	4
2.1	Modelo matemático	4
2.2	Definição do domínio e condições de fronteira	5
2.3	Diferenças finitas e Crank-Nicolson	6
3	Simulações	8
3.1	Implementação	8
3.2	Execução e resultados	9
4	Conclusão	13
A	Implementação	14
	Referências	19

Resumo

O objetivo abordado nesse projeto foi observar como duas espécies que competem pelo mesmo habitat se relacionam em um meio aquático, dado que o problema tem uma capacidade suporte máxima para o ambiente, mas também temos dentro de cada uma delas sua própria interação afim de crescer e se espalhar. Acrescentamos ao problema uma fonte de poluição na qual afeta ambas as espécies, sendo um fator à mais que prejudica o desenvolvimento das espécies nesse ambiente.

Para esse problema trabalhamos com as equações de difusão-advecção para modelar como as populações e a pluma toxica se comporta no meio, ou seja, a redução de cada população é proporcional a quantidade do poluente presente no meio, já para competição entre as espécies a modelagem foi do tipo Lotka-Volterra, na qual não há predação entre elas, mais sim uma disputa por recursos e espaço de crescimento.

Para esse modelo usamos para a solucionar equações parciais o método das diferenças finitas para o espaço e Crank-Nicolson para o tempo, que irão nós mostrar como o problema se desenvolve com o passar do tempo.

1 Introdução

Sabemos que em um espaço limitado não existe recursos infinitos, para que varias espécies possam crescer e se desenvolver; baseando que não haja predação entre elas, que apenas disputem pelos mesmos alimentos como algas e pequenos crustáceos. Dessa forma aquela que tiver um crescimento populacional maior terá uma vantagem maior sobre o domínio do espaço, porém estamos lidando com um meio onde é possível explorar melhor o fator de conquista de território.

No cenário que iremos trabalhar o domínio escolhido foi parte da baia de Santos, onde teremos uma fonte na qual está depositando material impactante ao meio, e com isso afetando o desenvolvimento das populações, contudo a fato de estar trabalhando nesse local temos além de uma mudança mais frequente nos ventos, devido as brisas marítimas, gerando assim uma forma imprevisível do comportamento da pluma toxica, o que em um rio não seria tão visível.

Neste caso, junto com a modelagem do movimento de uma pluma de poluente com efeitos tóxicos para duas populações que interagem no espaço, temos a possibilidade de reunir num só modelo as equações de movimento da mancha e das populações consideradas não apenas no tempo mas, também, no espaço. Assim, a passagem da pluma de poluente pelo meio em função de seu transporte advectivo, afeta as duas populações podendo, inclusive, levar a um desequilíbrio destas a curto ou a médio prazos.

2 Modelagem

2.1 Modelo matemático

No modelo temos duas espécies de peixes que disputam os mesmos recursos, ambas distribuídas em um mesmo espaço, dessa forma usamos as equações de Lotka-Volterra para analisar o comportamento do crescimento das espécies entre seus próprios membros e também como interagem com a outra espécie.

Dessa forma o modelo é composto por duas espécies de peixes $P(x, y, t)$ e $Q(x, y, t)$, nas quais não tem fator predatório entre ambas, mas são afetadas pela presença da outra, e a pluma toxica que interagem com ambas $C(x, y, t)$ com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in (0, T]$.

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \alpha_c \Delta C + \mathbb{V} \cdot \nabla C + \mu_c = f \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \alpha_p \Delta P + \mathbb{W} \cdot \nabla P + \mu_p = \lambda_p P \left(1 - \frac{P + \rho_p Q}{K} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \alpha_q \Delta Q + \mathbb{U} \cdot \nabla Q + \mu_q = \lambda_q Q \left(1 - \frac{\rho_q P + Q}{K} \right) \quad (3)$$

Os parâmetro são:

- $\alpha_p, \alpha_q, \alpha_c$ representam a dispersão de cada espécie e do poluente respectivamente.
- $\mathbb{W} = \langle w_1, w_2 \rangle, \mathbb{U} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbb{V} = \langle v_1, v_2 \rangle$ - representa os fluxos migratórios de cada espécie e o fluxo do poluente.
- λ_p, λ_q são as taxas de crescimento de P e C .
- μ_c representa o decaimento do poluente no meio.
- $\mu_p = (\kappa_p C)P$ é a morbidade da espécie $P(x, y, t)$ em função do poluente $C(x, y, t)$.
- $\mu_q = (\kappa_q C)Q$ é a morbidade da espécie $Q(x, y, t)$ em função do poluente $C(x, y, t)$.
- ρ_p e ρ_q é a taxa de interferência que uma população causa no crescimento da outra.
- f representa a intensidade da fonte do poluente.
- K é a capacidade suporte do meio aquático.

Onde quanto maior a concentração do poluente no meio, maior será o impacto nas populações, contudo o modo que cada uma será afetada dependerá de como as componentes do vetor \mathbb{V} irão se comportar com o passar do tempo, componentes essas que mudam de direção e intensidade com o passar do tempo.

2.2 Definição do domínio e condições de fronteira

Consideramos o domínio Ω como uma forma retangular, sendo escolhido como cenário para esse modelo a baía de Santos.

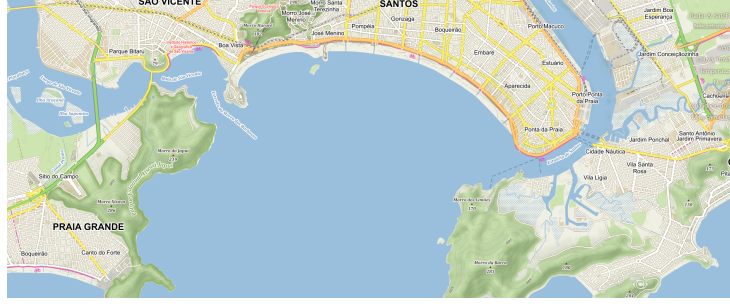
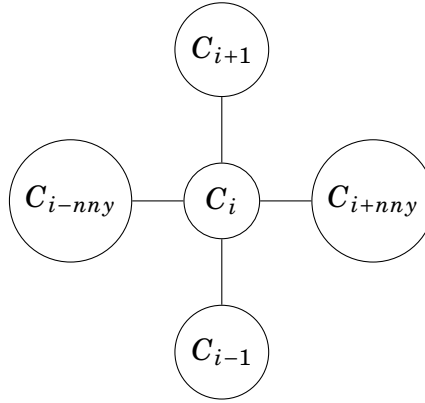


Figura 1: Baía de Santos

Usaremos nesse problema a condição de contorno de von Neumann homogênea.

$$\frac{\partial C}{\partial \eta}(x, y, t) \Big|_{\Gamma} = 0, (x, y) \in \Gamma \subset \partial\Omega, t \in I \quad (4)$$

Para realizar os cálculos usando diferenças finitas, subdividimos a malha retangular de forma a criar vários nós para que possamos saber o desenvolvimento das equações em cada ponto da malha, da forma:



2.3 Diferenças finitas e Crank-Nicolson

Utilizando as aproximações abaixo [3], podemos então descrever como iremos solucionar o sistema de equações usando diferenças finitas no espaço, onde essencialmente serão as mesma para as espécies e a pluma toxica.

$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx \frac{C_{i+ny} - C_{i-ny}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} \approx \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \approx \frac{C_{i+ny} - 2C_i + C_{i-ny}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \approx \frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{\Delta y^2}$$

O método de Crank-Nicolson [3] é um método de segunda ordem no tempo, que para a equação de difusão pode-se provar que é incondicionalmente estável, contudo as soluções

aproximadas podem conter oscilações dependendo do tamanho do passo. A partir disso temos:

$$C_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{2}$$

Abrindo a equação [1] se obtém:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_c \left(\frac{\partial^2 C^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y^2} \right) - v_1 \frac{\partial C^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} - v_2 \frac{\partial C^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} - \mu_c - f$$

Usando as relações dadas a partir de Crank-Nicolson, e realizando manipulações algébricas chegamos na seguinte equação, para o poluente:

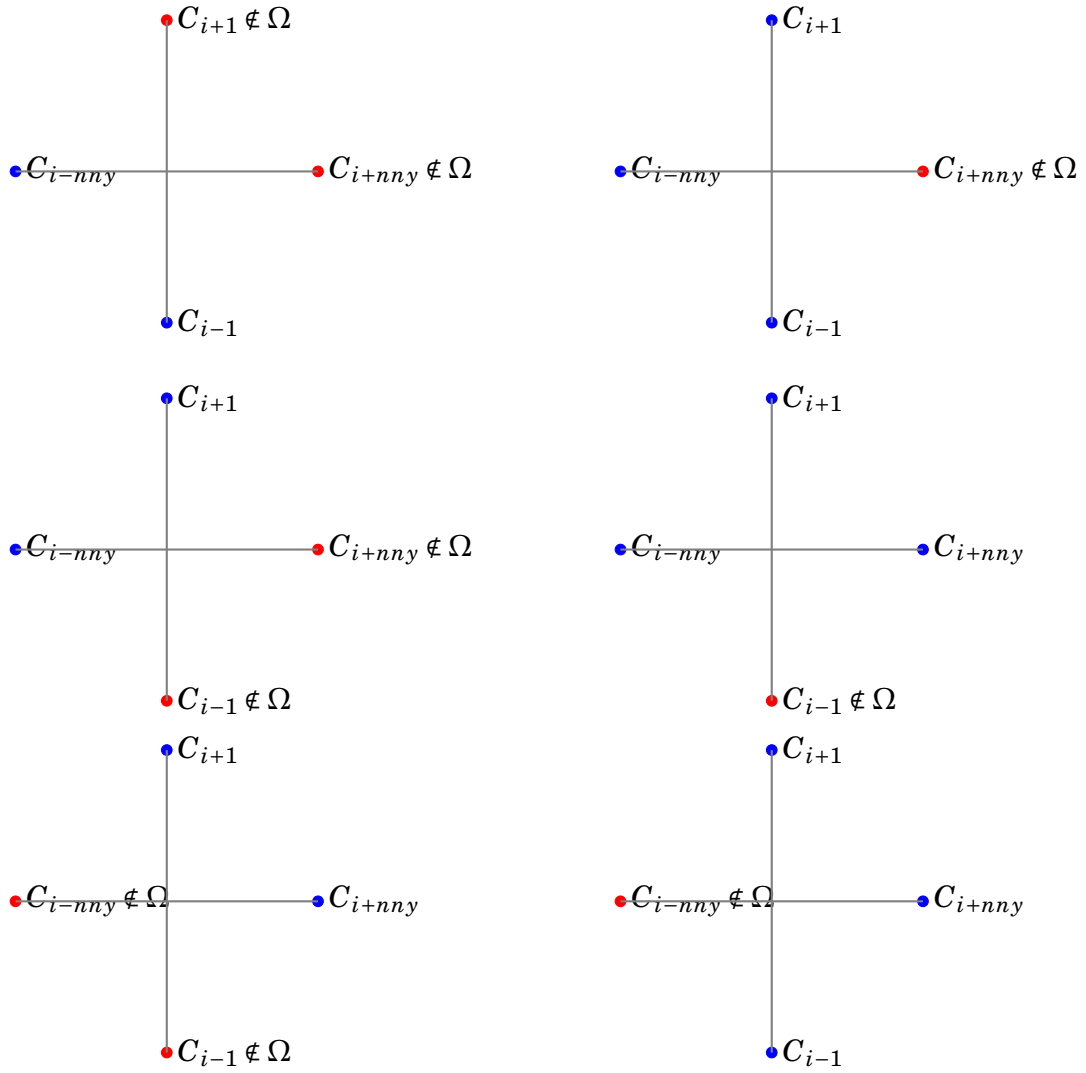
$$\begin{aligned} & C_{i-2ny}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta x} \right) + C_{i-1}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_2}{4\Delta y} \right) + C_i^{n+1} \left(\frac{\Delta t \alpha_c}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_c}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_c}{2} + 1 \right) + \\ & C_{i+1}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_2}{4\Delta y} \right) + C_{i+2ny}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta x} \right) = f + C_{i-2ny}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta x} \right) + C_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_2}{4\Delta y} \right) + \\ & C_i^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_c}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_c}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_c}{2} \right) + C_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_2}{4\Delta y} \right) + C_{i+2ny}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta x} \right) \end{aligned}$$

De maneira análoga, para a população P,

$$\begin{aligned} & P_{i-2ny}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t w_1}{4\Delta x} \right) + P_{i-1}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t w_2}{4\Delta y} \right) + P_i^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_p}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_p}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_p}{2} + \frac{\Delta t \lambda_p}{4K} (P_i^{n+1} + Q_i^{n+1}) - \right. \\ & \left. 2\lambda_p \right) + P_{i+1}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t w_2}{4\Delta y} \right) + P_{i+2ny}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t w_1}{4\Delta x} \right) = P_{i-2ny}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t w_1}{4\Delta x} \right) + P_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t w_2}{4\Delta y} \right) \\ & + P_i^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_p}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_p}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_p}{2} - \frac{\Delta t \lambda_p}{4K} (P_i^n + Q_i^n) + 2\lambda_p \right) + P_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t w_2}{4\Delta y} \right) + P_{i+2ny}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t w_1}{4\Delta x} \right) \end{aligned}$$

e para a espécie Q temos,

$$\begin{aligned} & Q_{i-2ny}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_q}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + Q_{i-1}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_q}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t u_2}{4\Delta y} \right) + Q_i^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_q}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_q}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_q}{2} + \frac{\Delta t \lambda_q}{4K} (P_i^{n+1} + Q_i^{n+1}) - \right. \\ & \left. 2\lambda_q \right) + Q_{i+1}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_q}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t u_2}{4\Delta y} \right) + Q_{i+2ny}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_q}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) = Q_{i-2ny}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_q}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + Q_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_q}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t u_2}{4\Delta y} \right) \\ & + Q_i^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_q}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_q}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_q}{2} - \frac{\Delta t \lambda_q}{4K} (P_i^n + Q_i^n) + 2\lambda_q \right) + Q_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_q}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t u_2}{4\Delta y} \right) + Q_{i+2ny}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_q}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) \end{aligned}$$



3.2 Execução e resultados

Para as simulações feitas no programa foram usado os parâmetros abaixo, alguns foram modificados para que seja mais visíveis os efeitos pelo fato do espaço discretizado ser muito amplo para amostras pequenas.

α_a	0.125×10^{-2}	α_b	0.375×10^{-2}
μ_a	0.100×10^{-1}	α_b	0.200×10^{-1}
w_1	0.027778	u_1	-0.037778
w_2	0.0250	u_2	-0.0125
λ_a	0.250	λ_b	0.125
ρ_a	0.05	ρ_b	0.05
α_c	0.125×10^{-2}	μ_c	0.100×10^{-7}
K	5000	f	30

Tabela 1: Parâmetro da simulação

Para um melhor comparativo vamos trabalhar com dois cenários o usual onde temos marés e uma mudança de ventos durante o período observado, na qual a fonte não poluente não está ativa em todo o tempo.

E o outro sendo uma fonte constante, portanto ela não irá desacoplar de sua posição original quando cessar a emissão de poluente no meio, com esse cenários poderemos ver também as diferenças de se tratar um problema no oceano e em um lago, por exemplo que a existência de maré é nula. Em ambos os casos a discretização permanece a mesma, apenas há uma mudança nos parâmetro da velocidade do poluente e como a pluma se comporta com o passar do tempo.

Podemos observar nos gráficos abaixo que quando temos a presença de um vento que muda com o tempo, mais a presença da maré fica difícil prever qual das populações será mais afetadas. Contudo a especie (P) por estar mais próxima da fonte, sofre mais devido as mudanças do vento, e também por conta de seu crescimento ir de encontro a fonte. Podemos ver bem na borda do espaço ocupado pela população o dano causado no seu crescimento no ambiente.

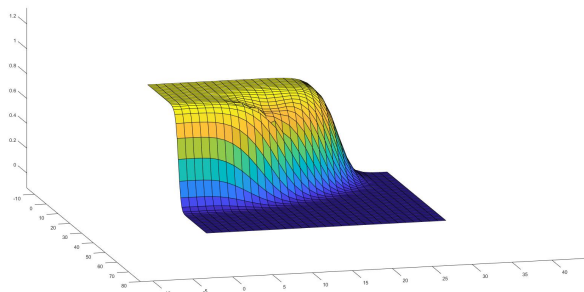


Figura 2: Espécie P

É visível que a segunda população devido a maneira que se espalhou pelo meio, que não foi praticamente afetada, podendo assim estar com um maior controle do ambiente, justamente o ponto que argumentávamos sobre o possível desequilíbrio no meio aquático que tais poluentes podem causar.

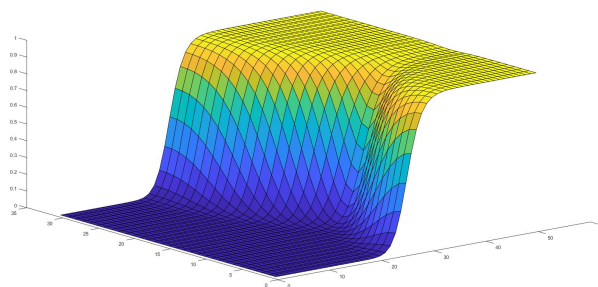


Figura 3: Espécie Q

Apesar da maré apenas expandir ou contrair a mancha dependendo do momento, vemos que os ventos que mudam de forma aleatória, como se observa nos cenários reais, foi o maior causador do impacto na primeira especie, isso porque ele direciona a maré para sudoeste e então pelo fato oscilatório dela, expande a pluma toxica.

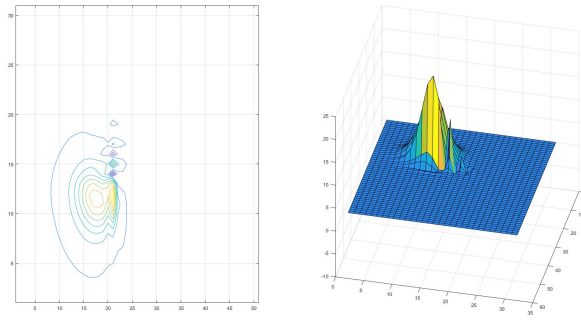


Figura 4: Variação da pluma toxica na presença de maré

Na situação que não há a presença da maré, mas somente os ventos fixos e uma única direção, conseguimos notar que novamente a espécie P , sofre mais que a outra.

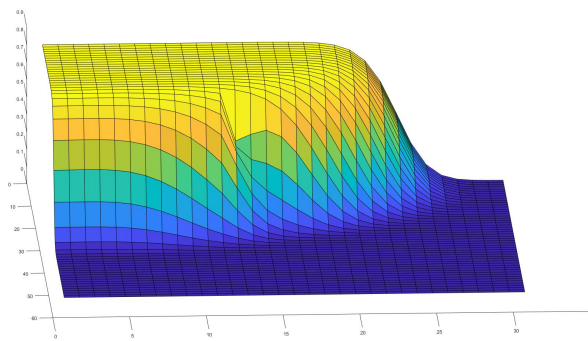


Figura 5: Espécie P

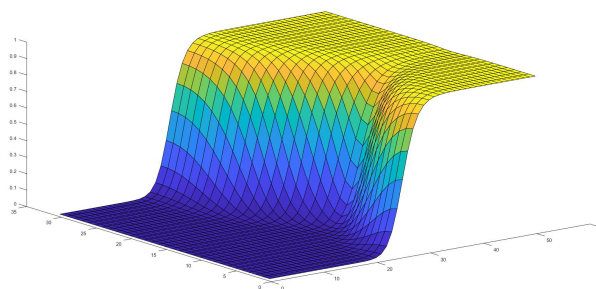


Figura 6: Espécie Q

Com uma fonte que despeja poluente de forma constante e não intermitente como no caso anterior, vemos pelas curvas de nível que o poluente se torna mais concentrado, se tornando mais danoso.

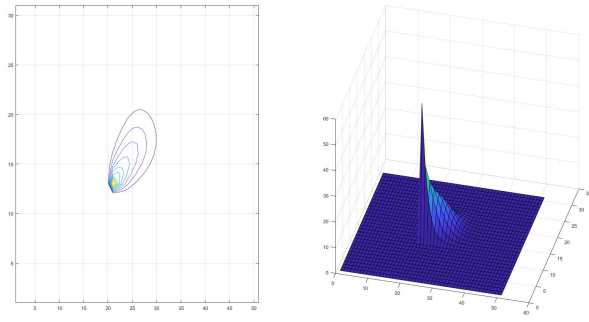
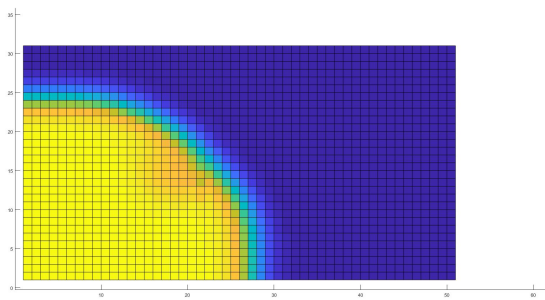
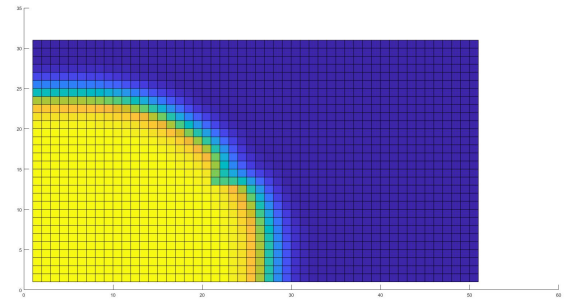


Figura 7: Variação da pluma toxica na ausência de maré

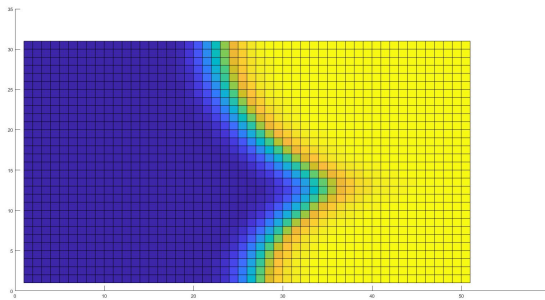


(a) Com maré

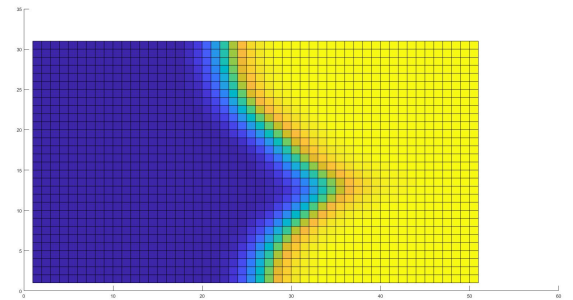


(b) Sem maré

Figura 8: Processo de crescimento da espécie P



(a) Com maré



(b) Sem maré

Figura 9: Processo de crescimento da espécie Q

4 Conclusão

Após analisar os dados coletados, chegamos na conclusão que do ponto de vista ambiental se a contaminação ocorre em um oceano a maré tende a espalhar mais o poluente pelo meio, tornando assim o trabalho de contenção e remoção dele muito mais trabalhoso, fazendo com que a área que se torne imprópria para uso geral. Portanto não temos somente o desequilíbrio da biota, mas também em tudo o que faz uso desse espaço, como pesca, lazer e até mesmo o estuário de Santos.

Contudo olhando na figura [9] vemos que de fato a maré causa um espalhamento maior, como podemos ver no item *(b)* da figura [9] onde é possível notar uma leve diferença em relação ao item *(a)*, o vinco na superfície é levemente maior quando a população está na presença da maré. Porém vemos um outro vinco na superfície da população *P* que não é notada na presença de maré, ou seja, apesar da maré causar uma espalhamento maior, dependendo das condições do vento, porém quando não temos esse fator, temos uma concentração maior do poluente e assim causando mais danos.

Concluimos que em ambos os casos a pluma toxica afeta as especies, porém cada cenário gera um sub-problema diferente, já que nos oceanos o poluente se tornam difíceis de conter e prever até onde ele iram afetar a biota, contudo quando temos um lago onde não temos uma difusão maior por conta da maré e os ventos não são tão fortes em condições normais, dessa forma o poluente avança pouco pelo domínio e afeta a especie mais próxima, pois se torna muito concentrada naquele espaço.

A Implementação

```
1
2 % Usando a difusao advectiva e reativa de um poluente, simular a ...
   interacao
3 % competitiva de duas especies com competicao intraespecifica (Verhulst)
4 %
5 % Resolucao das equacoes evolutivas de difusao-advectacao-reacao com ...
   decaimento
6 % e de dinamica espacial e evolutiva das duas especies
7 % por diferencas divididas e Crank-Nicolson
8
9 clear all
10 clc
11
12 % dados do problema: Poluicao
13 alfc = 0.125e-2; uc = 0.027778; vc = 0.025; muc = 0.1e-7;
14 %
15 % dados do problema: Populacoes
16 alfa = 0.125e-2; alfb=0.375e-2;
17 ua = 0.027778; va = 0.025; ub = -0.037778; vb = -0.0125;
18 mua = 0.1e-1; mub=0.2e-1;
19 K = 5000;
20 lba=0.25; lbb=0.125;
21 roa=0.05; rob=0.05;
22
23 % fontes de poluicao
24 fc1 = 30;
25
26 %dados do dominio
27 l = 4.5; h = 3; tf = 25;
28
29 %dados da discretizacao
30 nx = 50; nnx = nx+1; dx = 1/nx;
31 ny = 30; nny = ny+1; dy = h/ny;
32 nt = 100; dt = tf/nt; nn = nnx*nny;
33
34 % localizacao da fonte
35 ic1=floor(20*nny+13);
36
37 cz=0.5*ones(nn,1);
38 % condicoes iniciais populacoes a e b
39 az=0.0001*zeros(nn,1); bz=az/2;
40
41 ia1=1; ia2=2; ia3=nny+2; ia4=nny+1; ia5=2*nny+1;
42 az(ia1)=0.25; az(ia2)=0.125; az(ia3)=0.1875; az(ia4)=0.125; ...
   az(ia5)=0.0675;
43
44 ib1=nn; ib2=nn-1; ib3=nn-nny; ib4=nn-nny-1; ib5=nn-2*nny;
45 bz(ib1)=0.25; bz(ib2)=0.125; bz(ib3)=0.1875; bz(ib4)=0.125; ...
   bz(ib5)=0.0675;
46
47 %calculos auxiliares
48 ddx = dx*dx; ddy = dy*dy;
49 d4x = 4*dx; d4y = 4*dy;
50
```

```

51 % calculos para fatores nas matrizes
52 atxc = alfc*dt/ddx; atyc = alfc*dt/ddy;
53 atxa = alfa*dt/ddx; atya = alfa*dt/ddy;
54 atxb = alfb*dt/ddx; atyb = alfb*dt/ddy;
55 mdtc = muc*dt/2; mda = 0; mdtb = 0;
56 %
57 % preparacao dos termos das seis matrizes:
58 % esquerda de c, esquerda de a, esquerda de b
59 % direita de c, direita de a, direita de b
60
61 dpec = 1+atxc+atyc+mdtc;
62 dpea = 1+atxa+atya;
63 dpeb = 1+atxb+atyb;
64 dpdc = 1-atxc-atyc;
65 dpda = 1+atxa+atya;
66 dpdb = 1+atxb+atyb;
67
68 % Numeros de limiar de Peclet para c, a e b
69 [uc*dx/alfc vc*dy/alfc];
70 [ua*dx/alfa va*dy/alfc];
71 [ub*dx/alfb vb*dy/alfb];
72
73 % montar as matrizes e o termo independente
74 mec = sparse(nn); mdc = sparse(nn);
75 mea = sparse(nn); mda = sparse(nn);
76 meb = sparse(nn); mdb = sparse(nn);
77 mintae=mea; mintbe=meb;
78 mintad=mda; mintbd=mdb;
79
80 cb=zeros(nn,1); ab=zeros(nn,1); bb=zeros(nn,1);
81
82 % definir condicoes iniciais de c
83 cb(ic1)=dt*fcl;
84
85 for i = 1 : nn
86     mec(i,i) = dpec; mdc(i,i) = dpdc;
87     mea(i,i) = dpea; mda(i,i) = dpda;
88     meb(i,i) = dpeb; mdb(i,i) = dpdb;
89 end
90
91 %Cria um vetor de velocidades em varias direcoes para u e v
92 zv=zeros(nt,1);
93 zu=zeros(nt,1);
94     for k=1:nt
95         clear i;
96         zv(k) = vc*exp(i*k);
97         zu(k) = uc*exp(i*k);
98     end
99
100 a=az; b=bz; c=cz;
101 % Repeticoes temporais
102 for it=1:nt
103
104     %Gera o efeito mare
105     wk = 0.45*cos((pi/6)*it - (3/2)*pi);
106
107     %Ativa a mudanca de direcao de vento, que e escolhido de forma ...
108     aleatoria

```

```

108 %nos vetores criados acima
109 if ((it ≥ 1 ) && (it < 40)) || ((it ≥ 40 ) && (it < 80)) || ((it ≥ 80 ...
    ) && (it < 100))
110     vc = real(zv(randi(100)));
111     uc = imag(zu(randi(100)));
112 end
113
114 %Vetor velocidade com a componente aleatoria + mare.
115 newvc = (vc+wk)/2;
116
117 utxa = ua*dt/d4x; vtya = va*dt/d4y;
118 utxb = ub*dt/d4x; vtyb = vb*dt/d4y;
119 utxc = uc*dt/d4x; vtyc = newvc*dt/d4y;
120
121 newvc;
122 [uc*dx/alfc newvc*dy/alfc;
123
124 dssdec = (-atxc/2)+utxc; dssddc = -dssdec;
125 dssdea = (-atxa/2)+utxa; dssdda = -dssdea;
126 dssdeb = (-atxb/2)+utxb; dssddb = -dssdeb;
127 dsspec = (-atyc/2)+vtyc; dsspcd = -dsspec;
128 dsspea = (-atya/2)+vtya; dsspda = -dsspea;
129 dsspeb = (-atyb/2)+vtyb; dsspbd = -dsspeb;
130 dsipec = (-atyc/2)-vtyc; dsipdc = -dsipec;
131 dsipea = (-atya/2)-vtya; dsipda = -dsipea;
132 dsipeb = (-atyb/2)-vtyb; dsipbd = -dsipeb;
133 dsiddec = (-atxc/2)-utxc; dsiddc = -dsiddec;
134 dsidea = (-atxa/2)-utxa; dsidda = -dsidea;
135 dsideb = (-atxb/2)-utxb; dsiddb = -dsideb;
136
137 for i = 1 : nn-1
138     mec(i+1,i) = dsipec; mdc(i+1,i) = dsipdc;
139     mec(i,i+1) = dsspec; mdc(i,i+1) = dsspcd;
140     mea(i+1,i) = dsipea; mda(i+1,i) = dsipda;
141     mea(i,i+1) = dsspea; mda(i,i+1) = dsspda;
142     meb(i+1,i) = dsipeb; mdb(i+1,i) = dsipbd;
143     meb(i,i+1) = dsspeb; mdb(i,i+1) = dsspbd;
144 end
145
146 for i = 1 : nn-nny
147     mec(i+nny,i) = dsiddec; mdc(i+nny,i) = dsiddc;
148     mec(i,i+nny) = dssdec; mdc(i,i+nny) = dssddc;
149     mea(i+nny,i) = dsidea; mda(i+nny,i) = dsidda;
150     mea(i,i+nny) = dssdea; mda(i,i+nny) = dssdda;
151     meb(i+nny,i) = dsideb; mdb(i+nny,i) = dsiddb;
152     meb(i,i+nny) = dssdeb; mdb(i,i+nny) = dssddb;
153 end
154
155 % Correcoes das bordas horizontais e verticais
156 %
157 % Borda Vertical a Esquerda
158 for i=1:nny
159     mec(i,i+nny)=-atxc; mdc(i,i+nny)=atxc;
160     mea(i,i+nny)=-atxa; mda(i,i+nny)=atxa;
161     meb(i,i+nny)=-atxb; mdb(i,i+nny)=atxb;
162 end
163
164 % Borda Horizontal Superior

```



```

165 for i=1:nnx-1
166     ind=i*ny;
167     mec(ind,ind+1)=0; mdc(ind,ind+1)=0;
168     mec(ind,ind-1)=-atyc; mdc(ind,ind-1)=atyc;
169     mea(ind,ind+1)=0; mda(ind,ind+1)=0;
170     mea(ind,ind-1)=-atya; mda(ind,ind-1)=atya;
171     meb(ind,ind+1)=0; mdb(ind,ind+1)=0;
172     meb(ind,ind-1)=-atyb; mdb(ind,ind-1)=atyb;
173 end
174
175 mec(nn,nn-1)=-atyc; mdc(nn,nn-1)=atyc;
176 mea(nn,nn-1)=-atya; mda(nn,nn-1)=atya;
177 meb(nn,nn-1)=-atyb; mdb(nn,nn-1)=atyb;
178
179 % Borda Horizontal Inferior
180 for i=2:nnx-1
181     ind=(i-1)*ny+1;
182     mec(ind,ind+1)=-atyc; mdc(ind,ind+1)=atyc;
183     mec(ind,ind-1)=0; mdc(ind,ind-1)=0;
184     mea(ind,ind+1)=-atya; mda(ind,ind+1)=atya;
185     mea(ind,ind-1)=0; mda(ind,ind-1)=0;
186     meb(ind,ind+1)=-atyb; mdb(ind,ind+1)=atyb;
187     meb(ind,ind-1)=0; mdb(ind,ind-1)=0;
188 end
189 mec(1,2)=-atyc; mdc(1,2)=atyc;
190 mea(1,2)=-atya; mda(1,2)=atya;
191 meb(1,2)=-atyb; mdb(1,2)=atyb;
192
193 % Borda vertical a direita
194 for i=1:ny
195     ind=(nnx-1)*ny+i;
196     mec(ind,ind-ny)=-atxc; mdc(ind,ind-ny)=atxc;
197     mea(ind,ind-ny)=-atxa; mda(ind,ind-ny)=atxa;
198     meb(ind,ind-ny)=-atxb; mdb(ind,ind-ny)=atxb;
199 end
200
201 aint=(az+a)/2; bint=(bz+b)/2; cint=(c+cz)/2;
202
203 mintae=mea; mintad=mda; mintbe=meb; mintdb=mdb;
204 for j=1:5
205     aint=(az+a)/2; bint=(bz+b)/2; cint=(c+cz)/2;
206     for i=1:nn
207         mintae(i,i)=mea(i,i)+(mua*cint(i)-lba+(aint(i)+roa*bint(i)))*(dt/2);
208         mintad(i,i)=mda(i,i)-(mua*cint(i)-lba+(aint(i)+roa*bint(i)))*(dt/2);
209         mintbe(i,i)=meb(i,i)+(mub*cint(i)-lbb+(bint(i)+rob*aint(i)))*(dt/2);
210         mintbd(i,i)=mdb(i,i)-(mub*cint(i)-lbb+(bint(i)+rob*bint(i)))*(dt/2);
211     end
212
213 %Ativacao e desativacao da fonte
214 if ((it > 15) && (it < 30)) || ((it > 70) && (it < 79))
215     cb=zeros(nn,1);
216 else
217     cb(ic1) = dt*fc1;
218 end
219 c=mec\ (mdc*cz+cb);
220 a=mintae\ (mintad*az+ab);
221 b=mintbe\ (mintbd*bz+bb);
222 end

```

```

223 % visualizacao
224 for i=1:nny;
225     for j=1:nnx
226         ind=(j-1)*nny + i;
227         verc(i,j)=c(ind);
228     end
229 end
230 subplot(1,2,1), contour(verc,12), grid on
231 subplot(1,2,2), surf(verc), grid on
232 pause(0.1)
233 cz=c;
234 az=a;
235 bz=b;
236 end
237 subplot(1,2,1), contour(verc,12), grid on
238 subplot(1,2,2), surf(verc), grid on
239
240 figure(2)
241 for i=1:nny;
242     for j=1:nnx
243         ind=(j-1)*nny + i;
244         vera(i,j)=a(ind);
245     end
246 end
247 surf(vera), grid
248
249 figure(3)
250 for i=1:nny;
251     for j=1:nnx
252         ind=(j-1)*nny + i;
253         verb(i,j)=b(ind);
254     end
255 end
256 surf(verb), grid

```

Referências

- [1] Edelstein-Keshet, Leah *Mathematical models in biology*. SIAM,1988
- [2] Murray, James D *Mathematical biology*. Springer-Verlag, Berlin,1993
- [3] Ruggiero, Márcia A Gomes and Lopes, Vera Lúcia da Rocha *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Makron Books do Brasil,1997
- [4] Guaca, D Cajas and Silva, JC Rubianes and Meyer, JFCA *Método de Diferencias Finitas para a modelagem e simulação da dispersão de poluentes em meios aquáticos*. 2015
- [5] Prestes, Manoel Fernando Biagioni and others *Dispersão de material impactante em meio aquático modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional-Lagoa do Taquaral, Campinas, SP*. 2011