



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



GABRIEL PASSOS

Convergência do algoritmo ADMM e aplicações a problemas estruturados

Campinas
21/08/2020

GABRIEL PASSOS

Convergência do algoritmo ADMM e aplicações a problemas estruturados*

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Dra. Sandra Augusta Santos.

*Este trabalho foi financiado pela FAPESP, processo 2019/15992-5.

Resumo

Este trabalho apresenta tópicos selecionados de análise convexa e regularização e utiliza da teoria dos operadores monótonos para demonstrar a convergência do método ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*). O método ADMM assemelha-se ao método dos multiplicadores, entretanto, por considerar as variáveis de forma particionada e atualizá-las de forma encadeada, como no método de *Gauss-Seidel*, explora convenientemente a estrutura de vários problemas de otimização. Tal característica o destaca em relação a outros métodos, especialmente na solução de problemas de grande porte. O ponto forte do principal resultado de convergência do ADMM apresentado neste trabalho reside no fato de que os subproblemas do método podem ser solucionados de forma inexata, o que permite a abordagem de uma classe ampliada de problemas.

Abstract

This work presents selected topics of convex analysis and regularization and uses the theory of monotonous operators to demonstrate the convergence of the ADMM method (*Alternating Direction Method of Multipliers*). The ADMM method is similar to the multiplier method. However, it considers the variables in a partitioned way, with a chained updating, similar to the Gauss-Seidel method. Moreover, its ability to exploit the structure of several optimization problems has provided a positive contrast among other methods, with special success for solving large scale problems. The strong feature of the main result of ADMM convergence presented in this work lies in the fact that the subproblems that make up the method can be solved in an inaccurate way, which allows the ADMM method to address a larger class of optimization problems.

Lista de Símbolos

$2^{\mathcal{X}}$	Conjunto das partes de \mathcal{X}
$\text{aff}(\mathcal{C})$	Casco afim do conjunto \mathcal{C}
$\mathcal{B}(x, \varepsilon)$	Bola aberta de centro x e raio $\varepsilon > 0$
$\text{Dom}(\mathcal{T})$	Domínio do operador \mathcal{T}
$\text{dom}(f)$	Domínio efetivo da função f
$\text{epi}(f)$	Epígrafo da função f
$\text{Im}(\mathcal{T})$	Imagem do operador \mathcal{T}
\mathcal{L}	Função Lagrangiana
\mathcal{L}_λ	Função Lagrangiana Aumentada
$\ x\ $	Norma-2 usual aplicada ao vetor x
$\ x\ _1$	Norma-1 usual aplicada ao vetor x
$\Phi_{\mathcal{X}}$	Função indicadora do conjunto \mathcal{X}
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno usual
$\text{ri}(\mathcal{C})$	Interior relativo do conjunto \mathcal{C}
$\partial f(x)$	Subdiferencial de f avaliado em x
$f _{\mathcal{X}}$	Função f restrita ao conjunto \mathcal{X}

Sumário

Lista de Símbolos	4
1 Convexidade	6
1.1 Conjuntos Convexos	6
1.1.1 Interior Relativo	8
1.2 Funções Convexas	10
1.2.1 Continuidade das Funções Convexas	13
1.2.2 Operações com Funções Convexas	15
1.2.3 Função Conjugada	21
1.3 Subgradiente e Subdiferencial	22
1.3.1 Cálculo de Subdiferenciais	26
2 Operadores Monótonos	31
2.1 Introdução à Teoria dos Operadores Monótonos	31
2.2 O Operador Subdiferencial	43
2.3 O Método de Ponto Proximal Generalizado	47
2.4 A Decomposição de Douglas-Rachford	51
3 ADMM	57
3.1 Método de Penalização e o Lagrangiano Aumentado	57
3.2 O Método ADMM	65
3.3 Uma Generalização do ADMM	73
3.4 Estruturas Adequadas ao ADMM	95
3.5 Aplicações a Problemas Estruturados	98
3.5.1 Problema de Busca de Base	99
3.5.2 Problema LASSO	100
3.5.3 Problema LASSO Generalizado	101
4 Apêndice	103

1 Convexidade

Iniciaremos as discussões apresentando alguns conceitos fundamentais em análise convexa. A análise convexa permeia grande parte da teoria de otimização, onde conceitos de conjuntos e funções convexas são fundamentais no desenvolvimento e demonstração de teoremas importantíssimos, tanto para a formação da base teórica da otimização quanto para aplicações em problemas reais, como os teoremas da dualidade forte e os demais teoremas associados à dualidade.

Nesse trabalho, a convexidade desempenha um papel fundamental pois é ela que permite criar uma ponte entre a otimização e a teoria dos operadores monótonos, que é a principal ferramenta utilizada na demonstração da convergência da versão generalizada do algoritmo ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*) proposta por esse trabalho. Tendo isso em vista, é imprescindível introduzir alguns conceitos e resultados básicos em análise convexa.

As definições e resultados apresentados nessa seção podem ser encontrados em diversos textos de análise convexa e até mesmo em textos de otimização, entretanto, destacamos aqui as referências [4, 6, 10, 12] para o estudo de conjuntos convexas e funções convexas, além de [3] para o tratamento de subgradientes e subdiferenciais. Iniciamos a Seção 1.1 definindo os conjuntos convexas e introduzimos o conceito de interior relativo. Na Seção 1.2 definimos e caracterizamos as funções convexas, em especial, as funções convexas nos reais estendidos. Apresentamos também algumas operações com funções convexas que preservam algumas das propriedades fundamentais dessa classe de funções. Na Seção 1.2.3 definimos a função conjugada, que possui propriedades muito interessantes e tem papel importante na teoria da dualidade. Por fim, na Seção 1.3 apresentamos os subgradientes e os subdiferenciais, algumas de suas propriedades e, finalmente, algumas regras para o cálculo de subdiferenciais.

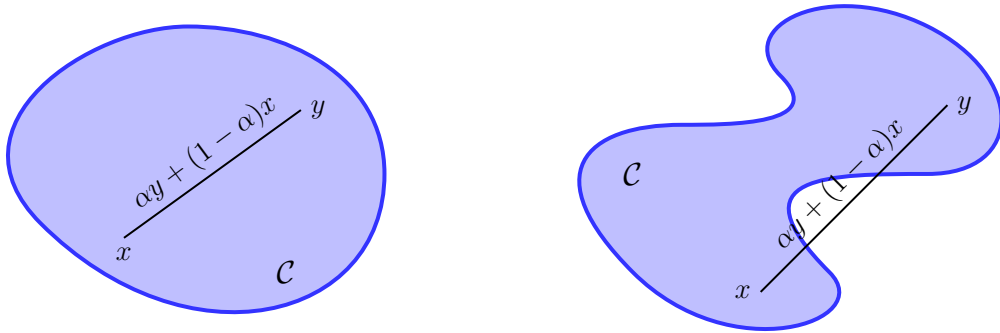
1.1 Conjuntos Convexos

Começamos o estudo da convexidade definindo os conjuntos convexas, que formam uma das principais bases de toda a análise convexa. Um tratamento bem mais completo sobre esse assunto pode ser encontrado em [4, 12].

Definição 1.1.1 (Conjunto Convexo). Um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se

$$\alpha y + (1 - \alpha)x \in \mathcal{C}, \quad \forall x, y \in \mathcal{C}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Para manter a consistência dos resultados, é conveniente adotar a convenção de que o conjunto vazio é um conjunto convexo. Na Figura 1 são representados um conjunto convexo e um conjunto não convexo.



(a) Representação de um conjunto convexo \mathcal{C} . (b) Representação de um conjunto não convexo \mathcal{C} .

Figura 1: Para que um conjunto \mathcal{C} seja convexo, é necessário que o segmento de reta que liga x a y esteja contido em \mathcal{C} para todos $x, y \in \mathcal{C}$.

A seguir, apresentamos um resultado que estabelece algumas operações em conjuntos que preservam a convexidade.

Proposição 1.1.1. *São válidas as seguintes propriedades:*

- a) *Seja I um conjunto qualquer de índices e considere $\mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}^n$ convexo para todo $i \in I$, então, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ é um conjunto convexo.*
- b) *Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são conjuntos convexas, então, a soma[†] $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ é um conjunto convexo.*
- c) *Se \mathcal{C} é um conjunto convexo, então, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ o produto por escalar[‡] $\lambda\mathcal{C}$ é um conjunto convexo. Ainda, se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, então,*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathcal{C} = \lambda_1\mathcal{C} + \lambda_2\mathcal{C}.$$

[†]Para definição de $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, veja a Definição 4.0.2

[‡]Para definição de $\lambda\mathcal{C}$, veja a Definição 4.0.3

- d) Se \mathcal{C} é conjunto convexo, então, o fecho e o interior de \mathcal{C} são conjuntos convexos.
- e) A imagem e a imagem inversa de um conjunto convexo por uma função afim são conjuntos convexos.

Demonstração. Essa demonstração resulta da aplicação direta da definição de conjunto convexo. Para detalhes, veja [4, Proposição 1.1.1]. ■

1.1.1 Interior Relativo

Essa seção está dedicada ao estudo de uma propriedade topológica dos conjuntos convexos fundamental para o desenvolvimento desse trabalho. Para um tratamento mais amplo sobre a topologia dos conjuntos convexos, veja [4, 12].

Iniciamos apresentando o conceito de conjunto afim. Dizemos que um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto afim se existe um subespaço vetorial \mathcal{V} do \mathbb{R}^n e um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que seja válida a soma[§] $\mathcal{A} = x + \mathcal{V}$. Agora, considere um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Definimos o casco afim de \mathcal{C} como a intersecção de todos os conjuntos afins que contêm \mathcal{C} e o denotamos por $\text{aff}(\mathcal{C})$. Analogamente, é possível definir $\text{aff}(\mathcal{C})$ como o menor conjunto afim que contém \mathcal{C} . O casco afim de um conjunto \mathcal{C} formado por dois pontos está representado na Figura 2.

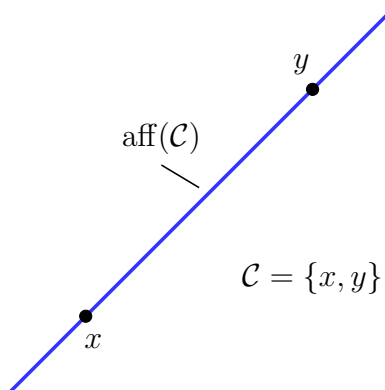
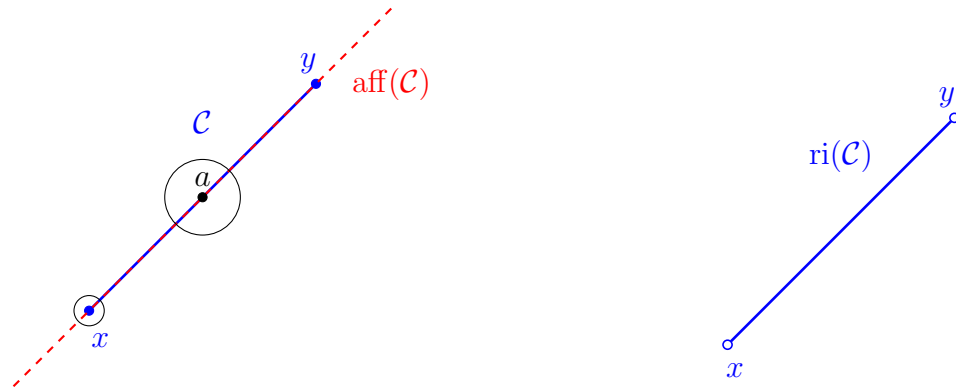


Figura 2: Representação do casco afim de um conjunto \mathcal{C} formado por dois pontos. Nesse caso, $\text{aff}(\mathcal{C})$ é a reta, destacada em azul, que passa por x e y .

Agora, estamos prontos para definir o conceito de ponto interior relativo.

[§]Para definição da operação $x + \mathcal{V}$, veja Definição 4.0.4



(a) Nesse caso, temos que $a \in \text{ri}(\mathcal{C})$. Vemos também que $x \notin \text{ri}(\mathcal{C})$. (b) O interior relativo do segmento de reta que liga x a y .

Figura 3: Representação das definições de ponto interior relativo e de interior relativo de um conjunto \mathcal{C} dado pelo segmento de reta que liga x a y .

Definição 1.1.2 (Ponto Interior Relativo). Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Dizemos que $x \in \mathcal{C}$ é um ponto interior relativo de \mathcal{C} se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap \text{aff}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}.$$

Na definição anterior, $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ representa a bola aberta[¶] de centro x e raio ε . Na Figura 3a, a é um ponto interior relativo ao conjunto \mathcal{C} , mas x e y não o são.

Definimos agora o interior relativo de um conjunto, ilustrado na Figura 3.

Definição 1.1.3 (Interior Relativo). Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Definimos o interior relativo de \mathcal{C} como o conjunto dado pela reunião de todos os pontos interiores relativos a \mathcal{C} e o denotamos por $\text{ri}(\mathcal{C})$.

Veja que um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ convexo e não vazio pode possuir *interior* vazio, entretanto, se olharmos para o interior relativo, veremos que ele sempre será não vazio. Essa propriedade será importante no desenvolvimento das próximas etapas deste trabalho e será enunciada a seguir.

Proposição 1.1.2. *Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e não vazio, então, $\text{ri}(\mathcal{C})$ é convexo e não vazio.*

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.3.2] ■

[¶]Para definição de bola aberta, veja Definição 4.0.1

1.2 Funções Convexas

Iniciaremos agora os estudos de uma pequena parcela da teoria que envolve as funções convexas. Nessa seção, trabalharemos principalmente com as funções convexas reais estendidas, isto é, trabalharemos com funções que podem assumir os valores $+\infty$ e $-\infty$. Essa classe de funções desempenha um papel muito importante em otimização, principalmente quando tratamos de dualidade.

Definição 1.2.1. Considere o conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ convexo e não vazio. Uma função $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x), \quad \forall x, y \in \mathcal{C}, \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (1)$$

Essa definição, ilustrada na Figura 4, é a mais utilizada para definir funções convexas. Entretanto, o problema central dessa definição ocorre quando há a necessidade de trabalharmos com funções reais estendidas, o que é algo frequente quando se fala em problemas convexos de otimização. De fato, ao trabalharmos com os reais estendidos, os termos na desigualdade (1) podem assumir valores infinitos e eventualmente a soma indefinida $+\infty - \infty$ pode vir a ocorrer. Dessa forma, devemos caracterizar as funções convexas reais estendidas de uma maneira mais conveniente. Apresentaremos a seguir algumas definições que nos permitirão tal caracterização. Ressaltamos que se f não assumir algum dos valores $+\infty$ ou $-\infty$, a definição usual dada em (1) é suficiente, já que a soma indefinida $+\infty - \infty$ não irá ocorrer.

Definição 1.2.2 (Epígrafo). Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio e $f : \mathcal{C} \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Definimos o epígrafo de f como o conjunto

$$\text{epi}(f) := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{C}, \xi \in \mathbb{R}, f(x) \leq \xi\}.$$

O epígrafo de uma função, ilustrada na Figura 5, é um conjunto especial quando falamos em funções convexas. Primeiramente, a convexidade de funções reais estendidas será definida em termos de seu epígrafo e ainda, como veremos mais adiante, ele pode revelar algumas propriedades importantes de sua função associada.

Definiremos agora o domínio efetivo de uma função.

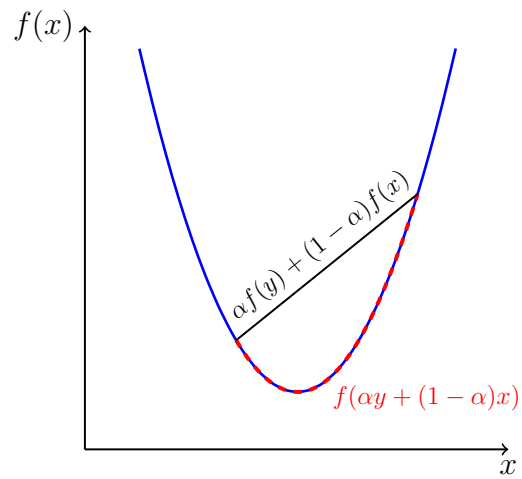


Figura 4: Representação da definição de uma função convexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

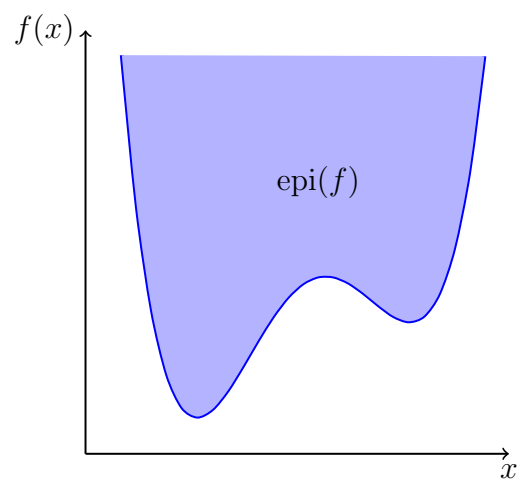


Figura 5: Representação do epígrafo de uma função f .

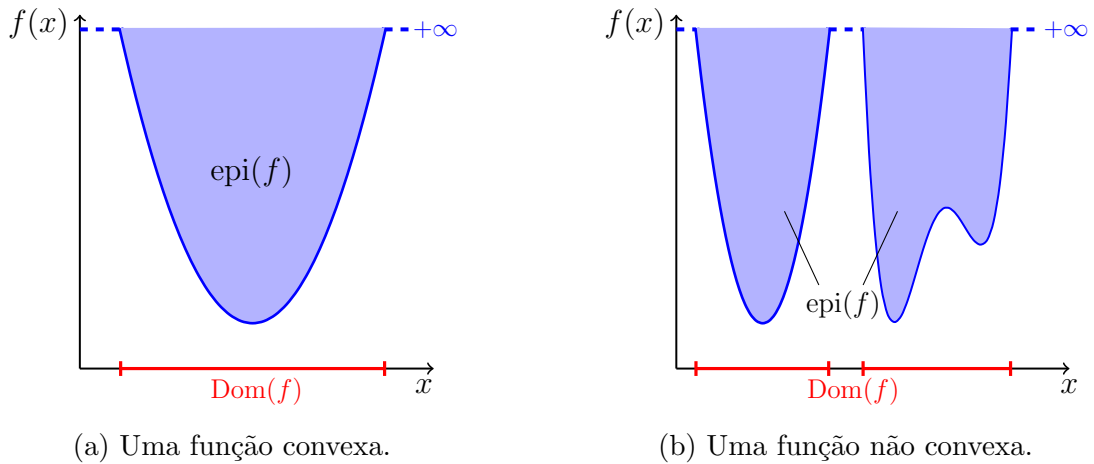


Figura 6: Representação de funções convexas e não convexas segundo a Definição 1.2.4. Os domínios efetivos das funções representadas estão destacados em vermelho.

Definição 1.2.3 (Domínio Efetivo). Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathcal{C} \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Definimos o domínio efetivo de f como o conjunto

$$\text{dom}(f) := \{x \in \mathcal{C} \mid f(x) < +\infty\}.$$

Observe que o domínio efetivo de uma função f pode ser descrito em termos do epígrafo de f . De fato, mostra-se que o domínio efetivo de uma função é dado pela projeção do epígrafo no \mathbb{R}^n .

A seguir, apresentamos uma definição de função convexa aplicável às funções reais estendidas.

Definição 1.2.4 (Função Convexa). Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio e $f : \mathcal{C} \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Dizemos que f é uma função convexa se $\text{epi}(f)$ é um conjunto convexo.

A definição de função convexa via epígrafo está ilustrada na Figura 6. Mostra-se que essa definição é equivalente à Definição 1.2.1 quando f não assume valores infinitos. Mostra-se também que a desigualdade presente em (1) é válida para funções convexas estendidas para todo $\alpha \in [0, 1]$ se tivermos $x, y \in \text{dom}(f)$.

Dessa definição também é possível extrair alguns resultados clássicos das funções convexas de forma direta, como a convexidade dos conjuntos de nível L_γ de f para qualquer γ e a convexidade do domínio efetivo de f [4].

Agora, trataremos alguns casos degenerados de funções convexas. O primeiro

deles ocorre quando f assume o valor $+\infty$ para todo ponto em seu domínio, isto é, temos que f possui domínio efetivo vazio. O segundo ocorre quando f assume em ao menos um ponto de seu domínio o valor $-\infty$. Veja que neste caso, f é convexa se, e somente se, f é idêntica a $-\infty$ em todo o seu domínio efetivo, o que certamente não nos interessa já que as funções convexas são um dos nossos focos para minimização. Para evitar esses dois casos degenerados, iremos definir o conceito de função própria.

Definição 1.2.5 (Função Própria). Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio e $f : \mathcal{C} \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Dizemos que f é própria se $\text{dom}(f)$ é não vazio e ainda $f(x) > -\infty$ para todo $x \in \mathcal{C}$.

Ressaltamos que se uma função é própria, existe ao menos um $x \in \mathcal{C}$ tal que $-\infty < f(x) < +\infty$. Agora, definiremos, no contexto de análise convexa, o que vem a ser uma função fechada.

Definição 1.2.6 (Função Fechada). Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio e $f : \mathcal{C} \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Dizemos que f é uma função fechada se $\text{epi}(f)$ é um conjunto fechado.

1.2.1 Continuidade das Funções Convexas

Um resultado bem conhecido em análise convexa estabelece a continuidade de funções convexas reais, entretanto, quando trabalhamos com funções reais estendidas perdemos a noção clássica de continuidade. Devemos então utilizar de outra ferramenta que possa ser de fato aplicada às funções reais estendidas e que tenha propriedades vantajosas. Definimos a seguir o conceito de semicontinuidade inferior.

Definição 1.2.7 (Semicontinuidade Inferior Pontual). Considere $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio e $f : \mathcal{C} \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Diremos que f é inferiormente semicontínua em $x \in \mathcal{C}$ se para toda sequência (x^k) de elementos de \mathcal{C} tal que $x^k \rightarrow x$, tem-se que

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k).$$

Diremos que f é inferiormente semicontínua se f é inferiormente semicontínua em todo $x \in \mathcal{C}$. O resultado que será apresentado a seguir estabelece a equivalência

de algumas propriedades de funções reais estendidas (não necessariamente convexas), em especial, veremos que uma função é fechada se, e somente se, é inferiormente semicontínua.

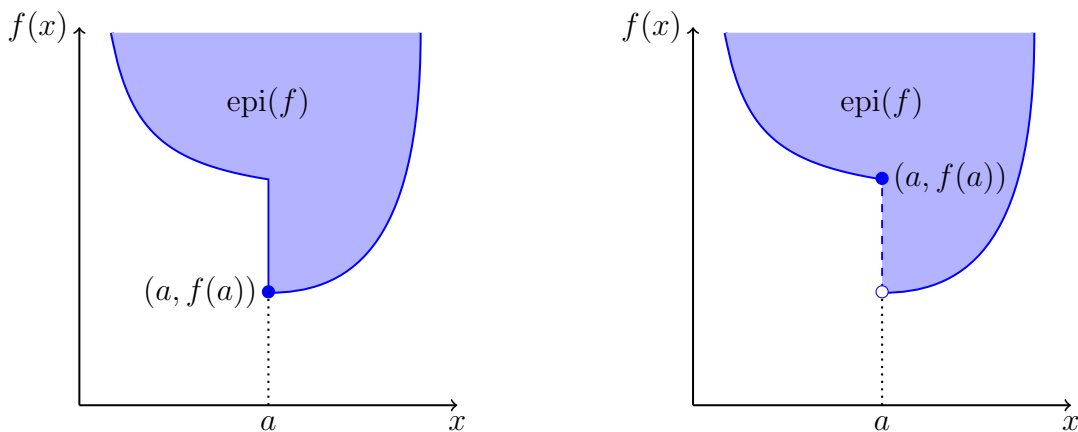
Proposição 1.2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$, então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) O conjunto de nível $L_\gamma := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \gamma\}$ é fechado para todo γ .
- b) f é inferiormente semicontínua.
- c) $\text{epi}(f)$ é um conjunto fechado.

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.1.2]. ■

A relação entre semicontinuidade inferior e epígrafo fechado obtida nesse resultado é ilustrada na Figura 7. Observe que não foram feitas hipóteses sobre f , como por exemplo, de que f é função convexa ou própria. Esse resultado é fundamental no estudo de operações com funções convexas e nos permitira demonstrar, por exemplo, que a soma de funções convexas fechadas resulta em uma função convexa fechada.

A seguir, apresentamos o já mencionado resultado clássico de continuidade de funções convexas reais.



- (a) A função f é inferiormente semicontínua em a .
- (b) A função f não é inferiormente semicontínua em a .

Figura 7: Em (a), temos uma função inferiormente semicontínua cujo epígrafo é fechado. Em (b), a função exibida não possui epígrafo fechado e não é semicontínua inferiormente em a .

Proposição 1.2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, então, f é contínua. Ainda, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é uma função própria, então, $f|_{\text{dom}(f)}$ é contínua em $\text{ri}(\text{dom}(f))$.*

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.3.11]. ■

1.2.2 Operações com Funções Convexas

Os resultados apresentados nessa seção estabelecem propriedades associadas a algumas operações entre funções. Essas propriedades serão fundamentais para avaliar, por exemplo, a convexidade de uma função dada pela soma de funções convexas. Todos os resultados e demonstrações contidos nessa seção foram obtidos de [4]. Iniciamos a sequência de propriedades de operações apresentando um resultado sobre a composição de uma função real estendida com uma transformação linear qualquer.

Proposição 1.2.3 (Composição com Transformação Linear). *Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ e considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Considere também a função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ dada por*

$$h(x) := f(Ax).$$

Dessa forma, valem as seguintes afirmações:

- a)** *Se f é convexa, então, h é convexa.*
- b)** *Se f é fechada, então, h é fechada.*

Demonstração. Suponha que f é uma função convexa, então, como por hipótese f não assume o valor $-\infty$, temos que para todos $v, w \in \mathbb{R}^m$, vale que

$$f(\alpha w + (1 - \alpha)v) \leq \alpha f(w) + (1 - \alpha)f(v), \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (2)$$

Agora, tome $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0, 1]$, então,

$$\begin{aligned} h(\alpha y + (1 - \alpha)x) &= f(A(\alpha y + (1 - \alpha)x)) \\ &= f(\alpha Ay + (1 - \alpha)Ax). \end{aligned}$$

Aplicando (2), obtemos para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h(\alpha y + (1 - \alpha)x) &= f(\alpha Ay + (1 - \alpha)Ax) \\ &\leq \alpha f(Ay) + (1 - \alpha)f(Ax) \\ &\leq \alpha h(y) + (1 - \alpha)h(x). \end{aligned}$$

Provamos então que h é função convexa. Agora, mostraremos que se f é fechada, então h também é fechada.

Suponha que f é fechada. Então, pela Proposição 1.2.1 temos que f é inferiormente semicontínua, isto é, vale para todo $v \in \mathbb{R}^m$ e para toda sequência (v^k) tal que $v^k \rightarrow v$ a desigualdade

$$f(v) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(v^k).$$

Agora, tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ e uma sequência qualquer (x^k) tal que $x^k \rightarrow x$. Pela continuidade das transformações lineares, temos que $Ax^k \rightarrow Ax$ portanto, fazendo $v = Ax$ e $v^k = Ax^k$, pela propriedade de semicontinuidade inferior de f , temos que

$$h(x) = f(Ax) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(Ax^k) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} h(x^k).$$

Logo, concluímos que h é inferiormente semicontínua, e portanto, aplicando novamente a Proposição 1.2.1, temos que h é fechada. ■

Observe que pela definição de h no resultado anterior, temos que

$$\text{dom}(h) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in \text{dom}(f)\}.$$

Com base na definição do domínio efetivo de h , nota-se que não é possível garantir que h seja própria, mesmo que f o seja. De fato, observe que sem algum tipo de hipótese sobre a matriz A , como por exemplo a de que A possui posto linha completo, não garantimos que a imagem de A tenha algum elemento em $\text{dom}(f)$. De fato, suponha $f : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função própria e seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz com posto linha completo. Pela hipótese no posto linha de A , temos que sua imagem é o próprio \mathbb{R}^m , portanto, deve existir algum $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \in \text{dom}(f)$. Esse resultado está resumido no lema apresentado a seguir.

Lema 1.2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função própria e considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto linha completo. Então, a função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$, dada por*

$$h(x) := f(Ax),$$

é uma função própria.

Observe que esse mesmo fenômeno não pode ser observado se A possuir somente posto coluna completo. De fato, seja $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e considere o conjunto $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathcal{Y} := \{(0, 0, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma > 0\}.$$

Nesse caso, a composição da função indicadora^{||} do conjunto \mathcal{Y} com a transformação linear definida pela matriz A resulta em uma função imprópria. De fato, temos Ax na forma $(a, b, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como $(a, b, 0) \notin \mathcal{Y}$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$, então,

$$\Phi_{\mathcal{Y}}(Ax) = +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Note que esse exemplo não contradiz o Lema 1.2.1 pois A não possui posto linha completo.

A seguir, apresentamos uma propriedade associada à soma de funções reais estendidas.

Proposição 1.2.4. *Sejam $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$, $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ funções e $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ escalares. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ definida por*

$$f(x) := \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x).$$

Dessa forma, valem as seguintes afirmações:

^{||}Para definição de função indicadora, veja a Definição 4.0.6

a) Se f_1 e f_2 são convexas, então, f é convexa.

b) Se f_1 e f_2 são fechadas, então, f é fechada.

Demonstração. Para mostrar esse resultado, iremos proceder como no resultado anterior. Suponha que $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ e que $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sejam convexas. Então, como por hipótese f_1 e f_2 não assumem o valor $-\infty$, temos que para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$ vale que

$$\begin{aligned} f_1(\alpha y + (1 - \alpha)x) &\leq \alpha f_1(y) + (1 - \alpha)f_1(x), \\ f_2(\alpha y + (1 - \alpha)x) &\leq \alpha f_2(y) + (1 - \alpha)f_2(x). \end{aligned}$$

Agora, tomemos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0, 1]$. Utilizando a definição de f e aplicando a propriedade de convexidade das funções f_1 e f_2 , obtemos:

$$\begin{aligned} f(\alpha y + (1 - \alpha)x) &= \lambda_1 f_1(\alpha y + (1 - \alpha)x) + \lambda_2 f_2(\alpha y + (1 - \alpha)x) \\ &\leq \lambda_1(\alpha f_1(y) + (1 - \alpha)f_1(x)) + \lambda_2(\alpha f_2(y) + (1 - \alpha)f_2(x)) \\ &= \alpha(\lambda_1 f_1(y) + \lambda_2 f_2(y)) + (1 - \alpha)(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \\ &= \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x). \end{aligned}$$

Mostramos então que f é convexa. Agora, mostraremos que se f_1 e f_2 são fechadas, então, f também é fechada.

Suponha que f_1 e f_2 são funções fechadas. Considere $x \in \mathbb{R}^n$ e tome também uma sequência (x^k) de elementos em \mathbb{R}^n tal que $x^k \rightarrow x$. Como f_1 e f_2 são fechadas, pela Proposição 1.2.1, valem as desigualdades

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_1(x^k), \\ f_2(x) &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_2(x^k). \end{aligned}$$

Como temos $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, vale que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \leq \lambda_1 \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_1(x^k) + \lambda_2 \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_2(x^k) \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} \lambda_1 f_1(x^k) + \liminf_{k \rightarrow +\infty} \lambda_2 f_2(x^k). \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 4.0.1 ao lado direito da última igualdade, chega-se em

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \lambda_1 f_1(x^k) + \liminf_{k \rightarrow +\infty} \lambda_2 f_2(x^k) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} (\lambda_1 f_1(x^k) + \lambda_2 f_2(x^k)) \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x^k). \end{aligned}$$

Dessa forma, com a relação anterior, concluímos que f é inferiormente semicontínua e portanto, temos pela Proposição 1.2.1 que f é uma função fechada. ■

Note que na Proposição 1.2.4 as funções f_1 e f_2 não assumem o valor $-\infty$, nesse caso, a soma indefinida $+\infty - \infty$ não ocorre. Observe também que $f(x) = +\infty$ se, e somente se, $f_1(x) = +\infty$ ou $f_2(x) = +\infty$, dessa forma, temos que

$$\text{dom}(f) = \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2).$$

Note que sem alguma hipótese adicional feita sobre f_1 e f_2 , não é possível garantir que f é uma função própria. Apresentamos agora um resultado sobre o supremo de uma coleção qualquer de funções.

Proposição 1.2.5. *Considere as funções $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ para todo $i \in I$, em que I é um conjunto qualquer de índices. Considere também $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) := \sup_{i \in I} f_i(x).$$

Dessa forma, valem as seguintes afirmações

- a)** *Se f_i é convexa para todo $i \in I$, então, f é convexa.*
- b)** *Se f_i é fechada para todo $i \in I$, então, f é fechada.*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [4, Proposição 1.1.6], entretanto, a explicitaremos aqui pelo fato de que ela nos revela que eventualmente é mais fácil trabalharmos com a Definição 1.2.4, mesmo quando podemos utilizar da Definição 1.2.1.

Como um resultado preliminar, mostraremos que

$$\text{epi}(f) = \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i).$$

De fato, tome $(x, \xi) \in \text{epi}(f)$. Temos então que $f(x) \leq \xi$, portanto, pela definição de f , temos que $\sup_{i \in I} f_i(x) \leq \xi$, que por sua vez, implica que $f_i(x) \leq \xi$ para todo $i \in I$. Assim, temos que $(x, \xi) \in \text{epi}(f_i)$ para todo $i \in I$ e portanto conclui-se que $\text{epi}(f) \subset \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$.

Agora, tomemos $(x, \xi) \in \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$, logo, temos que para todo $i \in I$ vale que $f_i(x) \leq \xi$, portanto,

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \leq \xi.$$

Concluimos então que $(x, \xi) \in \text{epi}(f)$, logo, $\bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i) \subset \text{epi}(f)$ e portanto $\text{epi}(f) = \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$.

Agora observe que se f_i é convexa para todo $i \in I$, então, $\text{epi}(f_i)$ é por definição um conjunto convexo para todo $i \in I$, logo, pela Proposição 1.1.1(a), temos que $\text{epi}(f)$ é um conjunto convexo, e portanto, f é convexa.

Procedendo de forma análoga, suponha que f_i é fechada para todo $i \in I$. Dessa forma, temos que $\text{epi}(f_i)$ é um conjunto fechado para todo $i \in I$. Logo, como a intersecção qualquer de conjuntos fechados define um conjunto fechado, temos que $\text{epi}(f)$ é um conjunto fechado, que por sua vez, implica que f é fechada. ■

Veja novamente que supor f_i própria para todo $i \in I$ não é suficiente para garantir que f é própria. De fato, observe que mesmo com f_i finita em \mathbb{R}^n para todo $i \in I$, o supremo que define f pode ser infinito positivo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, considere as funções $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_i(x) := (ix)^2 + i.$$

Observe que f_i é convexa para todo $i \in \mathbb{N}$ e que $f_i(x) \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e para todo

$x \in \mathbb{R}$, entretanto,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) = +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esses fatos são evidenciados na Figura 8, onde o comportamento das funções f_i é exibido para $i = 1, 2, 3$.

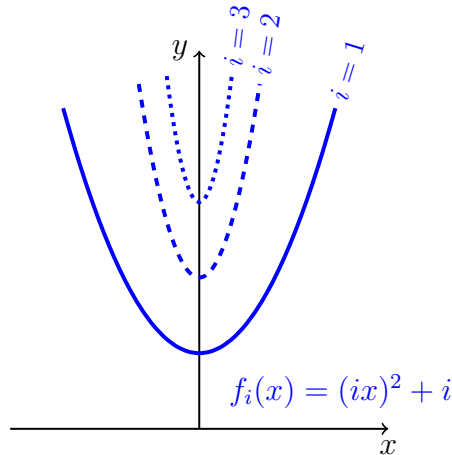


Figura 8: Gráfico das funções $f_i(x) = (ix)^2 + i$ para $i = 1, 2, 3$.

1.2.3 Função Conjugada

Iniciaremos agora o estudo das funções conjugadas. Essas funções possuem propriedades muito relevantes e são especialmente úteis em otimização quando falamos sobre dualidade.

Definição 1.2.8 (Função Conjugada). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$. A função conjugada de f , denotada por f^* , é definida por

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}.$$

A seguir, apresentamos a primeira propriedade das funções conjugadas.

Proposição 1.2.6. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$, então, f^* é uma função convexa e fechada.*

Demonstração. Considere $f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$ definida por

$$f_x(y) := \langle x, y \rangle - f(x).$$

Podemos então descrever f^* da forma

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f_x(y)$$

Note que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $f_x(y)$ é uma função convexa e fechada, logo, aplicando a Proposição 1.2.5, temos que f^* é uma função convexa e fechada. ■

Note que f^* é fechada e convexa mesmo que f não o seja. Entretanto, não é possível obter esse mesmo tipo de relação para garantir que f^* é própria. Veremos a seguir que a hipótese que falta para que f^* seja uma função própria, é a hipótese de convexidade. De fato, os próximos resultados revelam que f e f^* se relacionam de uma forma especial sob hipóteses de convexidade.

Proposição 1.2.7. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e fechada. Então, f^* é também convexa, própria e fechada.*

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.6.1]. ■

Proposição 1.2.8. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$ e considere as funções conjugadas f^* e f^{**} , em que f^{**} denota a conjugada de f^* . Então,*

$$f(x) \geq f^{**}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

*Ainda, se f é convexa, própria e fechada, então, $f(x) = f^{**}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.6.1]. ■

1.3 Subgradiente e Subdiferencial

Nessa seção apresentamos os conceitos de subgradiente e de subdiferencial. Veremos que quando falamos de funções convexas, o subdiferencial permite uma extensão do conceito de gradiente para funções que não são suaves, portanto, subgradientes e subdiferenciais são ferramentas poderosas.

Definição 1.3.1 (Subgradiente). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função própria. Dizemos*

que $u \in \mathbb{R}^n$ é um subgradiente de f em $x \in \text{dom}(f)$ se

$$f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Se olharmos somente para a desigualdade em (3), vemos que não há sentido calcular subgradientes em pontos $x \in \text{dom}(f)$ tais que $f(x) = -\infty$. De fato, se $x \in \text{dom}(f)$ tal que $f(x) = -\infty$, temos que (3) é válida para todo $u \in \mathbb{R}^n$, o que não nos traz informação alguma sobre o comportamento de f . Agora, sobre as hipóteses da definição de subgradiente, veja que se f não é própria, já que $f(x) > -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos então que $\text{dom}(f)$ é vazio. Portanto, a única possibilidade para f nesse caso é a de que $f(x) = +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, logo, não perdemos muita generalidade ao pedir que f seja própria. Agora, observe que se $x \notin \text{dom}(f)$, então, como $\text{dom}(f)$ é por hipótese não vazio, temos que para todo $u \in \mathbb{R}^n$ a desigualdade em (3) não se verifica, portanto, precisamos de $x \in \text{dom}(f)$ para que a definição fique consistente.

Seguimos agora para a definição de subdiferencial.

Definição 1.3.2 (Subdiferencial). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função própria. O subdiferencial de f em um ponto $x \in \text{dom}(f)$, denotado por $\partial f(x)$, é o conjunto de todos os subgradientes de f em x , isto é,

$$\partial f(x) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Observe que não definimos o subdiferencial e nem subgradiente para pontos que não estão no domínio efetivo de f . Dessa forma, adotaremos a convenção de que se $x \notin \text{dom}(f)$, então, o subdiferencial de f em x é vazio. Ressaltamos que essa convenção não é contraditória em relação à definição de subdiferencial. De fato, note que se f é uma função própria e se $x \notin \text{dom}(f)$, temos que para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$, a desigualdade em (3) não é válida para $y \in \text{dom}(f)$, logo, não deve existir subgradiente em pontos que não pertencem ao domínio efetivo.

Diremos que f é subdiferenciável em x se $\partial f(x) \neq \emptyset$. Diremos também que f é subdiferenciável se f for subdiferenciável em todo ponto de seu domínio efetivo.

A seguir, apresentamos algumas características do conjunto subdiferencial.

Proposição 1.3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função própria. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se que $\partial f(x)$ é um conjunto convexo e fechado.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e considere o conjunto $\mathcal{C}_y \subset \mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathcal{C}_y := \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Para um dado $y \in \mathbb{R}^n$, como temos x fixo, os termos $f(x)$, $f(y)$ e o vetor $y - x$ estão determinados. Então, a desigualdade $f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle$ que define o conjunto \mathcal{C}_y determina um semi-espaço, isto é, temos que para todo $y \in \mathbb{R}^n$, \mathcal{C}_y é um semi-espaço, e portanto, \mathcal{C}_y é um conjunto convexo e fechado.

Agora, note que

$$\partial f(x) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}_y.$$

Como a intersecção qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado e pela Proposição 1.1.1(a), temos que a intersecção qualquer de conjuntos convexos é um conjunto convexo, conclui-se que $\partial f(x)$ é um conjunto convexo e fechado para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Os resultados que vêm a seguir estabelece uma relação entre subdiferenciabilidade e convexidade. Em resumo, veremos que funções subdiferenciáveis cujo domínio efetivo é convexo são funções convexas.

Proposição 1.3.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função própria e suponha que $\text{dom}(f)$ seja um conjunto convexo. Se $\partial f(x)$ é um conjunto não vazio para todo $x \in \text{dom}(f)$, então, f é uma função convexa.*

Demonstração. Veja [3, Lema 3.11]. ■

Proposição 1.3.3. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e própria. Nesse caso, se $x \in \text{int}(\text{dom}(f))$, então, $\partial f(x)$ é um conjunto não vazio e limitado.*

Demonstração. Veja [3, Teorema 3.14] ■

Um corolário pode ser derivado de forma direta da proposição anterior ao assumirmos que f assume valores reais.

Corolário 1.3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e própria. Então f é subdiferenciável.*

É possível obter um resultado muito semelhante ao da Proposição 1.3.3, mas com $\text{ri}(\text{dom}(f))$ ao invés de $\text{int}(\text{dom}(f))$.

Proposição 1.3.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e própria. Nesse caso, se $x \in \text{ri}(\text{dom}(f))$, então, $\partial f(x)$ é um conjunto não vazio.*

Demonstração. Veja [12, Teorema 23.4]. ■

Observe que na Proposição 1.3.4 ocorre um enfraquecimento das hipóteses em relação à Proposição 1.3.3. Dessa forma, é natural perder um pouco da riqueza do resultado; nesse caso, perdemos a limitação do conjunto subdiferencial.

A seguir, apresentamos o resultado que caracteriza o subdiferencial de funções convexas e próprias como uma generalização do gradiente de funções convexas, próprias e diferenciáveis.

Proposição 1.3.5. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e própria e considere $x \in \text{int}(\text{dom}(f))$. Nesse caso, se f é diferenciável em x , então*

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

Ainda, se $\partial f(x)$ é formado somente por um elemento, então, f é diferenciável em x e portanto, $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Demonstração. Veja [3, Teorema 3.33]. ■

O resultado anterior estabelece que, quando tratamos de funções convexas e próprias, temos o subdiferencial como uma generalização do gradiente de funções diferenciáveis. Esse fato faz do subdiferencial uma ferramenta muito potente, nos permitindo trabalhar com uma classe mais geral de problemas e trazer grande parte dos resultados para os casos em que tem-se funções diferenciáveis.

1.3.1 Cálculo de Subdiferenciais

A seguir, apresentaremos alguns dos principais resultados relacionados ao cálculo de subdiferenciais. Resultados adicionais podem ser encontrados em [3].

Proposição 1.3.6 (Produto por Escalar). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função própria e considere $\lambda > 0$. Então, para qualquer $x \in \text{dom}(f)$, tem-se que*

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} u \in \partial(\lambda f)(x) &\Leftrightarrow \lambda f(y) \geq \lambda f(x) + \langle u, x - y \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \frac{1}{\lambda} \langle u, x - y \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \left\langle \frac{1}{\lambda} u, x - y \right\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} u \in \partial f(x) \\ &\Leftrightarrow u \in \lambda \partial f(x). \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

■

Proposição 1.3.7 (Soma). *Sejam $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$, $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ funções convexas e próprias, então, se $x \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$, temos que*

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) \subseteq \partial(f_1 + f_2)(x).$$

Ainda, se $\text{ri}(\text{dom}(f_1)) \cap \text{ri}(\text{dom}(f_2))$ é um conjunto não vazio, então,

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $x \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$ e considere $u \in \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$. Pela definição

da soma de conjuntos**, devem existir $v \in \partial f_1(x)$ e $w \in \partial f_2(x)$ tais que

$$u = v + w.$$

Além disso, como $v \in \partial f_1(x)$ e $w \in \partial f_2(x)$, temos que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ valem as seguintes desigualdades:

$$f_1(y) \geq f_1(x) + \langle v, y - x \rangle,$$

$$f_2(y) \geq f_2(x) + \langle w, y - x \rangle.$$

Somando as duas desigualdades anteriores e ajustando o produto interno, obtemos que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ vale a desigualdade

$$f_1(y) + f_2(y) \geq f_1(x) + f_2(x) + \langle v + w, y - x \rangle.$$

Conclui-se então que

$$u = v + w \in \partial(f_1 + f_2)(x).$$

A demonstração do fato de que $\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$ se $\text{ri}(\text{dom}(f_1)) \cap \text{ri}(\text{dom}(f_2))$ é não vazio pode ser encontrada em [12, Teorema 23.8]. ■

Podemos estender o teorema anterior e trabalharmos com somas finitas de funções. Esse resultado está no corolário apresentado a seguir.

Corolário 1.3.2. *Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ funções convexas e próprias com $i = 1, \dots, m$. Então, se $x \in \bigcap_{i=1}^m \text{dom}(f_i)$, temos que*

$$\sum_{i=1}^m \partial f_i(x) \subseteq \partial\left(\sum_{i=1}^m f_i(x)\right).$$

Ainda, se $\bigcap_{i=1}^m \text{ri}(\text{dom}(f_i))$ é um conjunto não vazio, então, vale a igualdade

$$\sum_{i=1}^m \partial f_i(x) = \partial\left(\sum_{i=1}^m f_i(x)\right).$$

**Para definição da soma de conjuntos, veja a Definição 4.0.2

Proposição 1.3.8 (Composição com Transformação Linear). *Considere uma função $f : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa e própria e A uma matriz tal que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Considere também a função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ definida por*

$$h(x) := f(Ax).$$

Se $\text{dom}(h)$ é um conjunto não vazio, então, tem-se que^{††}

$$A^t(\partial f(Ax)) \subseteq \partial h(x), \quad \forall x \in \text{dom}(h).$$

Ainda, se $x \in \text{int}(\text{dom}(h))$ e $Ax \in \text{int}(\text{dom}(f))$, tem-se que

$$\partial h(x) = A^t(\partial f(Ax)).$$

Demonstração. Observe primeiramente que

$$\text{dom}(h) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in \text{dom}(f)\}.$$

Tome $x \in \text{dom}(h)$ e $u \in A^t(\partial f(Ax))$. Nesse caso, existe $v \in \partial f(Ax)$ tal que $u = A^t v$. Temos pela definição de subgradiente, que para todo $y \in \mathbb{R}^m$, vale a desigualdade

$$f(Ay) \geq f(Ax) + \langle v, Ay - Ax \rangle.$$

Ajustando a matriz A no produto interno, obtemos

$$f(Ay) \geq f(Ax) + \langle A^t v, y - x \rangle$$

Finalmente, fazendo as associações $f(Ay) = h(y)$, $f(Ax) = h(x)$ e $u = A^t v$, obtemos

$$h(y) \geq h(x) + \langle u, y - x \rangle,$$

e portanto, conclui-se que $u \in \partial h(x)$. Mostramos então o primeiro resultado. A demonstração da igualdade $\partial h(x) = A^t(\partial f(Ax))$ pode ser encontrada em [3, Teorema 3.43

^{††}Para definição de $A^t(\partial f(Ax))$, veja a Definição 4.0.5.

(b)]. ■

Apresentamos agora um resultado que relaciona o subdiferencial de uma função f convexa, própria e fechada ao subdiferencial de sua conjugada f^* .

Proposição 1.3.9. *Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e fechada. Então, são equivalentes as seguintes afirmações para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$:*

a) $\langle x, y \rangle = f(x) + f^*(y);$

b) $y \in \partial f(x);$

c) $x \in \partial f^*(y).$

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e fechada. Pela Definição 1.2.8, temos que a função conjugada f^* de f é

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x \rangle - f(x)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Pela Proposição 1.2.7, temos também que f^* é uma função convexa, própria e fechada. Dessa forma garantimos que a soma indefinida $+\infty - \infty$ não irá ocorrer e ainda, que existem pelo menos um $x \in \mathbb{R}^n$ e um $y \in \mathbb{R}^n$ tais que a soma $f(x) + f^*(y)$ é finita.

Agora, mostraremos as implicações **(a)** \Leftrightarrow **(b)** e **(a)** \Leftrightarrow **(c)**, iniciando pela relação **(a)** \Leftrightarrow **(b)**. De fato, temos

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle = f(x) + f^*(y) &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle - f(x) = f^*(y) \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle - f(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, z \rangle - f(z)\} \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle - f(x) \geq \langle y, z \rangle - f(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow f(z) \geq f(x) + \langle y, z \rangle - \langle y, x \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow y \in \partial f(x). \end{aligned}$$

Para mostrar a equivalência **(a)** \Leftrightarrow **(c)**, observamos primeiramente que pela Proposição 1.2.8 temos válida a igualdade $f = f^{**}$, em que f^{**} denota a função conjugada

de f^* . Utilizando essa relação, obtemos a seguinte sequência de implicações

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle = f(x) + f^*(y) &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = f^{**}(x) + f^*(y) \\
 &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle - f^*(y) = f^{**}(x) \\
 &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle - f^*(y) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, z \rangle - f^*(z) \} \\
 &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle - f^*(y) \geq \langle x, z \rangle - f^*(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\
 &\Leftrightarrow f^*(z) \geq f^*(y) + \langle x, z \rangle - \langle x, y \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\
 &\Leftrightarrow f^*(z) \geq f^*(y) + \langle x, z - y \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\
 &\Leftrightarrow x \in \partial f^*(y).
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que **(a)**, **(b)** e **(c)** são equivalentes. ■

2 Operadores Monótonos

Nessa seção serão introduzidos as definições e os resultados básicos da ampla teoria dos Operadores Monótonos. Essencialmente, o conteúdo encontrado aqui se resume ao necessário para compreender a convergência do algoritmo ADMM em espaços Euclidianos. Para um tratamento mais rico em detalhes do conteúdo apresentado nessa seção, veja [8]. Para uma discussão completa sobre Operadores Monótonos em espaços de Hilbert, veja [1].

Apresentamos na Seção 2.1 a base da teoria dos operadores monótonos em espaços euclidianos. Introduzimos as operações básicas de soma, produto por escalar e de inversão e ainda, caracterizamos algumas propriedades convenientes em otimização. Na Seção 2.2, tratamos o subdiferencial de uma função como um operador e analisamos as propriedades do subdiferencial nesse ponto de vista. Nas Seções 2.3 e 2.4 tratamos dos métodos de ponto proximal generalizado e da decomposição de *Douglas-Rachford*.

2.1 Introdução à Teoria dos Operadores Monótonos

Iniciamos com a definição de operador em \mathbb{R}^n .

Definição 2.1.1 (Operador). Um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ é um mapa que associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$, um subconjunto $\mathcal{T}(x) \subset \mathbb{R}^n$.

Ressaltamos que um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ associa a cada elemento do \mathbb{R}^n , um conjunto que pode ou não ser vazio, ou seja, $\mathcal{T}(x)$ denota um conjunto. Se $\mathcal{T}(x)$ é formado por um único elemento, digamos $\mathcal{T}(x) = \{y_x\}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{T}(x)$ o próprio elemento y_x , ao invés do conjunto $\{y_x\}$.

Considere o operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$. Denotaremos por $G_{\mathcal{T}}$ o gráfico do operador \mathcal{T} , isto é,

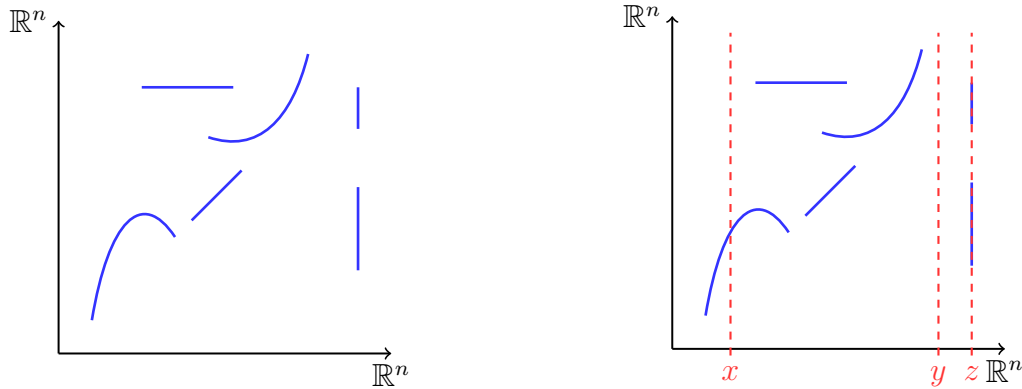
$$G_{\mathcal{T}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathcal{T}(x)\}.$$

Uma representação do conjunto $G_{\mathcal{T}}$ é apresentada na Figura 9a^{‡‡}. Na Figura 9b são

^{‡‡}Esta e as próximas figuras foram inspiradas na apresentação do Prof. Patrick L. Combettes no *One World Optimization Seminar* (<https://owos.univie.ac.at/>). Os slides e vídeo podem ser acessados em <https://pcombet.math.ncsu.edu/>.

apresentadas algumas possibilidades em relação a cardinalidade do conjunto $\mathcal{T}(x)$.

Observação 2.1.1. É usual utilizar a notação \mathcal{T} tanto para denotar o próprio operador \mathcal{T} quanto o seu gráfico. Nesse caso, a devida interpretação deve ser feita através do contexto em que a notação é aplicada. Nesse trabalho, fazemos a distinção das notações.



(a) Representação do gráfico $G_{\mathcal{T}}$ do operador \mathcal{T} . (b) $\mathcal{T}(x)$ é formado por um ponto, $\mathcal{T}(y)$ é vazio e $\mathcal{T}(z)$ possui múltiplos pontos.

Figura 9: Representação gráfica de um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$.

Observe que é possível definir um operador \mathcal{T} em termos de $G_{\mathcal{T}}$, isto é, dado um conjunto $G_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, definimos $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ por

$$\mathcal{T}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in G_{\mathcal{T}}\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Esse ponto de vista nos permitirá definir algumas propriedades e operações de forma simples.

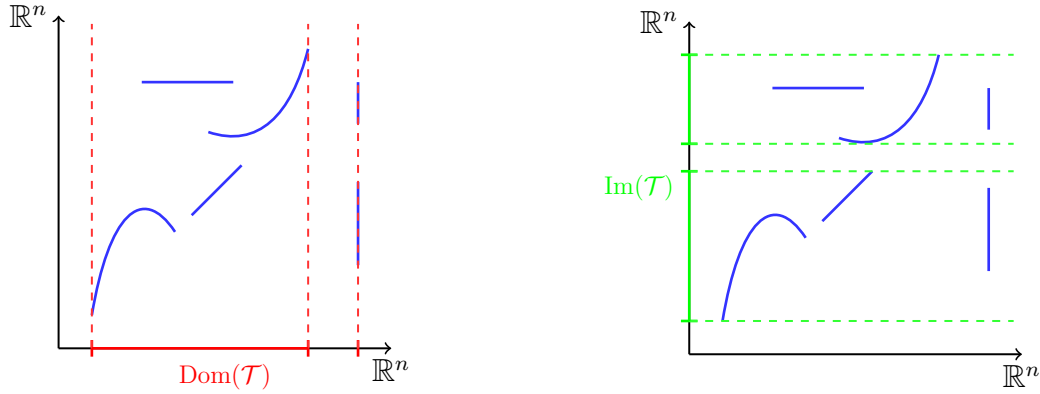
Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador. Definimos o domínio de \mathcal{T} pelo conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{T}(x)$ é não vazio, e o denotamos por $\text{Dom}(\mathcal{T})$, isto é,

$$\text{Dom}(\mathcal{T}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{T}(x) \neq \emptyset\}.$$

Diremos que \mathcal{T} tem domínio completo se $\text{Dom}(\mathcal{T}) = \mathbb{R}^n$. A imagem de \mathcal{T} , denotada por $\text{Im}(\mathcal{T})$, é definida como o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^n$ tal que existe ao menos um $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $y \in \mathcal{T}(x)$, ou seja,

$$\text{Im}(\mathcal{T}) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } y \in \mathcal{T}(x)\}.$$

O domínio e a imagem do operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ exibido na Figura 9 são representados na Figura 10.



(a) A região destacada em vermelho representa o domínio de \mathcal{T} . (b) A região destacada em verde representa a imagem de \mathcal{T} .

Figura 10: Domínio e imagem de um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$.

A seguir, definiremos as operações básicas de produto de um operador por escalar, soma de operadores e por fim, definiremos a operação de inversão.

Definição 2.1.2 (Produto por Escalar). Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar. Definimos o operador $\lambda\mathcal{T}$ por

$$\lambda\mathcal{T}(x) := \{\lambda y \mid y \in \mathcal{T}(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 2.1.3 (Soma). Sejam $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ operadores. Definimos o operador $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ por

$$(\mathcal{F} + \mathcal{G})(x) := \{y + z \mid y \in \mathcal{F}(x), z \in \mathcal{G}(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 2.1.4 (Inversão). Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador. Definimos o operador inverso \mathcal{T}^{-1} por

$$\mathcal{T}^{-1}(y) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid y \in \mathcal{T}(x)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Está representado na Figura 11 o que ocorre com o gráfico, o domínio e a imagem do operador \mathcal{T} exibido na Figura 9 quando aplicamos a operação de inversão. Observe que pela definição de operador inverso, temos as igualdades $\text{Dom}(\mathcal{T}) = \text{Im}(\mathcal{T}^{-1})$ e $\text{Im}(\mathcal{T}) = \text{Dom}(\mathcal{T}^{-1})$. Esse fato está representado também na Figura 11.

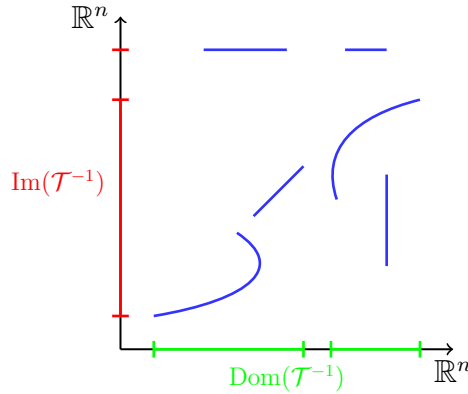


Figura 11: Representação do gráfico, domínio e imagem do operador \mathcal{T}^{-1} .

Iniciaremos agora com o estudo dos operadores monótonos e dos operadores monótonos maximais, que como veremos posteriormente, formam duas classes de operadores que são fundamentais, principalmente no contexto de Otimização.

Definição 2.1.5 (Operador Monótono). Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador. Dizemos que \mathcal{T} é monótono se

$$\langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}}.$$

Definição 2.1.6 (Operador Monótono Maximal). Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador monótono. Dizemos que \mathcal{T} é monótono maximal se para todo operador monótono $\mathcal{T}' : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ satisfazendo $\mathcal{T}(x) \subset \mathcal{T}'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale a igualdade $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

De maneira equivalente, podemos dizer que o operador \mathcal{T} é monótono maximal se para todo operador monótono \mathcal{T}' diferente de \mathcal{T} , $G_{\mathcal{T}}$ não é subconjunto próprio de $G_{\mathcal{T}'}$, isto é, se \mathcal{T}' é um operador monótono satisfazendo $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}$, então, $G_{\mathcal{T}} \not\subset G_{\mathcal{T}'}$ [1]. Para verificar alguns resultados adicionais sobre operadores monótonos utilizando a Definição 2.1.6, veja [9].

Denotaremos nesse trabalho por \mathcal{I} o operador identidade, ou seja, consideramos $\mathcal{I}(x) = x$.

A seguir, apresentamos um resultado que nos permite verificar quando um operador monótono é também maximal [8, Teorema 1].

Proposição 2.1.1. *Um operador monótono $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ é monótono maximal se, e somente se,*

$$\text{Im}(\mathcal{I} + \mathcal{T}) = \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Veja referências apropriadas em [8, Teorema 1]. ■

Segue um resultado relacionando o produto $\lambda\mathcal{T}$, apresentado na Definição 2.1.2, com a monotonicidade do operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$.

Proposição 2.1.2. *Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador e $\lambda > 0$ um escalar. Então, \mathcal{T} é monótono se, e somente se, $\lambda\mathcal{T}$ é monótono. Ainda, \mathcal{T} é monótono maximal se, e somente se, $\lambda\mathcal{T}$ é monótono maximal.*

Demonstração. Mostramos primeiramente que \mathcal{T} é monótono se, e somente se, $\lambda\mathcal{T}$ é monótono. De fato, observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \text{ é monótono} &\Leftrightarrow \langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}} \\ &\Leftrightarrow \lambda \langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}} \\ &\Leftrightarrow \langle x' - x, \lambda y' - \lambda y \rangle \geq 0, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}} \\ &\Leftrightarrow \langle x' - x, z' - z \rangle \geq 0, \quad \forall (x, z), (x', z') \in G_{\lambda\mathcal{T}} \\ &\Leftrightarrow \lambda\mathcal{T} \text{ é monótono.} \end{aligned}$$

Veremos agora que vale a equivalência \mathcal{T} é monótono maximal se, e somente se, $\lambda\mathcal{T}$ é monótono maximal.

“ \Rightarrow ”: suponha que \mathcal{T} seja um operador monótono maximal e tomemos um operador \mathcal{T}' monótono tal que $\lambda\mathcal{T}(x) \subset \mathcal{T}'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ressaltamos que como \mathcal{T}' é um operador monótono, pelo demonstrado anteriormente, temos que $\frac{1}{\lambda}\mathcal{T}'$ é também um operador monótono. Então, pela definição de operador monótono maximal, temos que

$$\begin{aligned} \lambda\mathcal{T}(x) \subset \mathcal{T}'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n &\Rightarrow \mathcal{T}(x) \subset \frac{1}{\lambda}\mathcal{T}'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \mathcal{T} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{T}' \\ &\Rightarrow \lambda\mathcal{T} = \mathcal{T}'. \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que $\lambda\mathcal{T}(x)$ é monótono maximal.

“ \Leftarrow ”: agora, suponha que $\lambda\mathcal{T}$ é monótono maximal. Tome um operador monótono \mathcal{T}' tal

que $\mathcal{T}(x) \subset \mathcal{T}'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Novamente, lembramos que como \mathcal{T}' é por hipótese um operador monótono, vale que $\lambda\mathcal{T}'$ também é um operador monótono. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x) \subset \mathcal{T}'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n &\Rightarrow \lambda\mathcal{T}(x) \subset \lambda\mathcal{T}'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \lambda\mathcal{T}' = \lambda\mathcal{T} \\ &\Rightarrow \mathcal{T}' = \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que \mathcal{T} é um operador monótono maximal.

Reunindo os dois resultados anteriores, conclui-se que \mathcal{T} é monótono maximal se, e somente se, $\lambda\mathcal{T}$ é monótono maximal. ■

Apresentamos um corolário que relaciona diretamente as Proposições 2.1.1 e 2.1.2.

Corolário 2.1.1. *Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador e $\lambda > 0$ um escalar. Então, \mathcal{T} é monótono maximal se, e somente se,*

$$\text{Im}(\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}) = \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.1.2, temos a relação

$$\mathcal{T} \text{ é monótono maximal} \Leftrightarrow \lambda\mathcal{T} \text{ é monótono maximal.}$$

Pela Proposição 2.1.1, sabemos que

$$\lambda\mathcal{T} \text{ é monótono maximal} \Leftrightarrow \text{Im}(\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}) = \mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$\mathcal{T} \text{ é monótono maximal} \Leftrightarrow \text{Im}(\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}) = \mathbb{R}^n. \quad \blacksquare$$

A seguir, apresentamos os conceitos de não-expansividade.

Definição 2.1.7 (Não-expansividade). Um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ é não-expansivo se

$$\|y' - y\| \leq \|x' - x\|, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}}.$$

Veja que se \mathcal{T} é não-expansivo, então, \mathcal{T} é formado por no máximo um elemento, sendo $\mathcal{T}(x)$ vazio se $x \notin \text{Dom}(\mathcal{T})$. De fato, se tomarmos $x' = x$ na Definição 2.1.7, obtemos que $y' = y$. Se \mathcal{T} é não-expansivo e ainda possui domínio completo, isto é, $\text{Dom}(\mathcal{T}) = \mathbb{R}^n$, então, temos que $\mathcal{T}(x)$ é formado por um único elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Nesse caso, podemos interpretar \mathcal{T} como uma função $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e portanto, é possível reescrever a desigualdade da Definição 2.1.7 como

$$\|\mathcal{T}(x') - \mathcal{T}(x)\| \leq \|x' - x\|, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n.$$

Dessa forma, obtemos que \mathcal{T} define uma função Lipschitz com constante 1.

Definição 2.1.8 (Não-expansividade Firme). Um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ é não-expansivo firme se

$$\|y' - y\|^2 \leq \langle x' - x, y' - y \rangle, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}}.$$

A seguir, mostramos que a propriedade de não-expansividade firme implica a não-expansividade.

Lema 2.1.1. *Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador. Então, se \mathcal{T} é não-expansivo firme, \mathcal{T} é também não-expansivo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador não-expansivo firme. Pela Definição 2.1.8, temos que

$$\|y' - y\|^2 \leq \langle x' - x, y' - y \rangle, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}}.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 4.0.2) ao lado direito da desigualdade anterior, obtemos

$$\|y' - y\|^2 \leq \|x' - x\| \cdot \|y' - y\|, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}}.$$

Se $y' = y$, então a desigualdade da Definição 2.1.7 é válida para quaisquer $x, x' \in \text{Dom}(\mathcal{T})$. Suponha então que $y' \neq y$. Dividindo a desigualdade anterior por $\|y' - y\| \neq 0$, obtemos

$$\|y' - y\| \leq \|x' - x\|.$$

Portanto conclui-se que

$$\|y' - y\| \leq \|x' - x\|, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}},$$

e assim, \mathcal{T} é não-expansivo. ■

Apresentamos na Figura 12 uma interpretação geométrica das propriedades de não-expansividade e de não-expansividade firme. Se \mathcal{T} é não-expansivo, $\mathcal{T}(x') - \mathcal{T}(x)$ está contido na circunferência de raio $\|x' - x\|$ centrada na origem, destacada em azul. Se \mathcal{T} é não-expansivo firme, $\mathcal{T}(x') - \mathcal{T}(x)$ está contido na circunferência de raio $\frac{\|x' - x\|}{2}$ centrada em $\frac{x' - x}{2}$, destacada em vermelho. Note que no caso da não-expansividade firme, o ângulo θ é sempre agudo.

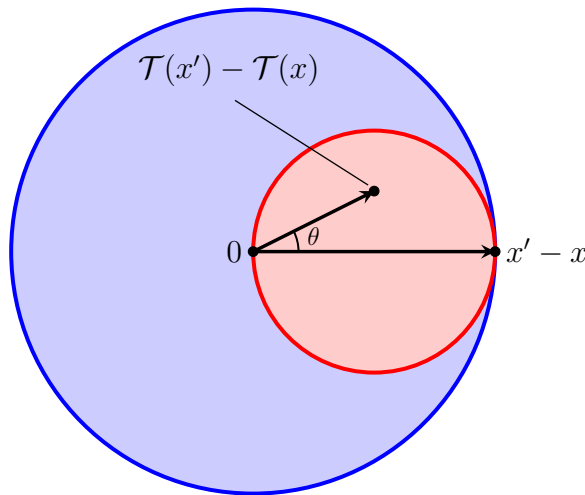


Figura 12: Efeitos da não-expansividade e da não-expansividade firme.

Definiremos a seguir o resolvente de um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e iremos caracterizar algumas de suas propriedades fundamentais.

Definição 2.1.9 (Resolvente de \mathcal{T}). Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador e $\lambda > 0$ um

escalar. Definimos o operador resolvente de \mathcal{T} por

$$\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x) := (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})^{-1}(x).$$

O resultado que será apresentado a seguir relaciona a monotonicidade de um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e a não-expansividade firme de seu resolvente $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$.

Proposição 2.1.3. *Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador e $\lambda > 0$ um escalar. Então, \mathcal{T} é monótono se, e somente se, o resolvente $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ é um operador não-expansivo firme. Ainda, \mathcal{T} é monótono maximal se, e somente se, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ é não-expansivo firme e possui domínio completo, isto é, $\text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}) = \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Mostraremos primeiramente que \mathcal{T} é monótono se, e somente se, o resolvente $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ é não-expansivo firme. De fato, pela Definição 2.1.5, temos que \mathcal{T} é monótono se, e somente se,

$$\langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}}.$$

Observe que como temos $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0 &\Leftrightarrow \lambda \langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x' - x, \lambda y' - \lambda y \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x' - x, x' - x \rangle + \langle x' - x, \lambda y' - \lambda y \rangle \geq \langle x' - x, x' - x \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x' - x, x' - x + \lambda y' - \lambda y \rangle \geq \|x' - x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x' - x, (x' + \lambda y') - (x + \lambda y) \rangle \geq \|x' - x\|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle x' - x, (x' + \lambda y') - (x + \lambda y) \rangle \geq \|x' - x\|^2, \quad \forall (x, y), (x', y') \in G_{\mathcal{T}}.$$

Note que,

$$y \in \mathcal{T}(x) \Leftrightarrow x + \lambda y \in (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})(x).$$

Com essa relação, é possível garantir a seguinte relação entre os gráficos dos operadores

\mathcal{T} e $\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}$:

$$(x, y) \in G_{\mathcal{T}} \Leftrightarrow (x, x + \lambda y) \in G_{\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}}.$$

Dessa forma, reescrevemos a desigualdade anterior como

$$\langle x' - x, z' - z \rangle \geq \|x' - x\|^2, \quad \forall (x, z), (x', z') \in G_{\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}},$$

em que $z = x + \lambda y$ e $z' = x' + \lambda y'$. Agora, observando que

$$(x, z) \in G_{\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}} \Leftrightarrow (z, x) \in G_{(\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})^{-1}},$$

e que por definição temos $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}} = (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})^{-1}$, conclui-se que

$$\|x' - x\|^2 \leq \langle z' - z, x' - x \rangle, \quad \forall (z, x), (z', x') \in G_{\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}},$$

e portanto, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ é não-expansivo firme.

Demonstraremos agora o fato de que \mathcal{T} é monótono maximal se, e somente se, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ é não-expansivo firme e possui domínio completo. Observe que pelo Corolário 2.1.1, temos

$$\mathcal{T} \text{ é monótono maximal} \Leftrightarrow \text{Im}(\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}) = \mathbb{R}^n.$$

Como por definição temos que a imagem de um operador é igual ao domínio do seu operador inverso, então

$$\text{Im}(\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}) = \text{Dom}((\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})^{-1}) = \text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}).$$

Dessa forma,

$$\mathcal{T} \text{ é monótono maximal} \Leftrightarrow \text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}) = \mathbb{R}^n,$$

isto é, \mathcal{T} é monótono maximal se, e somente se, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ tem domínio completo. ■

A seguir, apresentamos alguns corolários obtidos da proposição anterior.

Corolário 2.1.2. *Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador e $\lambda > 0$ um escalar. Então, se \mathcal{T} é monótono, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ é formado por no máximo um elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ainda, se \mathcal{T}*

é monótono maximal, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ é formado por exatamente um elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Se \mathcal{T} é monótono, temos que $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ é não-expansivo firme, e portanto, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ é formado por ao menos um elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$, sendo composto por exatamente um elemento quando $x \in \text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}})$ e vazio se $x \notin \text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}})$. Se \mathcal{T} é monótono maximal, temos que $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ é não-expansivo firme e que $\text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}) = \mathbb{R}^n$, logo, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ é formado por um único elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Corolário 2.1.3. *Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador monótono e $\lambda > 0$ um escalar. Então, para cada $z \in \mathbb{R}^n$ existem no máximo um $x \in \mathbb{R}^n$ e um $y \in \mathcal{T}(x)$ tal que $z = x + \lambda y$. Se \mathcal{T} é monótono maximal, então, existem únicos $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathcal{T}(x)$ satisfazendo $z = x + \lambda y$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador monótono e $\lambda > 0$ um escalar. Considere também $z \in \mathbb{R}^n$. Como \mathcal{T} é monótono e λ é um escalar positivo, temos, pelo Corolário 2.1.2, que $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(z)$ é formado por no máximo um elemento para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Suponha $z \in \text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}})$, logo, temos um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(z) = \{x\}$$

Por definição, temos $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(z) = (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})^{-1}(z)$, logo,

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(z) &\Leftrightarrow x \in (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})^{-1}(z) \\ &\Leftrightarrow z \in (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})(x) \\ &\Leftrightarrow z = x + \lambda y, \text{ para algum } y \in \mathcal{T}(x) \end{aligned}$$

Agora, suponha que exista $y' \in \mathcal{T}(x)$ tal que $z = x + \lambda y'$. Nesse caso, temos $x + \lambda y' = x + \lambda y$, portanto, com temos $\lambda > 0$, obtemos a igualdade $y' = y$. Dessa forma, o elemento $y \in \mathcal{T}(x)$ que satisfaz $z = x + \lambda y$ é único. Se $z \notin \text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}})$, então, a sequência de implicações exibida anteriormente não é válida pois $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(z)$ é vazio, logo, não existem x e y satisfazendo $z = x + \lambda y$ com $y \in \mathcal{T}(x)$.

Agora, suponha que \mathcal{T} seja um operador monótono maximal, então, pelo Corolário 2.1.2, $\text{Dom}(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}) = \mathbb{R}^n$, portanto, seguindo a mesma discussão feita anteriormente

para \mathcal{T} monótono, temos que para todo $z \in \mathbb{R}^n$ existem únicos $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $y \in \mathcal{T}(x)$ satisfazendo $z = x + \lambda y$. ■

Muitos problemas podem ser escritos em termos de encontrar um zero de um operador adequado, isto é, determinar $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça a pertinência $0 \in \mathcal{T}(x)$, em que $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ é um operador apropriado para o problema. O teorema que será apresentado a seguir relaciona os elementos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a relação $0 \in \mathcal{T}(x)$ com os pontos fixos do resolvente $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$, e veremos nas próximas seções que essa relação nos dará um método para calcular tais pontos.

Teorema 2.1.1. *Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador monótono maximal e $\lambda > 0$ um escalar. Então, $0 \in \mathcal{T}(x)$ se, e somente se, $x = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} 0 \in \mathcal{T}(x) &\Leftrightarrow x \in (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})(x) \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})^{-1}(x). \end{aligned}$$

Como temos por definição que $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}} = (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})^{-1}$, obtemos das implicações anteriores que

$$0 \in \mathcal{T}(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x).$$

Como \mathcal{T} é um operador monótono maximal e λ um escalar positivo, então, pelo Corolário 2.1.2, temos que $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ é formado por exatamente um elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$, portanto, podemos reescrever a relação anterior como

$$0 \in \mathcal{T}(x) \Leftrightarrow x = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x).$$

■

Veja que existem outros operadores definidos em termos de \mathcal{T} diferentes de $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}$ que possuem uma relação semelhante à descrita no Teorema 2.1.1, por exemplo, o operador $\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T}$. De fato, mesmo sem supor que \mathcal{T} é monótono maximal, temos

$$0 \in \mathcal{T}(x) \Leftrightarrow x \in (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{T})(x).$$

Entretanto, a essência desse resultado está em dois fatos, ambos consequência de exigirmos que \mathcal{T} seja um operador monótono maximal:

- Podemos garantir a igualdade $x = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ ao invés da pertinência e ainda interpretar $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ como uma função, já que $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ é formado por um único elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Pela Proposição 2.1.3, garantimos que $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{T}}(x)$ é não-expansivo firme e possui domínio completo.

Como veremos nas próximas seções, a propriedade de não-expansividade firme será fundamental para construir alguns algoritmos capazes de determinar zeros de operadores.

2.2 O Operador Subdiferencial

Na Seção 1.3 definimos o subdiferencial de uma função. Nessa seção, iremos tratar o subdiferencial como um operador e analisaremos quais propriedades o subdiferencial possui quando visto nessa perspectiva. Assim como na Seção 1.3, algumas hipóteses de convexidade serão fundamentais aqui para garantir algumas propriedades do operador subdiferencial. Posteriormente, relacionamos o operador subdiferencial com o operador proximal.

Nessa seção, utilizaremos a notação ∂f para denotar o operador que associa cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto subdiferencial de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ avaliado em x , isto é,

$$\begin{aligned} \partial f : \mathbb{R}^n &\rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \\ x &\mapsto \partial f(x), \end{aligned}$$

em que

$$\partial f(x) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

A seguir, apresentamos um resultado que nos revela quando podemos garantir que ∂f é um operador monótono maximal.

Proposição 2.2.1. *Considere a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa, própria e fechada, então, ∂f é um operador monótono maximal.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e própria. Mostraremos primeiramente que ∂f é um operador monótono. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e tomemos $u \in \partial f(x)$ e $v \in \partial f(y)$. Então, pela definição de subdiferencial, valem as desigualdades

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \langle u, y - x \rangle, \\ f(x) &\geq f(y) + \langle v, x - y \rangle. \end{aligned}$$

Somando as duas relações anteriores, obtemos o resultado desejado

$$\langle v - u, y - x \rangle \geq 0.$$

Assim, ∂f é monótono.

Para demonstração de que ∂f é monótono maximal, veja [1, Teorema 20.40].

■

Em Otimização, é muito comum encontrar diversas aplicações práticas e teóricas de um operador especial, denominado operador proximal.

Definição 2.2.1 (Operador Proximal). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função e considere o escalar $\lambda > 0$. O operador proximal da função λf é um operador $\text{prox}_{\lambda f} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ definido por

$$\text{prox}_{\lambda f}(x) := \arg \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \right\}.$$

A seguir, relacionamos o resolvente do operador subdiferencial de uma função convexa e própria ao operador proximal.

Proposição 2.2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e fechada e considere o escalar $\lambda > 0$. Então,*

$$\mathcal{J}_{\lambda \partial f}(x) = \text{prox}_{\lambda f}(x).$$

Demonstração. Por hipótese, temos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é uma função convexa e própria. Assim, pela Proposição 2.2.1, ∂f é monótono maximal. Aplicando então

Corolário 2.1.2, garantimos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos $\mathcal{J}_{\lambda\partial f}(x)$ não vazio. Observe que pela definição do resolvente $\mathcal{J}_{\lambda\partial f}$, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{J}_{\lambda\partial f}(x) &\Leftrightarrow y \in (\mathcal{I} + \lambda\partial f)^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathcal{I} + \lambda\partial f)(y) \\ &\Leftrightarrow x \in \lambda\partial f(y) + y \\ &\Leftrightarrow 0 \in \lambda\partial f(y) + (y - x) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(y) + \frac{1}{\lambda}(y - x). \end{aligned}$$

Observe que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\partial f(y) + \frac{1}{\lambda}(y - x) = \partial_y \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right].$$

De fato, f é convexa e própria, logo, $\text{dom}(f)$ é convexo e não vazio. Nesse caso, temos pela Proposição 1.1.2, que $\text{ri}(\text{dom}(f))$ é um conjunto convexo e não vazio. Como para x fixo vale a igualdade $\text{dom}(\frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2) = \mathbb{R}^n$, temos que $\text{ri}(\text{dom}(\frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2)) = \mathbb{R}^n$ e portanto a intersecção $\text{ri}(\text{dom}(f)) \cap \text{ri}(\text{dom}(\frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2))$ é não vazia. Como temos ainda que $f(y)$ e $\frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2$ são funções convexas e próprias em y , aplicando a Proposição 1.3.7, obtemos que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ vale a igualdade

$$\partial_y \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right] = \partial f(y) + \partial_y \left[\frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right].$$

Agora, como $\frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2$ é uma função convexa, própria e diferenciável, pela Proposição 1.3.5, obtemos que

$$\partial_y \left[\frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right] = \left\{ \frac{1}{\lambda}(y - x) \right\}.$$

Com a igualdade dos subdiferenciais, então temos

$$y \in \mathcal{J}_{\lambda\partial f}(x) \Leftrightarrow 0 \in \partial_y \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right].$$

Como $f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2$ é uma função convexa e própria, vale a condição

$$0 \in \partial_y \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right] \Leftrightarrow y \in \arg \min_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2 \right\}.$$

Portanto, vale a equivalência

$$y \in \mathcal{J}_{\lambda\partial f}(x) \Leftrightarrow y \in \arg \min_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2 \right\},$$

que por sua vez, nos permite concluir que

$$\mathcal{J}_{\lambda\partial f}(x) = \text{prox}_{\lambda f}(x).$$

■

Iremos recuperar através da Proposição 2.2.2 uma propriedade do operador proximal. Para uma discussão mais detalhada sobre o operador proximal, veja [3].

Corolário 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e fechada e considere o escalar $\lambda > 0$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{prox}_{\lambda f}(x)$ é formado por um único elemento.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2.2, temos que

$$\text{prox}_{\lambda f}(x) = \mathcal{J}_{\lambda\partial f}(x).$$

Pela Proposição 2.2.1, temos que ∂f é um operador monótono maximal. Dessa forma, como temos $\lambda > 0$, pelo Corolário 2.1.2, $\mathcal{J}_{\lambda\partial f}(x)$ é formado por exatamente um elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\text{prox}_{\lambda f}(x)$ é formado por um único elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Veja que o resultado do Corolário 2.2.1 já era esperado, já que avaliar o operador proximal de uma função convexa é equivalente a resolver um problema de minimização irrestrita convexo e regularizado, onde o termo regularizador, dado por $\frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2$, tem o objetivo de garantir a existência e a unicidade de um minimizador [3].

2.3 O Método de Ponto Proximal Generalizado

Considere o seguinte problema de minimização irrestrita

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (4)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é uma função convexa, própria e fechada. Observe que a condição de otimalidade para que um elemento $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ seja solução do problema apresentado em (4) é simplesmente a condição

$$0 \in \partial f(\bar{x}),$$

em que $\partial f(\bar{x})$ denota o subdiferencial de f avaliado em \bar{x} .

Um possível método para abordar o problema de otimização encontrado em (4) é conhecido como método do ponto proximal, que será descrito a seguir. Considere $\theta \in \mathbb{R}$ um escalar satisfazendo $\theta > 0$ e seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$. O método do ponto proximal gera, a partir de x^0 , uma sequência (x^k) de elementos do \mathbb{R}^n definida por

$$x^{k+1} := \text{prox}_{\theta f}(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Mostra-se que (x^k) converge para uma solução do problema dado em (4) [3, Teorema 10.28].

Dos resultados da Proposição 2.2.2, tem-se que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é uma função convexa, própria e fechada e θ é um escalar positivo, então, vale a igualdade

$$\mathcal{J}_{\theta \partial f}(x) = \text{prox}_{\theta f}(x).$$

Com essa relação, é possível estabelecer uma conexão entre o método do ponto proximal e o resolvente do operador subdiferencial associado à função f do problema encontrado em (4). De fato, dados o escalar $\theta > 0$ e o elemento $x^0 \in \mathbb{R}^n$, podemos redefinir a sequência gerada pelo método do ponto proximal em termos do resolvente $\mathcal{J}_{\theta \partial f}$ como

$$x^{k+1} := \mathcal{J}_{\theta \partial f}(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

A equivalência $\mathcal{J}_{\theta\partial f}(x) = \text{prox}_{\theta f}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ garante que a sequência (x^k) definida em termos do resolvente converge para uma solução do problema apresentado em (4).

Através das condições de otimalidade do problema de otimização em questão, temos que a sequência (x^k) gerada pelo método do ponto proximal converge para um elemento \bar{x} tal que

$$0 \in \partial f(\bar{x}).$$

Assim, o método do ponto proximal nos fornece uma maneira de encontrar zeros do operador subdiferencial associado à f . Temos ainda mais. Como f é por hipótese uma função convexa, própria e fechada, segue pela Proposição 2.2.1 que o operador ∂f é monótono maximal e portanto, pelo Teorema 2.1.1, $0 \in \partial f(\bar{x})$ se, e somente se, $\bar{x} = \mathcal{J}_{\theta\partial f}(\bar{x})$, logo, o processo iterativo

$$x^{k+1} := \mathcal{J}_{\theta\partial f}(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

nos permite calcular pontos fixos do operador $\mathcal{J}_{\theta\partial f}$.

Como já foi comentado nas seções anteriores, muitos problemas nas mais diversas áreas podem ser solucionados determinando zeros de um operador adequado. Assim, levaremos a partir de agora nossas atenções ao problema de encontrar os zeros de um operador mais geral $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, ou seja, trataremos do problema de determinar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in \mathcal{T}(x)$.

Dado um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, denotaremos por $\text{Zer}(\mathcal{T})$ o conjunto dos zeros de \mathcal{T} , isto é,

$$\text{Zer}(\mathcal{T}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \in \mathcal{T}(x)\}.$$

Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador monótono maximal, $\theta > 0$ um escalar e considere $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Baseados no processo iterativo que define o método do ponto proximal, definimos a sequência (x^k) a partir de x^0 como

$$x^{k+1} := \mathcal{J}_{\theta\mathcal{T}}(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

Mostra-se que se $\text{Zer}(\mathcal{T})$ é não vazio, então, a sequência (x^k) converge para um elemento

$\bar{x} \in \text{Zer}(\mathcal{T})$ [9, Teorema 4.4]. Veja que como \mathcal{T} é por hipótese um operador monótono maximal, temos pelo Corolário 2.1.2 que $\mathcal{J}_{\theta\mathcal{T}}(x)$ é formado por um único elemento para todo $x \in \mathbb{R}^n$, assim, x^{k+1} é unicamente determinado para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ e não há ambiguidades em considerar a igualdade em (5). Essencialmente, o que garante que a sequência (x^k) convirja é a propriedade da não-expansividade firme do operador $\mathcal{J}_{\theta\mathcal{T}}$. De fato, é a não-expansividade firme que faz com que a sequência (x^k) convirja para um ponto fixo \bar{x} de $\mathcal{J}_{\theta\mathcal{T}}$. Como por hipótese \mathcal{T} é um operador monótono maximal, a relação entre pontos fixos do resolvente $\mathcal{J}_{\theta\mathcal{T}}$ e os zeros do operador \mathcal{T} é estabelecida através do Teorema 2.1.1, que nos permite concluir que \bar{x} também satisfaz a propriedade $0 \in \mathcal{T}(\bar{x})$.

Baseados na sequência definida em (5), é possível generalizar o método do ponto proximal para operadores. Algumas das possibilidades são:

- Considerar um parâmetro θ que varie em termos de k . Assim, a sequência (x^k) será definida por

$$x^{k+1} := \mathcal{J}_{\theta_k\mathcal{T}}(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

- Adicionar um parâmetro de relaxação que permita mais liberdade na escolha de x^{k+1} .
- Permitir que o resolvente seja avaliado de forma aproximada, ou seja, considerar que a sequência (x^k) satisfaça a relação

$$\|x^{k+1} - \mathcal{J}_{\theta\mathcal{T}}(x^k)\| \leq \mu_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

em que $\mu_k > 0$ é o erro máximo na estimativa do resolvente para cada k .

Devemos impor algumas condições sobre as generalizações mencionadas para que o método possa de fato convergir. Por exemplo, ao aproximarmos o cálculo do resolvente, veremos que será necessário que a soma dos erros de cada avaliação seja finita, isto é, devemos pedir que $\sum \mu_k < +\infty$.

A seguir, apresentaremos o método do ponto proximal generalizado que foi desenvolvido e apresentado em [8] e engloba todas as generalizações mencionadas anteriormente. A ideia principal desse método é, dados um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, um elemento $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e dadas as sequências apropriadas (θ_k) , (ρ_k) e (μ_k) de números reais,

determinar para cada $k = 0, 1, 2, \dots$ um elemento $y^k \in \mathbb{R}^n$ distante no máximo μ^k de $\mathcal{J}_{\theta_k \mathcal{T}}(x^k)$, e então finalmente, definir x^{k+1} da forma

$$x^{k+1} := (1 - \rho_k)x^k + \rho_k y^k.$$

O processo iterativo definido pelo método do ponto proximal generalizado está descrito também no Algoritmo 1.

O Teorema 2.3.1 estabelece que a sequência (x^k) gerada pelo processo iterativo descrito anteriormente converge para um zero de \mathcal{T} se $\text{Zer}(\mathcal{T})$ é um conjunto não vazio. As hipóteses que devem ser feitas sobre as sequências (θ_k) , (ρ_k) e (μ_k) ficarão mais claras no enunciado do Teorema 2.3.1 apresentado a seguir.

Teorema 2.3.1. *Seja $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ um operador monótono maximal e considere as sequências (θ_k) , (ρ_k) e (μ_k) de números reais tais que:*

- $\theta_k \geq 0$ para todo k e $\liminf \theta_k > 0$.
- $\rho_k \in (0, 2)$ para todo k e $0 < \liminf \rho_k \leq \limsup \rho_k < 2$.
- $\mu_k \geq 0$ para todo k e $\sum \mu_k < +\infty$.

Seja dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e considere a sequência (x^k) de elementos do \mathbb{R}^n definida a partir de x^0 por

$$x^{k+1} := (1 - \rho_k)x^k + \rho_k y^k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

em que

$$\|y^k - \mathcal{J}_{\theta_k \mathcal{T}}(x^k)\| \leq \mu_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Então, se $\text{Zer}(\mathcal{T})$ é um conjunto não vazio, a sequência (x^k) converge para $\bar{x} \in \text{Zer}(\mathcal{T})$. Caso contrário, (x^k) é uma sequência ilimitada.

Demonstração. Veja [8, Teorema 3]. ■

O fato de permitirmos a aproximação no cálculo do resolvente expande o horizonte de aplicações para o método do ponto proximal. De fato, se não existe fórmula fechada para o cálculo do resolvente do operador \mathcal{T} , podemos então estimar $\mathcal{J}_{\theta \mathcal{T}}$ através de um método iterativo, o que não é permitido se considerarmos o caso onde o cálculo

Algoritmo 1: Método do Ponto Proximal Generalizado**Entrada:** \mathcal{T} , (θ_k) , (ρ_k) , (μ_k) e x^0 como no Teorema 2.3.1.**Saída:** $\bar{x} \in \text{Zer}(\mathcal{T})$.**para** $k = 0, 1, 2, \dots$ **faça**

Calcule y^k tal que: $\ y^k - \mathcal{J}_{\theta_k \mathcal{T}}(x^k)\ \leq \mu_k$;
$x^{k+1} \leftarrow (1 - \rho_k)x^k + \rho_k y^k$;

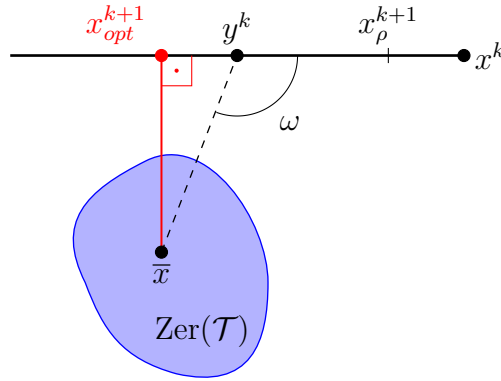
fim

Figura 13: As possibilidades de escolha para $x_\rho^{k+1} = (1 - \rho)x^k + \rho y^k$ em termos de $\rho \in (0, 2)$ estão denotadas pela semi-reta com origem em x^k e que passa por y^k . Considerando a avaliação exata do resolvente, vemos nesse caso que a escolha de $\rho > 1$ é vantajosa. Isso ocorre pois o fato de \mathcal{T} ser monótono implica que ω é pelo menos 90 graus.

do resolvente deve ser exato. Outro ponto importante na generalização do método do ponto proximal é a escolha da definição de x^{k+1} em termos de ρ_k , x^k e y^k . Experimentos computacionais indicam que uma sobrerelaxação, isto é, fazer $\rho_k > 1$ no cálculo de x^{k+1} , é eficaz para acelerar a convergência do método. Esse fato pode ser observado na Figura 13.

2.4 A Decomposição de Douglas-Rachford

Uma das dificuldades do método do ponto proximal é a complexidade envolvendo o cálculo do resolvente $\mathcal{J}_{\theta \mathcal{T}}$ de um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$. Essa complexidade se dá devido à necessidade de determinar o inverso do operador $\mathcal{I} + \theta \mathcal{T}$ como etapa final no cálculo do resolvente, onde tal operação de inversão pode ser impraticável para alguns operadores [3]. Entretanto, se um operador $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ puder ser decomposto em uma soma $\mathcal{T} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$, em que $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ são operadores monótonos maximais, e ainda, os resolventes dos operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} forem mais fáceis de se calcular

em relação ao resolvente $\mathcal{J}_{\theta\mathcal{T}}$, é possível solucionar o problema original de determinar um zero de \mathcal{T} em termos dos resolventes $\mathcal{J}_{\theta\mathcal{F}}$ e $\mathcal{J}_{\theta\mathcal{G}}$ de forma mais eficiente, aproveitando da facilidade dos cálculos dos resolventes de \mathcal{F} e \mathcal{G} , e esse é objetivo principal dos métodos de decomposição.

Apresentaremos nesse trabalho o método da decomposição de *Douglas-Rachford* e uma generalização desse mesmo método, que foi desenvolvida em [8]. Uma revisão sobre diversos métodos de decomposição e suas principais vantagens em otimização paralela é feita em [7]. A escolha particular do método da decomposição de *Douglas-Rachford* foi feita por sua relação direta com o ADMM. Essa relação é explorada em [8], entretanto, a iremos explorar ainda mais nesse trabalho, generalizando a classe de problemas que podem ser tratados pelo método ADMM proposto.

Sejam $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ operadores monótonos maximais, $\lambda > 0$ um escalar e considere dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$. O método da decomposição de *Douglas-Rachford* gera uma sequência (x^k) de elementos do \mathbb{R}^n , partindo de x^0 , definida da forma

$$x^{k+1} := \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{F}}((2\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}} - \mathcal{I})(x^k)) + (\mathcal{I} - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}})(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Definindo o operador $\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ por

$$\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}} := \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{F}} \circ (2\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}} - \mathcal{I}) + (\mathcal{I} - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}),$$

em que \circ denota a operação de composição de operadores, podemos reescrever (6) como

$$x^{k+1} := \mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Considere agora o operador $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ definido por

$$\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}} := \mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}^{-1} - \mathcal{I}$$

O estudo das propriedades do operador $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ será fundamental para estabelecer relações entre o método da decomposição de *Douglas-Rachford* e o método do ponto proximal generalizado. Antes de prosseguirmos com o estudo das propriedades dos operadores

$\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ e $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$, estabeleceremos expressões para os conjuntos de seus gráficos $G_{\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}}$ e $G_{\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}}$.

Lema 2.4.1. *Sejam $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ operadores monótonos maximais. Então, os gráficos dos operadores $\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ e $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ são dados por*

$$G_{\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}} = \{(u + \lambda b, v + \lambda b) \mid b \in \mathcal{G}(u), a \in \mathcal{F}(v), v + \lambda a = u - \lambda b\},$$

$$G_{\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}} = \{(v + \lambda b, u - v) \mid b \in \mathcal{G}(u), a \in \mathcal{F}(v), v + \lambda a = u - \lambda b\}.$$

Demonstração. Veja [8] ■

Veremos agora alguns resultados que relacionam propriedades dos operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} a propriedades de $\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ e $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$.

Proposição 2.4.1. *Sejam $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ operadores. Então, se \mathcal{F} e \mathcal{G} são monótonos, $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ é monótono. Ainda, se \mathcal{F} e \mathcal{G} são monótonos maximais, $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ é monótono maximal.*

Demonstração. Veja [8, Teorema 4]. ■

Corolário 2.4.1. *Sejam $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ operadores monótonos maximais. Então, $\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ é não-expansivo firme e possui domínio completo.*

Demonstração. Observe que pela definição do operador $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}} &= (\mathcal{I} + \mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}})^{-1} \\ &= \mathcal{J}_{\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}}. \end{aligned}$$

Como por hipótese temos que $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ são operadores monótonos maximais, pela Proposição 2.4.1, o operador $\mathcal{S}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ é monótono maximal. Com a Proposição 2.1.3, conclui-se que $\mathcal{D}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ é um operador não expansivo firme com domínio completo. ■

Considere os operadores $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e o escalar $\lambda > 0$. Denotaremos por $\overline{\mathcal{Z}}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ o conjunto

$$\overline{\mathcal{Z}}_{\lambda,\mathcal{F},\mathcal{G}} := \{u + \lambda v \mid v \in \mathcal{G}(u), -v \in \mathcal{F}(u)\}.$$

A seguir, caracterizamos o conjunto $\text{Zer}(\mathcal{S}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}})$ em termos de $\overline{\mathcal{Z}}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$ e $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$.

Proposição 2.4.2. *Sejam $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ operadores e $\lambda > 0$ um escalar. Então,*

$$\begin{aligned} \text{Zer}(\mathcal{S}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}) &= \overline{\mathcal{Z}}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}} \\ &\subseteq \{u + \lambda v \mid u \in \text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G}), v \in \mathcal{G}(u)\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Veja [8, Teorema 5] ■

Ressaltamos a seguinte relação:

$$\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{Zer}(\mathcal{S}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}) \neq \emptyset.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} u \in \text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G}) &\Leftrightarrow 0 \in \mathcal{F}(u) + \mathcal{G}(u) \\ &\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{F}(u), v \in \mathcal{G}(u) \text{ tal que } w + v = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{F}(u), v \in \mathcal{G}(u) \text{ tal que } w = -v \\ &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } -v \in \mathcal{F}(u), v \in \mathcal{G}(u) \\ &\Leftrightarrow u + \lambda v \in \overline{\mathcal{Z}}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}} \\ &\Leftrightarrow u + \lambda v \in \text{Zer}(\mathcal{S}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}). \end{aligned}$$

Dessa forma, a existência de um elemento em um conjunto implica na existência de um elemento associado no outro. Essa relação irá nos permitir enunciar a convergência do método de *Douglas-Rachford* sem trabalharmos com o operador auxiliar $\mathcal{S}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$.

Agora, observe que pela definição do operador $\mathcal{S}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}} &= (\mathcal{I} + \mathcal{S}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}})^{-1} \\ &= \mathcal{J}_{\mathcal{S}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}}. \end{aligned}$$

Essa igualdade nos permite redefinir a sequência (z^k) gerada pelo método de *Douglas-*

Rachford apresentada em (7) como

$$x^{k+1} := \mathcal{J}_{S_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}}(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Definindo a sequência (z^k) dessa maneira, é possível notar que o método da decomposição de *Douglas-Rachford* resulta da aplicação do método do ponto proximal generalizado com avaliação exata do resolvente e parâmetros $\rho_k = 1$ e $\theta_k = 1$ para todo k .

Teorema 2.4.1. *Sejam $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ operadores monótonos maximais e considere o escalar $\lambda > 0$. Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$ dado e considere a sequência (x^k) de elementos do \mathbb{R}^n definida, a partir de x^0 , por*

$$x^{k+1} := \mathcal{J}_{\lambda \mathcal{F}}((2\mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}} - \mathcal{I})(x^k)) + (\mathcal{I} - \mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}})(x^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Então, se $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ é não vazio, (x^k) converge para um elemento $\bar{x} \in \bar{\mathcal{Z}}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$. Caso contrário, (x^k) é uma sequência ilimitada.

Demonstração. Veja [8] ■

No Teorema 2.4.1, suponha que $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ seja não vazio. Nesse caso, temos como resultado principal que a sequência (x^k) converge para um elemento \bar{x} na forma $\bar{x} = \bar{u} + \lambda \bar{v}$, com \bar{u} e \bar{v} satisfazendo $\bar{u} \in \text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ e $\bar{v} \in \mathcal{G}(\bar{u})$, e assim, \bar{u} soluciona o problema de encontrar um zero da soma $\mathcal{F} + \mathcal{G}$. Como temos $\bar{x} = \bar{u} + \lambda \bar{v}$ com $\bar{v} \in \mathcal{G}(\bar{u})$ e por hipótese conhecemos \bar{x} , temos então que

$$\bar{u} = \mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}(\bar{x}),$$

logo, é possível determinar \bar{u} em termos de \bar{x} .

Dada a relação entre o método da decomposição de *Douglas-Rachford* e o método do ponto proximal, é natural tentar trazer as mesmas generalizações feitas no método proximal para o método de *Douglas-Rachford*. Uma breve discussão sobre as possibilidades e conveniências envolvendo tais generalizações para o método de *Douglas-Rachford* é feita em [4].

Algoritmo 2: Método de *Douglas-Rachford* generalizado**Entrada:** $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \lambda, (\beta_k), (\alpha_k), (\rho_k)$ e $z^0 \in \mathbb{R}^n$ como no Teorema 2.4.2.**Saída:** $\bar{z} \in \bar{\mathcal{Z}}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$.**para** $k = 0, 1, 2, \dots$ **faça**

Determine p^k tal que $\ p^k - \mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}(z^k)\ \leq \beta_k$;
Determine q^k tal que $\ q^k - \mathcal{J}_{\lambda \mathcal{F}}(2p^k - z^k)\ \leq \alpha_k$;
$z^{k+1} \leftarrow z^k + \rho_k(q^k - p^k)$;

fim

A seguir, enunciamos o teorema que estabelece a convergência do método de *Douglas-Rachford* generalizado.

Teorema 2.4.2. *Sejam $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ operadores monótonos maximais, $\lambda > 0$ um escalar e considere as sequências (β_k) , (α_k) e (ρ_k) de números reais tais sejam válidas as seguintes condições:*

- $\beta_k \geq 0$ para todo k e $\sum \beta_k < +\infty$.
- $\alpha_k \geq 0$ para todo k e $\sum \alpha_k < +\infty$.
- $\rho_k \in (0, 2)$ para todo k e $0 < \liminf \rho_k \leq \limsup \rho_k < 2$.

Considere também as sequências (p^k) , (q^k) e (z^k) de elementos do \mathbb{R}^n tal que

- $\|p^k - \mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}(z^k)\| \leq \beta_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$
- $\|q^k - \mathcal{J}_{\lambda \mathcal{F}}(2p^k - z^k)\| \leq \alpha_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$
- $z^{k+1} = z^k + \rho_k(q^k - p^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$

Nesse caso, se $\text{Zer}(\mathcal{T})$ é um conjunto, então, (z^k) converge para um elemento de $\bar{\mathcal{Z}}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$. Se $\text{Zer}(\mathcal{T})$ é um conjunto vazio, então, (z^k) é uma sequência ilimitada.

Demonstração. Veja [8, Teorema 7] ■

O processo iterativo induzido pelo método de *Douglas-Rachford* generalizado é apresentado no Algoritmo 2.

3 ADMM

3.1 Método de Penalização e o Lagrangiano Aumentado

Considere o seguinte problema de otimização restrita

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h(x) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ é uma função contínua que determina o conjunto viável do problema. As funções Lagrangiana e Lagrangiana aumentada associadas ao problema 8 são, respectivamente

$$\mathcal{L}(x, p) := f(x) + \langle p, h(x) \rangle,$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x, p) := f(x) + \langle p, h(x) \rangle + \frac{\lambda}{2} \|h(x)\|^2.$$

Uma possível estratégia para tratar problemas que envolvem restrições, como o problema (8), é tentar transformar o problema restrito original em uma sequência de subproblemas irrestritos cujas soluções se aproximam da solução do problema original. Ressaltamos que como estamos considerando aqui uma classe de problemas um pouco mais gerais, que podem não ser convexos, consideramos como solução de (8) um ponto KKT. Uma das formas de aplicar essa técnica ao problema (8) é penalizar, na função objetivo dos problemas modificados, somente os pontos inviáveis do problema original, e isso pode ser feito considerando uma função contínua $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denominada de função de penalização, com as seguintes propriedades:

- $\varphi(x) = 0$ se $h(x) = 0$.
- $\varphi(x) > 0$ se $h(x) \neq 0$.

Nesse caso, os problemas penalizados são escritos da forma

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda \varphi(x), \tag{9}$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um escalar positivo. Note que se tomarmos $\lambda \gg 0$, espera-se que a solução

x_λ do problema modificado satisfaça $\varphi(x_\lambda) \approx 0$, logo, x_λ se aproxima do conjunto viável e portanto, se aproxima também de uma solução para o problema (8). Essa discussão nos sugere um método para resolver o problema (8). Considere uma sequência (λ_k) de números reais tal que $\lambda_k > 0$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ e $\lambda_k \rightarrow +\infty$. A partir da sequência (λ_k) , construímos uma sequência (x^k) de elementos do \mathbb{R}^n tal que para cada k , x^k é solução do problema penalizado

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda_k \varphi(x).$$

Se a sequência (x^k) está contida em um subconjunto compacto do \mathbb{R}^n , mostra-se que toda subsequência convergente de (x^k) tem como ponto limite uma solução do problema (8) e que vale o limite $\lambda_k \varphi(x^k) \rightarrow 0$ [2, Teorema 9.2.2]. Mostra-se também que, se para algum $\lambda > 0$ a solução $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ do problema penalizado (9) satisfaz $\varphi(x_\lambda) = 0$, então, x_λ é também uma solução do problema (8).

Observe que os resultados de convergência obtidos anteriormente nos fornecem uma condição de parada computável para o método de penalização. Essa condição busca comparar os valores de $\lambda_k \varphi(x^{k+1})$ e de um $\varepsilon > 0$ pré-definido, de forma a controlar o erro dos termos x^k em relação à solução ótima do problema (8). Essa condição é utilizada no método de penalização apresentado em [2] e tal método aplicado ao problema (8) é descrito no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Método de Penalização.

Entrada: $\varepsilon > 0$, $\beta > 1$, $\lambda_0 > 0$ e $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

para $k=0, 1, 2, \dots$ **faça**

Determine x^{k+1} a partir de x^k tal que x^{k+1} seja solução de

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda_k \varphi(x);$$

se $\lambda_k \varphi(x^{k+1}) < \varepsilon$ **então**

| Retorne x^{k+1} ;

senão

| $\lambda_{k+1} \leftarrow \beta \lambda_k$;

fim

fim

A função de penalização $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ desempenha um papel fundamental no comportamento da sequência (x^k) definida pelo método de penalização. Dentre diversas

possibilidades, é muito comum considerarmos funções de penalização do tipo

$$\varphi_\sigma(x) := \sum_{i=1}^l |h_i(x)|^\sigma,$$

em que $h_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ representa a i -ésima componente da função $h : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma = 1, 2, 3, \dots$. De fato, se $x \in \mathbb{R}^n$ é viável, então, $h_i(x) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, l$, logo, $\varphi_\sigma(x) = 0$. Ainda, se $x \in \mathbb{R}^n$ não é viável, então, $h_i(x) \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, l$, e portanto, $\varphi_\sigma(x) > 0$. Como temos por hipótese que h é contínua, φ_σ é contínua, dessa forma, φ_σ é uma função de penalização. Nessa classe de funções de penalização, considera-se em geral as penalizações φ_1 e φ_2 , que resultam, respectivamente, nos seguintes problemas modificados:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda \sum_{i=1}^l |h_i(x)|, \quad (10)$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda \sum_{i=1}^l h_i^2(x). \quad (11)$$

Trataremos a partir de agora os métodos de penalização com as funções de penalização dadas somente por φ_1 e φ_2 . Note que para $\sigma = 1$, a função objetivo modificada $f(x) + \lambda \sum |h_i(x)|$ não é suave em $x = 0$ mesmo que f e h o sejam, o que pode causar dificuldades se quisermos usar algum método do tipo gradiente para solucionar os subproblemas. Para $\sigma = 2$ essa dificuldade não ocorre. De fato, se f e h são funções suaves, temos que a função objetivo modificada $f(x) + \lambda \sum h_i(x)^2$ é também uma função suave.

Apresentamos a seguir uma interpretação geométrica para o método de penalização inteiramente baseada na interpretação dada em [2]. Considere no problema (8) que $l = 1$, isto é, que h é uma função contínua de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . Trataremos inicialmente o caso para a penalização quadrática φ_2 . Como os problemas modificados são irrestritos, suas soluções, em geral, não são viáveis ao problema (8). Na Figura 14, representamos no eixo horizontal o valor de $h(x)$ para um dado $x \in \mathbb{R}^n$. No eixo vertical, representamos os valores de $f(x)$. A região em azul retrata a imagem do mapa $x \mapsto (h(x), f(x))$, em que $x \in \mathbb{R}^n$, e a região destacada em laranja representa a imagem dos pontos viáveis do problema (8) pelo mapa $x \mapsto (h(x), f(x))$, onde evidenciamos a imagem do ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

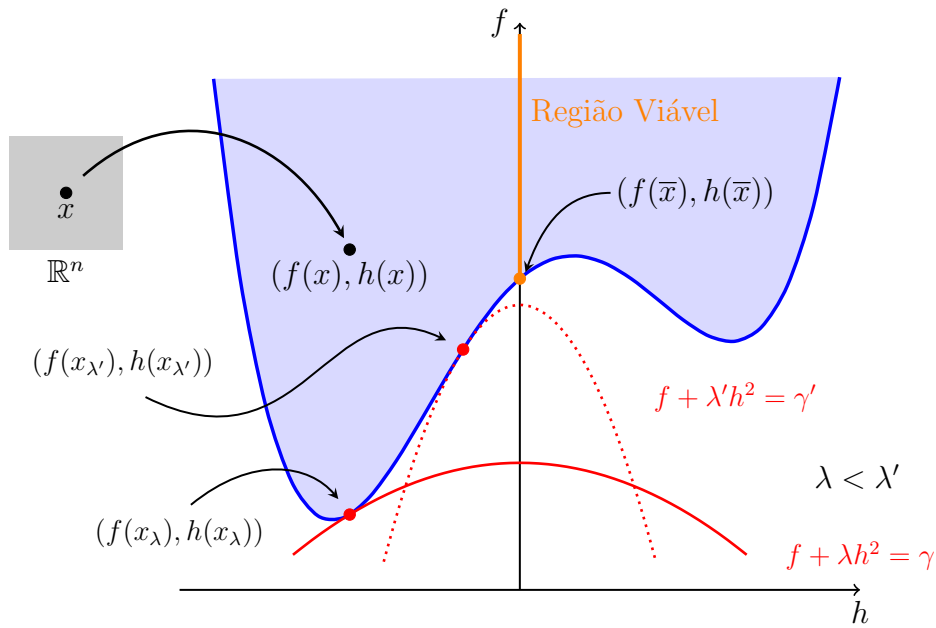


Figura 14: Interpretação geométrica do método de penalização com a função de penalização φ_2 .

solução do problema original. Agora, considere um $\lambda > 0$ e as curvas de nível da função $f + \lambda h^2$. Como queremos minimizar $f + \lambda h^2$, devemos encontrar o menor γ tal que a curva de nível $f + \lambda h^2 = \gamma$ mantenha ao menos um ponto de contato com a região em azul. O valor γ é determinado quando a parábola $f + \lambda h^2 = \gamma$ tangencia o conjunto dado pela imagem do mapa $x \mapsto (h(x), f(x))$. Essa curva de nível é representada na Figura 14 pela parábola em linha contínua na cor vermelha. Determinado γ , a solução do problema penalizado (11) é obtida encontrando x_λ tal que $f(x_\lambda) + \lambda h^2(x_\lambda) = \gamma$. Quando tomamos $\lambda' > \lambda$, as curvas de nível da função $f + \lambda' h^2$ ficam mais fechadas, permitindo que o ponto de tangência entre a curva e a imagem do mapa $x \mapsto (h(x), f(x))$ se aproxime mais facilmente do ponto $(h(\bar{x}), f(\bar{x}))$ associado à solução ótima. A interpretação geométrica para o caso da função de penalização φ_1 é idêntica ao caso φ_2 e é apresentada na Figura 15.

Em princípio, a não suavidade do objetivo modificado quando consideramos a função de penalização φ_1 pode nos causar algumas dificuldades, entretanto, veremos que nesse caso, conseguimos obter uma solução exata do problema original para um valor finito do parâmetro λ , enquanto, se considerarmos a função de penalização φ_2 , a solução do problema original só é obtida no limite $\lambda \rightarrow +\infty$. Esse comportamento pode ser

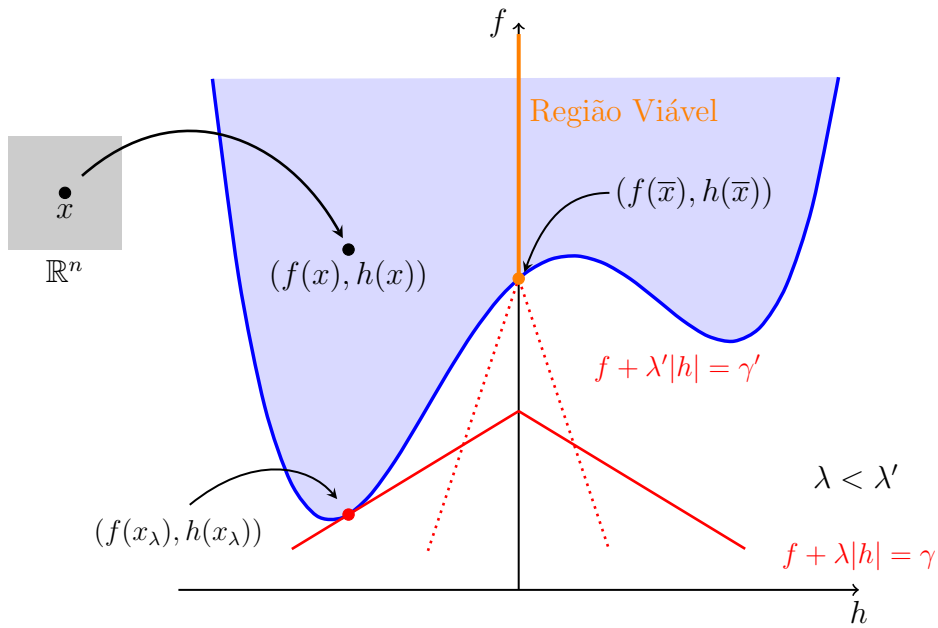


Figura 15: Interpretação geométrica do método de penalização com a função de penalização φ_2 .

observado geometricamente comparando as Figuras 14 e 15

Se uma função de penalização φ nos permite obter a solução exata do problema original com um λ finito, então, dizemos que φ é uma penalização exata. Nesse caso, temos então que φ_1 é uma função de penalização exata. Penalizações exatas são vantajosas no sentido de que sabemos que para um λ suficientemente grande, conseguimos uma resposta exata para o problema restrito original solucionando o problema penalizado. Todavia, essa vantagem pode ser mitigada quando, por exemplo, perdemos a diferenciabilidade do objetivo penalizado, o que nos força a trabalhar com métodos específicos para otimização irrestrita não suave. Veremos a seguir que é possível desenvolver um método, conhecido como método dos multiplicadores, que combina as vantagens da penalização exata com a suavidade do problema modificado.

Baseados no método de penalização com a função φ_2 , adicionamos uma perturbação $e \in \mathbb{R}^l$ fixa no termo que trata da penalização das restrições, e então, o problema modificado passa a ser

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda \sum_{i=1}^l (h_i(x) - e_i)^2, \quad (12)$$

em que e_i representa a i -ésima componente de e . A adição dessa perturbação pode ser interpretada como uma translação na origem das restrições, e essa translação, se feita

da maneira apropriada, pode nos garantir uma resposta exata do problema (8) para um parâmetro λ finito. É possível interpretar geometricamente a adição do parâmetro e na Figura 16, onde nota-se que permitindo um deslocamento horizontal das curvas de nível do tipo $f + \lambda h^2 = \gamma$, então, a solução ótima do problema modificado coincide com a solução ótima do problema original.

O problema modificado escrito na forma dada em (12) é vantajoso para uma fácil interpretação geométrica, entretanto, não nos revela muitas propriedades do método. Para analisar tais propriedades, vamos modificar a expressão dada em (12). Expandindo os termos $(h_i(x) - e_i)^2$ no subproblema em (12) e então eliminando os termos constantes da forma λe_i^2 , podemos reescrever (12) como

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i=1}^l (-2\lambda e_i) h_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^l h_i^2(x).$$

Finalmente, definindo

$$p := -2\lambda e,$$

obtemos a formulação desejada do problema modificado, isto é,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i=1}^l p_i h_i + \lambda \sum_{i=1}^l h_i(x)^2. \quad (13)$$

Trataremos a partir de agora o problema modificado na forma dada em (13).

Observe que é possível reconhecer a presença da função Lagrangiana $\mathcal{L}(x, p)$ associada ao problema (8) na função objetivo do problema modificado. Ainda, a função objetivo do problema irrestrito (13) é a própria função Lagrangiana aumentada $\mathcal{L}_{2\lambda}(x, p)$ associada ao problema (8). Essa relação com a função Lagrangiana nos fornece uma indicativo de quais valores de p devemos escolher. De fato, seja \bar{x} uma solução do problema (8) e seja \bar{p} o multiplicador de Lagrange associado a \bar{x} , isto é, temos

$$h(\bar{x}) = 0,$$

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \bar{p}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0.$$

Nesse caso, temos que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \bar{p}_i \nabla h_i(\bar{x}) + 2\lambda \sum_{i=1}^l h_i(\bar{x}) \nabla h_i(\bar{x}) = 0, \quad \forall \lambda > 0$$

Dessa forma, com $p = \bar{p}$, \bar{x} é ponto crítico do problema irrestrito (13) para todo $\lambda > 0$. Sob algumas hipóteses de regularidade, comentadas em [2], podemos tornar λ grande o suficiente, mas finito, tal que o ponto crítico \bar{x} do problema modificado passe a ser uma solução do problema modificado (13) com $p = \bar{p}$, onde \bar{x} é também solução do problema restrito original (8).

A ideia por trás do método dos multiplicadores é muito semelhante ao que foi feito anteriormente para o método da penalização. De fato, pelas relações entre a solução \bar{x} do problema restrito original, seu multiplicador de Lagrange \bar{p} associado e os pontos críticos de $\mathcal{L}_{2\lambda}(x, \bar{p})$, uma proposta inicial seria resolver subproblemas de minimização do tipo

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}_{2\lambda_k}(x, \bar{p}),$$

em que (λ_k) é uma sequência adequada. A interpretação geométrica para a abordagem é feita na Figura 16. Essa interpretação, também inspirada em [2], é idêntica à interpretação geométrica feita anteriormente para o método de penalização com função φ_2 , exceto pelo fato das curvas de nível associadas a cada subproblema estarem deslocadas horizontalmente, para um $\lambda > 0$ dado, em um fator de $\frac{\bar{p}}{2\lambda}$.

A dificuldade fundamental dessa abordagem é o fato de que precisamos conhecer explicitamente o multiplicador \bar{p} , o que na maioria dos casos não ocorre. Uma das maneiras de contornar essa dificuldade é estimar um multiplicador associado a cada solução dos subproblemas. Ao final do processo, obtemos uma sequência (p^k) de elementos do \mathbb{R}^l , onde espera-se que $p^k \rightarrow \bar{p}$ para algum multiplicador \bar{p} . Sejam dados $\lambda > 0$, uma estimativa p^k de um multiplicador de Lagrange e considere x^{k+1} uma solução do subproblema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i=1}^l p_i^k h_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^l h_i^2(x). \quad (14)$$

Baseados na relação $\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{p}) = 0$ que deve ser seguida pela solução ótima do problema original e seu multiplicador associado, podemos escolher p^{k+1} de forma que $\nabla_x \mathcal{L}(x^{k+1}, p^{k+1}) =$

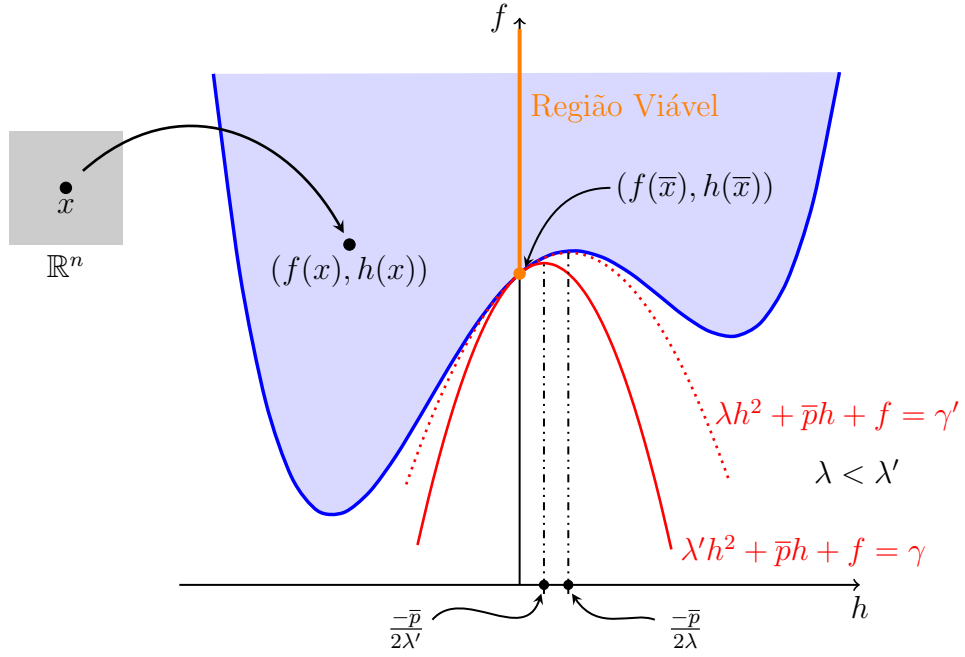


Figura 16: Interpretação geométrica da resolução dos subproblemas do método do Lagrangiano aumentado considerando $p = \bar{p}$.

0, isto é, escolhemos p^{k+1} tal que

$$\nabla f(x^{k+1}) + \sum_{i=1}^l p_i^{k+1} \nabla h_i(x^{k+1}) = 0.$$

Observe que determinar um p^{k+1} que satisfaça essa relação é algo simples. De fato, como estamos assumindo que x^{k+1} é solução de (14), então temos

$$\nabla f(x^{k+1}) + \sum_{i=1}^l p_i^k \nabla h_i(x^{k+1}) + 2\lambda \sum_{i=1}^l h_i(x^{k+1}) \nabla h_i(x^{k+1}) = 0.$$

Agrupando os termos envolvendo os gradientes das restrições, obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x^{k+1}, p^k + 2\lambda h(x^{k+1})) &= \nabla f(x^{k+1}) + \sum_{i=1}^l (p_i^k + 2\lambda h_i(x^{k+1})) \nabla h_i(x^{k+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso nos sugere a seguinte atualização para p^{k+1}

$$p^{k+1} := p^k + 2\lambda h(x^{k+1})$$

Resumindo o que foi tratado até o momento sobre o método dos multiplicadores, a partir de $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $p^0 \in \mathbb{R}^l$ e $\lambda > 0$, geram-se seqüências (x^k) e (p^k) tais que para $k = 0, 1, 2, \dots$, x^{k+1} é solução do subproblema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i=1}^l p_i^k h_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^l h_i^2(x),$$

e (p^k) é definida pela relação $p^{k+1} := p^k + 2\lambda h(x^{k+1})$. Mostra-se que esse processo converge para uma solução do problema (8) com um λ suficientemente grande. Esse método é retratado no Algoritmo 4, um algoritmo prático que também é apresentado em [2].

Algoritmo 4: Método dos Multiplicadores.

Entrada: $\varepsilon > 0$, $\beta > 1$, $\tau > 1$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $p^0 \in \mathbb{R}^l$, $\lambda_0 > 0$

para $k=0,1,2,\dots$ **faça**

Determine x^{k+1} a partir de x^k tal que x^{k+1} seja solução de

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i=1}^l p_i^k h_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^l h_i^2(x);$$

se $\max_i \{|h_i(x^{k+1})|\} < \varepsilon$ **então**

| **retorna** x^{k+1} ;

senão se $\max_i \{|h_i(x^{k+1})|\} > \tau \max_i \{|h_i(x^k)|\}$ **então**

| $\lambda_{k+1} \leftarrow \beta \lambda_k$;

fim

$p^{k+1} \leftarrow p^k + 2\lambda h(x^k)$;

fim

3.2 O Método ADMM

Considere o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min_{x,w} \quad & f(x) + g(w) \\ \text{s.a.} \quad & Ax + Bw = c, \end{aligned} \tag{P}$$

em que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ são funções convexas, próprias e fechadas, $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ e $c \in \mathbb{R}^l$. A função Lagrangiana do problema (P) é dada

por

$$\mathcal{L}(x, w, p) := f(x) + g(w) + \langle p, Ax + Bw - c \rangle,$$

enquanto a Lagrangiana aumentada com parâmetro $\lambda > 0$ é

$$\mathcal{L}_\lambda(x, w, p) := f(x) + g(w) + \langle p, Ax + Bw - c \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Ax + Bw - c\|^2.$$

Observe que o problema (P) é um caso particular do problema (8), portanto, é possível aplicar os métodos de penalização e dos multiplicadores descritos nos Algoritmos 3 e 4. Entretanto, esses métodos não aproveitam da natureza separável de (P).

Um dos métodos apropriados para tratar o problema (P) é o ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*), que tenta combinar a separabilidade do problema (P) com a convergência do método dos multiplicadores [5]. Considere dados $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $w^0 \in \mathbb{R}^n$, $p^0 \in \mathbb{R}^l$ e o escalar $\lambda > 0$. A proposta do ADMM é gerar, a partir de x^0 , w^0 e p^0 , seqüências (x^k) , (w^k) e (p^k) que seguem um processo iterativo dado por

$$\begin{aligned} x^{k+1} &\in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \mathcal{L}_\lambda(x, w^k, p^k), \\ w^{k+1} &\in \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}_\lambda(x^{k+1}, w, p^k), \\ p^{k+1} &:= p^k + \lambda(Ax^{k+1} + Bw^{k+1} - c). \end{aligned} \tag{15}$$

Mostra-se que as seqüências (x^k) , (w^k) e (p^k) geradas por esse processo são tais que [5]:

- $Ax^k + Bw^k - c \rightarrow 0$.
- $f(x^k) + g(w^k)$ converge para o valor objetivo ótimo do problema (P).
- (p^k) converge para uma solução ótima do problema dual associado a (P).

É possível notar algumas semelhanças do método ADMM com o método dos multiplicadores. De fato, a aplicação do método dos multiplicadores ao problema (P) resulta em iterações do tipo

$$(x^{k+1}, w^{k+1}) \in \arg \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ w \in \mathbb{R}^n}} \mathcal{L}_{\lambda_k}(x, w, p^k),$$

$$p^{k+1} := p^k + \lambda(Ax^{k+1} + Bw^{k+1} - c).$$

No caso do ADMM, aproveitamos da estrutura separável encontrada em (P) e minimizamos a função Lagrangiana aumentada primeiramente na variável x , e em seguida em w , além de considerarmos o parâmetro $\lambda > 0$ fixo.

Como em princípio pode haver mais de um minimizador para as funções $\mathcal{L}_\lambda(x, w^k, p^k)$ e $\mathcal{L}_\lambda(x^{k+1}, w, p^k)$, não é possível considerar diretamente a igualdade na definição de x^{k+1} e w^{k+1} dada em (15). Por isso, considera-se somente a pertinência de x^{k+1} e w^{k+1} aos seus respectivos conjuntos de minimizadores.

Analisaremos a seguir algumas propriedades do problema (P). Para tal, iniciamos com o cálculo do seu problema dual, definido por

$$\max_{p \in \mathbb{R}^l} \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ w \in \mathbb{R}^n}} \mathcal{L}(x, w, p).$$

Trabalhando com a função objetivo da definição do problema dual, é possível reescrevê-lo em termos das funções conjugadas f^* e g^* . De fato,

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ w \in \mathbb{R}^n}} \mathcal{L}(x, w, p) &= \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ w \in \mathbb{R}^n}} \{f(x) + g(w) + \langle p, Ax + Bw - c \rangle\} \\ &= \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ w \in \mathbb{R}^n}} \{(f(x) + \langle p, Ax \rangle) + (g(w) + \langle p, Bw \rangle) - \langle p, c \rangle\} \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^m} \{f(x) + \langle p, Ax \rangle\} + \inf_{w \in \mathbb{R}^n} \{g(w) + \langle p, Bw \rangle\} - \langle p, c \rangle \\ &= -(f^*(-A^t p) + g^*(-B^t p) + \langle c, p \rangle). \end{aligned}$$

Portanto, o problema dual de (P) é:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^l} -(f^*(-A^t p) + g^*(-B^t p) + \langle c, p \rangle). \quad (\text{D})$$

Definidos os problemas (P) e (D), denotaremos por $\bar{\tau}$ e $\bar{\zeta}$ seus respectivos

valores ótimos, isto é:

$$\bar{\tau} = \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ w \in \mathbb{R}^n}} \{f(x) + g(w) \mid Ax + Bw - c = 0\},$$

$$\bar{\zeta} = \sup_{p \in \mathbb{R}^l} \{-f^*(-A^t p) - g^*(-B^t p) - \langle c, p \rangle\}.$$

Partindo das hipóteses feitas sobre as funções f e g , mostra-se que a soma $f(x) + g(w)$ é também uma função convexa, própria e fechada. Essa propriedade caracteriza o problema (P) como um problema convexo, o que é algo fundamental para trabalharmos com a dualidade, em especial, a dualidade forte. Assim, adicionando ao problema (P) a hipótese de que $\bar{\tau}$ é finito, temos por [12, Corolários 28.2.2 e 28.3.1], que um par $(\bar{x}, \bar{w}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é solução do problema (P) se, e somente se $A\bar{x} + B\bar{w} = c$ e existe um $\bar{p} \in \mathbb{R}^l$ tal que

$$0 \in \partial_{x,w} [f(\bar{x}) + g(\bar{w}) + \langle \bar{p}, A\bar{x} + B\bar{w} - c \rangle]$$

Nesse caso, o multiplicador de Lagrange \bar{p} é uma solução do problema dual (D) [12, Teorema 28.4]. As condições para que um par (\bar{x}, \bar{w}) seja solução do problema (P) são conhecidas como condições de *Kuhn-Tucker*.

Baseados nas condições de *Kuhn-Tucker* para o problema (P) e no desenvolvimento do método ADMM feito em [7], definimos o conceito de tripla *Kuhn-Tucker*.

Definição 3.2.1 (Tripla *Kuhn-Tucker*). Dizemos que $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ é uma tripla *Kuhn-Tucker* para o problema (P) se (\bar{x}, \bar{w}) satisfaz a igualdade $A\bar{x} + B\bar{w} = c$ e ainda

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + A^t \bar{p},$$

$$0 \in \partial g(\bar{w}) + B^t \bar{p}.$$

Apresentaremos agora uma série de resultados que nos revelam algumas propriedades importantes do problema (P) e de seu dual (D) quando supomos a existência de uma tripla *Kuhn-Tucker*.

Proposição 3.2.1. *Se o problema primal (P) admite uma tripla Kuhn-Tucker $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$, então, as funções $f^* \circ (-A^t)$ e $g^* \circ (-B^t)$ são funções convexas, próprias e fechadas. Ainda, $\text{dom}(f^* \circ (-A^t)) \cap \text{dom}(g^* \circ (-B^t))$ é um conjunto não vazio.*

Demonstração. O fato das composições $f^* \circ (-A^t)$ e $g^* \circ (-B^t)$ serem convexas e fechadas é consequência das Proposições 1.2.7 e 1.2.3. De fato, a Proposição 1.2.7 nos garante que f^* e g^* são convexas, próprias e fechadas. Então, aplicando a Proposição 1.2.3, conclui-se que $f^* \circ (-A^t)$ e $g^* \circ (-B^t)$ são convexas e fechadas.

Para demonstrar o fato de que $f^* \circ (-A^t)$ e $g^* \circ (-B^t)$ são próprias, precisamos utilizar da existência da tripla *Kuhn-Tucker*. Como por hipótese $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$ é uma tripla *Kuhn-Tucker*, valem as implicações

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(\bar{x}) + A^t \bar{p} &\Rightarrow -A^t \bar{p} \in \partial f(\bar{x}) \\ &\Rightarrow \bar{x} \in \partial f^*(-A^t \bar{p}), \end{aligned}$$

em que a última implicação é consequência da Proposição 1.3.9. Dessa forma, como $\bar{x} \in \partial f^*(-A^t \bar{p})$ temos válida a seguinte desigualdade

$$f^*(y) \geq f^*(-A^t \bar{p}) + \langle \bar{x}, y + A^t \bar{p} \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Dessa forma, para todo $y \in \mathbb{R}^m$ vale que

$$f^* \circ (-A^t)(\bar{p}) \leq f^*(y) - \langle \bar{x}, y + A^t \bar{p} \rangle.$$

Como f é convexa, própria e fechada, pela Proposição 1.2.7, f^* é também própria. Portanto, $f^*(y) > -\infty$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$ e assim $f^* \circ (-A^t)(p) > -\infty$ para todo $p \in \mathbb{R}^l$. Ainda, o fato de f^* ser própria implica que $\text{dom}(f^*)$ é não vazio. Tomando então $y \in \text{dom}(f^*)$ na desigualdade anterior, temos

$$f^* \circ (-A^t)(\bar{p}) \leq f^*(y) - \langle \bar{x}, y + A^t \bar{p} \rangle < +\infty.$$

Dessa forma, $\text{dom}(f^* \circ (-A^t))$ é não vazio e ainda $\bar{p} \in \text{dom}(f^* \circ (-A^t))$. Conclui-se então que $f^* \circ (-A^t)$ é uma função própria. O processo para mostrar que $g^* \circ (-B^t)$ é uma

função própria é idêntico ao que foi feito para $f^* \circ (-A^t)$. E de forma idêntica, conclui-se que $\bar{p} \in \text{dom}(g^* \circ (-B^t))$. Como $\bar{p} \in \text{dom}(f^* \circ (-A^t))$ e $\bar{p} \in \text{dom}(g^* \circ (-B^t))$, então a intersecção $\text{dom}(f^* \circ (-A^t)) \cap \text{dom}(g^* \circ (-B^t))$ é não vazia. ■

Note que quando assumimos a existência de uma tripla *Kuhn-Tucker*, a Proposição 3.2.1 implica que as funções $g^*(-B^t p) + \langle c, p \rangle$ e $f^*(-A^t p) + g^*(-B^t p) + \langle c, p \rangle$ são convexas, próprias e fechadas.

Lema 3.2.1. *Se o problema primal (P) admite uma tripla Kuhn-Tucker, então, para todo $p \in \mathbb{R}^l$ vale a igualdade*

$$\partial[g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](p) = \partial[g^* \circ (-B^t)](p) + c.$$

Demonstração. Sabe-se da Proposição 3.2.1 que $g^* \circ (-B^t)$ é uma função convexa e própria, ou seja, temos que $\text{dom}(g^* \circ (-B^t))$ é um conjunto convexo e não vazio. Dessa forma, através da Proposição 1.1.2, conclui-se que $\text{ri}(\text{dom}(g^* \circ (-B^t)))$ é um conjunto convexo e não vazio. Agora, observe que o produto interno $\langle c, p \rangle$ define uma função convexa e própria. De fato, temos $\text{dom}(\langle c, \cdot \rangle) = \mathbb{R}^n$ e portanto $\text{ri}(\text{dom}(\langle c, \cdot \rangle)) = \mathbb{R}^n$. Feita essa análise, vale que

$$\text{ri}(\text{dom}(g^* \circ (-B^t))) \cap \text{ri}(\text{dom}(\langle c, \cdot \rangle)) \neq \emptyset$$

Aplicando a Proposição 1.3.7, obtemos que para todo $p \in \mathbb{R}^l$ vale

$$\partial[g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](p) = \partial[g^* \circ (-B^t)](p) + \partial[\langle c, \cdot \rangle](p).$$

Como $\langle c, p \rangle$ define uma função diferenciável cujo vetor gradiente é c , aplicando a Proposição 1.3.5, obtemos

$$\partial[g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](p) = \partial[g^* \circ (-B^t)](p) + c. \quad \blacksquare$$

Proposição 3.2.2. *Se o problema primal (P) admite uma tripla Kuhn-Tucker $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$, então, o par (\bar{x}, \bar{w}) é uma solução do problema primal (P).*

Demonstração. De fato, como $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$ é por hipótese uma tripla *Kuhn-Tucker*, vale que (\bar{x}, \bar{w}) satisfaz a igualdade $A\bar{x} + B\bar{w} = c$ e ainda

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial f(\bar{x}) + A^t \bar{p}, \\ 0 &\in \partial g(\bar{w}) + B^t \bar{p}. \end{aligned}$$

Logo, sabemos que

$$\begin{aligned} -A^t \bar{p} &\in \partial f(\bar{x}), \\ -B^t \bar{p} &\in \partial g(\bar{w}). \end{aligned}$$

Pela definição de subdiferencial, valem as relações

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\bar{x}) + \langle -A^t \bar{p}, x - \bar{x} \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \\ g(w) &\geq g(\bar{w}) + \langle -B^t \bar{p}, w - \bar{w} \rangle, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\bar{x}) + \langle \bar{p}, A\bar{x} - Ax \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \\ g(w) &\geq g(\bar{w}) + \langle \bar{p}, B\bar{w} - Bw \rangle, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Somando as desigualdades anteriores, agrupando os produtos internos e subtraindo $-\langle \bar{p}, c \rangle$ de ambos os lados, vale para todos $x \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$ a desigualdade

$$f(x) + g(w) + \langle \bar{p}, Ax + Bw - c \rangle \geq f(\bar{x}) + g(\bar{w}) + \langle \bar{p}, A\bar{x} + B\bar{w} - c \rangle.$$

Como $A\bar{x} + B\bar{w} = c$, então,

$$f(x) + g(w) + \langle \bar{p}, Ax + Bw - c \rangle \geq f(\bar{x}) + g(\bar{w}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n.$$

Em especial, podemos tomar na desigualdade anterior somente os elementos $x \in \mathbb{R}^m$ e

$w \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax + Bw = c$. Nesse caso, obtemos

$$f(x) + g(x) \geq f(\bar{x}) + g(\bar{w}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Ax + Bw = c.$$

Portanto, $f(\bar{x}) + g(\bar{w}) = \bar{\tau}$. Assim, como o par (\bar{x}, \bar{w}) é por hipótese viável para o problema (P), então (\bar{x}, \bar{w}) é uma solução do problema primal (P). ■

Proposição 3.2.3. *Se o problema primal (P) admite uma tripla Kuhn-Tucker $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$, então, \bar{p} é uma solução do problema dual (D).*

Demonstração. Como o problema dual (D) é um problema irrestrito de maximização de uma função côncava, é suficiente mostrar que

$$0 \in \partial [f^* \circ (-A^t) + g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle] (\bar{p}).$$

Pela definição de tripla *Kuhn-Tucker*, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(\bar{x}) + A^t \bar{p} &\Rightarrow -A^t \bar{p} \in \partial f(\bar{x}) \\ &\Rightarrow \bar{x} \in \partial f^*(-A^t \bar{p}) && \text{(Prop. 1.3.9)} \\ &\Rightarrow -A\bar{x} \in -A\partial f^*(-A^t \bar{p}) \\ &\Rightarrow -A\bar{x} \in \partial [f^* \circ (-A^t)] (\bar{p}) && \text{(Prop. 1.3.8).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \in \partial g(\bar{w}) + B^t \bar{p} &\Rightarrow -B^t \bar{p} \in \partial g(\bar{w}) \\ &\Rightarrow \bar{w} \in \partial g^*(-B^t \bar{p}) && \text{(Prop. 1.3.9)} \\ &\Rightarrow -B\bar{w} \in -B\partial g^*(-B^t \bar{p}) \\ &\Rightarrow -B\bar{w} \in \partial [g^* \circ (-B^t)] (\bar{p}) && \text{(Prop. 1.3.8)} \\ &\Rightarrow -B\bar{w} + c \in \partial [g^* \circ (-B^t)] (\bar{p}) + c \\ &\Rightarrow -B\bar{w} + c \in \partial [g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle] (\bar{p}). && \text{(Lema 3.2.1)} \end{aligned}$$

Portanto, como $-A\bar{x} \in \partial [f^* \circ (-A^t)] (\bar{p})$ e $-B\bar{w} + c \in \partial [g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle] (\bar{p})$,

então,

$$-(A\bar{x} + B\bar{w} - c) \in \partial [f^* \circ (-A^t)](\bar{p}) + \partial [g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](\bar{p}).$$

Pela hipótese de que $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$ é uma tripla *Kuhn-Tucker*, vale a igualdade $A\bar{x} + B\bar{w} - c = 0$. Dessa forma, pela Proposição 1.3.7,

$$0 \in \partial [f^* \circ (-A^t) + g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](\bar{p}).$$

Logo, \bar{p} é solução de (D). ■

Unindo os resultados das Proposições 3.2.2 e 3.2.3, temos que para toda tripla *Kuhn-Tucker* $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$, o elemento \bar{p} é o multiplicador de Lagrange associado à solução (\bar{x}, \bar{w}) do primal (P) e ainda solução do dual (D). Entretanto, nem toda tripla (x', w', p') tal que (x', w') é solução do primal e p' o multiplicador de Lagrange associado à (x', w') , é uma tripla *Kuhn-Tucker* [7, 8, 12].

3.3 Uma Generalização do ADMM

O método ADMM apresentado em (15) é de fato um método eficiente para tratar o problema (P). Entretanto, há a necessidade se calcular a solução dos subproblemas de forma exata. Isso pode restringir o método a ser aplicado somente aos casos onde são conhecidas fórmulas fechadas para os subproblemas que definem x^{k+1} e w^{k+1} em (15). Trataremos agora de uma generalização do método ADMM para o problema (P) que permite que os subproblemas sejam resolvidos de forma aproximada, por exemplo, através de um método iterativo. Essa generalização considera além da aproximação no cálculo dos subproblemas, a adição de um parâmetro de relaxamento, semelhante ao que foi feito no método proximal generalizado. As generalizações incluídas no ADMM nos remetem às generalizações feitas no método de decomposição de *Douglas-Rachford*. De fato, tanto o ADMM apresentado em (15) quanto a sua versão generalizada que será desenvolvida a seguir podem ser tratados como caso particular dessa decomposição [7].

Para estabelecer o método generalizado, reformulamos as iterações definidas em (15). Observe que expandido os produtos internos e eliminando os termos constantes

no cálculo dos minimizadores em (15), obtemos

$$\begin{aligned}\arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \mathcal{L}_\lambda(x, w^k, p^k) &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ f(x) + \langle p^k, Ax \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Ax + Bw^k - c\|^2 \right\}, \\ \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}_\lambda(x^{k+1}, w, p^k) &= \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(w) + \langle p^k, Bw \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Ax^{k+1} + Bw - c\|^2 \right\}\end{aligned}$$

Sejam dados $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $w^0 \in \mathbb{R}^n$, $p^0 \in \mathbb{R}^l$. O princípio fundamental do ADMM generalizado é criar, a partir de x^0 , w^0 e p^0 , sequências (x^k) , (w^k) e (p^k) tais que para cada $k = 0, 1, 2, \dots$, x^{k+1} e w^{k+1} estejam suficientemente próximos de \tilde{x}^k e \tilde{w}^{k+1} , respectivamente, em que

$$\tilde{x}^k \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ f(x) + \langle p^k, Ax \rangle + \frac{1}{2} \lambda \|Ax + Bw^k - c\|^2 \right\},$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}^k \in \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(w) + \langle p^k, Bw \rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \lambda \|\rho_k Ax^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw - c\|^2 \right\}.\end{aligned}$$

Observe a presença do parâmetro de relaxamento ρ^k introduzido no cálculo de \tilde{w}^{k+1} . De forma análoga ao método do ponto proximal, o parâmetro de relaxamento adicionado pode acelerar a convergência do algoritmo, em especial, nos casos de sobrerelaxação, isto é, com $\rho_k > 1$ para todo k . Para adequar a atualização dos termos p^k ao parâmetro de relaxamento, fazemos

$$p^{k+1} := p^k + \lambda(\rho_k Ax^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw^{k+1} - c).$$

A seguir, abordaremos o problema (P) do ponto de vista da teoria de operadores monótonos. Considere o operador subdiferencial $\mathcal{T} : \mathbb{R}^l \rightarrow 2^{\mathbb{R}^l}$ definido por

$$\mathcal{T}(p) := \partial [f^* \circ (-A^t) + g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](p).$$

Como o problema dual (D) é um problema de maximização irrestrita de uma função

côncava, $\bar{p} \in \mathbb{R}^l$ é uma solução de (D) se, e somente se,

$$0 \in \mathcal{T}(\bar{p}).$$

Uma abordagem para determinar uma solução do dual seria tentar aplicar, por exemplo, o método do ponto proximal generalizado ao operador \mathcal{T} . Entretanto, não aproveitaríamos da estrutura separável do problema. Dessa forma, considere os operadores $\mathcal{F} : \mathbb{R}^l \rightarrow 2^{\mathbb{R}^l}$ e $\mathcal{G} : \mathbb{R}^l \rightarrow 2^{\mathbb{R}^l}$ tais que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(p) &:= \partial [f^* \circ (-A^t)](p), \\ \mathcal{G}(p) &:= \partial [g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](p).\end{aligned}$$

Assuma que o problema (P) admite uma tripla *Kuhn-Tucker*. Nesse caso, pela Proposição 3.2.1, as funções $f^*(-A^t p)$ e $g^*(-B^t p) + \langle c, p \rangle$ satisfazem as hipóteses da Proposição 1.3.7. Assim, pela definição dos operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} , sabemos que para todo $p \in \mathbb{R}^l$ vale

$$\mathcal{F}(p) + \mathcal{G}(p) \subseteq \mathcal{T}(p).$$

Dessa forma, se determinarmos um zero da soma $\mathcal{F} + \mathcal{G}$, determinamos um zero do operador \mathcal{T} . Portanto, uma segunda abordagem certamente mais eficaz, seria aplicar o método da decomposição de *Douglas-Rachford* aos operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} . Entretanto, o sinal de continência na relação anterior nos mostra que pode existir $\bar{p} \in \mathbb{R}^l$ tal que $0 \in \mathcal{T}(\bar{p})$, mas $0 \notin \mathcal{F}(\bar{p}) + \mathcal{G}(\bar{p})$, isto é, podemos ter $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \subset \text{Zer}(\mathcal{T})$ com $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \neq \text{Zer}(\mathcal{T})$ [7]. Existem algumas hipóteses tratadas em [12, 7] que podem ser adicionadas aos problemas (P) e (D) que garantem que $\mathcal{F} + \mathcal{G} = \mathcal{T}$ e portanto, $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G}) = \text{Zer}(\mathcal{T})$. Em contrapartida, existência da tripla *Kuhn-Tucker* é suficiente para garantir que $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ é um conjunto não vazio.

Proposição 3.3.1. *Se o problema primal (P) admite uma tripla Kuhn-Tucker $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$, então, $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ é não vazio.*

Demonstração. Para mostrar esse resultado, procedemos de forma semelhante ao feita para demonstrar a Proposição 3.2.3. Como por hipótese $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{p})$ é uma tripla *Kuhn-*

Tucker para o problema (P), valem as implicações:

$$\begin{aligned}
0 \in \partial f(\bar{x}) + A^t \bar{p} &\Rightarrow -A^t \bar{p} \in \partial f(\bar{x}) \\
&\Rightarrow \bar{x} \in \partial f^*(-A^t \bar{p}) && \text{(Prop. 1.3.9)} \\
&\Rightarrow -A\bar{x} \in -A\partial f^*(-A^t \bar{p}) \\
&\Rightarrow -A\bar{x} \in \partial [f^* \circ (-A^t)](\bar{p}) && \text{(Prop. 1.3.8)} \\
&\Rightarrow -A\bar{x} \in \mathcal{F}(\bar{p}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \in \partial g(\bar{w}) + B^t \bar{p} &\Rightarrow -B^t \bar{p} \in \partial g(\bar{w}) \\
&\Rightarrow \bar{w} \in \partial g^*(-B^t \bar{p}) && \text{(Prop. 1.3.9)} \\
&\Rightarrow -B\bar{w} \in -B\partial g^*(-B^t \bar{p}) \\
&\Rightarrow -B\bar{w} \in \partial [g^* \circ (-B^t)](\bar{p}) && \text{(Prop. 1.3.8)} \\
&\Rightarrow -B\bar{w} + c \in \partial [g^* \circ (-B^t)](\bar{p}) + c \\
&\Rightarrow -B\bar{w} + c \in \partial [g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](\bar{p}) && \text{(Lema 3.2.1)} \\
&\Rightarrow -B\bar{w} + c \in \mathcal{G}(\bar{p}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-(A\bar{x} + B\bar{w} - c) \in \mathcal{F}(\bar{p}) + \mathcal{G}(\bar{p}).$$

Como por hipótese \bar{x} e \bar{w} satisfazem $A\bar{x} + B\bar{w} - c = 0$, então

$$0 \in \mathcal{F}(\bar{p}) + \mathcal{G}(\bar{p}).$$

Assim, $\bar{p} \in \text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$, o que por sua vez implica que $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \neq \emptyset$. ■

Mostraremos a seguir que os operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} são monótonos maximais.

Proposição 3.3.2. *Se o problema primal (P) admite uma tripla Kuhn-Tucker, então, os operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} são monótonos maximais.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2.1, as funções $f^*(-A^t p)$ e $g^*(-B^t p) + \langle c, p \rangle$ são con-

vexas, próprias e fechadas. Dessa forma, pela Proposição 2.2.1, \mathcal{F} e \mathcal{G} são monótonos maximais. ■

Finalmente, apresentamos o resultado que garante a convergência do método ADMM generalizado.

Teorema 3.3.1. *Considere o problema (P) e sejam dados $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $w^0 \in \mathbb{R}^n$, $p^0 \in \mathbb{R}^l$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 0$. Considere também as seqüências (μ_k) , (ν_k) e (ρ_k) de números reais tais que:*

- $\mu_k \geq 0$ para todo k e $\sum \mu_k < +\infty$.
- $\nu_k \geq 0$ para todo k e $\sum \nu_k < +\infty$.
- $\rho_k \in (0, 2)$ para todo k e $0 < \liminf \rho_k \leq \limsup \rho_k < 2$.

Tome seqüências (x^k) , (w^k) e (p^k) tais que para todo k :

- $\|x^{k+1} - \tilde{x}^k\| \leq \mu_k$.
- $\|w^{k+1} - \tilde{w}^k\| \leq \nu_k$.
- $p^{k+1} = p^k + \lambda(\rho_k Ax^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw^{k+1} - c)$,

em que

$$\tilde{x}^k \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ f(x) + \langle p^k, Ax \rangle + \frac{1}{2} \lambda \|Ax + Bw^k - c\|^2 \right\},$$

$$\tilde{w}^k \in \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(w) + \langle p^k, Bw \rangle + \frac{1}{2} \lambda \|\rho_k Ax^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw - c\|^2 \right\}.$$

Então, se (P) possui uma tripla Kuhn-Tucker, valem as afirmações

- 1) p^k converge para uma solução do dual (D).
- 2) $Ax^k + Bw^k - c \rightarrow 0$.
- 3) $f(\tilde{x}^k) + g(\tilde{w}^k) \rightarrow \bar{\tau}$.

4) Toda subsequência convergente (x^{k_j}, w^{k_j}) tem como ponto limite uma solução do problema primal (P).

Demonstração. Considere as sequências (z^k) e (q^k) de elementos do \mathbb{R}^l e as sequências (α_k) e (β_k) de números reais construídas da forma

- $z^k := p^k + \lambda(c - Bw^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$
- $q^k := p^k + \lambda(Ax^{k+1} + Bw^k - c), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$
- $\alpha_k := \lambda\|A\|\mu_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$
- $\beta_0 := \|p^0 - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^0)\|.$
- $\beta_k := \lambda\|B\|\nu_{k-1}, \quad \forall k = 1, 2, \dots$

A fim de utilizar o Teorema 2.4.2, devemos mostrar que

- I) \mathcal{F} e \mathcal{G} são monótonos maximais.
- II) (α_k) e (β_k) são sequências somáveis de números não negativos.
- III) $\rho_k \in (0, 2)$ para todo k e $0 < \inf \rho_k \leq \sup \rho_k < 2$.
- IV) $\|p^k - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^k)\| \leq \beta_k \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$
- V) $\|q^k - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{F}}(2p^k - z^k)\| \leq \alpha_k \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$
- VI) $z^{k+1} = z^k + \rho_k(q^k - p^k) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$

Como por hipótese, o problema (P) possui uma tripla *Kuhn-Tucker*, podemos aplicar a Proposição 3.3.2 e concluir que \mathcal{F} e \mathcal{G} são operadores monótonos maximais. Dessa maneira, provamos (I).

Observação 3.3.1. Note que utilizamos da existência da tripla *Kuhn-Tucker* somente para garantir que $f^*(-A^t p)$ e $g^*(-B^t p) + \langle c, p \rangle$ são próprias. Assim, se houver outra hipótese que garanta esse fato, não há a necessidade de invocar a existência da tripla nesse momento. Uma hipótese desse tipo é a de que as matrizes A e B possuem posto coluna completo. Nesse caso, A^t e B^t possuem posto linha completo e então, $f^*(-A^t p)$ e $g^*(-B^t p) + \langle c, p \rangle$ são próprias por consequência do Lema 1.2.1.

Agora, observe que as sequências (α_k) e (β_k) estão definidas de forma que, para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, tenhamos $\alpha_k \geq 0$ e $\beta_k > 0$. Note também que, como por hipótese as somas $\sum \mu_k$ e $\sum \nu_k$ são finitas, então, as $\sum \alpha_k$ e $\sum \beta_k$ também são somas finitas. De fato

$$\begin{aligned}\sum \alpha_k &= \lambda \|A\| \sum \mu_k < +\infty. \\ \sum \beta_k &= \|p^0 - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^0)\| + \lambda \|B\| \sum \nu_k < +\infty.\end{aligned}$$

Assim, provamos (II). Note que (III) é válida por hipótese.

Agora, resta demonstrar (IV), (V) e (VI). Para tal, mostraremos as seguintes relações:

- (IV) é válido para $k = 0$.
- Se (IV) válido para k , então, (V) válido para k .
- Se (V) válido para k , então, (VI) válido para k e (IV) para $k + 1$.

Dessa forma, iremos concluir por indução que (IV), (V) e (VI) são válidos para todo $k = 0, 1, 2, \dots$

- (IV) é válido para $k = 0$: observe que (IV) é válido para $k = 0$ pela própria definição de β_0 . De fato, vale a igualdade

$$\|p^0 - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^0)\| = \beta_0.$$

Logo, (IV) é válida para $k = 0$.

- Se (IV) válido para k , então, (V) válido para k : pela definição de \tilde{x}^k , temos que

$$0 \in \partial \left[f(x) + \langle p^k, Ax \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Ax + Bw^k - c\|^2 \right] \Big|_{x=\tilde{x}^k}. \quad (16)$$

Como $f(x)$ é por hipótese uma função convexa e própria, então, $\text{dom}(f)$ é um conjunto convexo e não vazio, logo, pela Proposição 1.1.2, $\text{ri}(\text{dom}(f))$ é não vazio. Agora, como

$\langle p^k, Ax \rangle + \frac{1}{2}\lambda\|Ax + Bw^k - c\|^2$ é uma função convexa real diferenciável, logo, o interior relativo de seu domínio efetivo é o próprio \mathbb{R}^m . Dessa maneira, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ vale

$$\begin{aligned} & \partial \left[f(x) + \langle p^k, Ax \rangle + \frac{\lambda}{2}\|Ax + Bw^k - c\|^2 \right] = \\ & = \partial f(x) + \partial \left[\langle p^k, Ax \rangle + \frac{\lambda}{2}\|Ax + Bw^k - c\|^2 \right] \\ & = \partial f(x) + A^t p^k + \lambda A^t (Ax + Bw^k - c) \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a relação em (16) da forma

$$0 \in \partial f(\tilde{x}^k) + A^t(p^k + \lambda(A\tilde{x}^k + Bw^k - c)). \quad (17)$$

Definindo

$$\tilde{p}^k := p^k + \lambda(A\tilde{x}^k + Bw^k - c),$$

temos

$$0 \in \partial f(\tilde{x}^k) + A^t \tilde{p}^k.$$

Essa relação nos permite concluir que

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(\tilde{x}^k) + A^t \tilde{p}^k & \Rightarrow -A^t \tilde{p}^k \in \partial f(\tilde{x}^k) \\ & \Rightarrow \tilde{x}^k \in \partial f^*(-A^t \tilde{p}^k) && \text{(Prop. 1.3.9)} \\ & \Rightarrow -A\tilde{x}^k \in -A\partial f^*(-A^t \tilde{p}^k) \\ & \Rightarrow -A\tilde{x}^k \in \partial [f^* \circ (-A^t)](\tilde{p}^k) && \text{(Prop. 1.3.8)} \\ & \Rightarrow -A\tilde{x}^k \in \mathcal{F}(\tilde{p}^k). \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \tilde{p}^k = p^k + \lambda(A\tilde{x}^k + Bw^k - c) & \Rightarrow \tilde{p}^k + \lambda(-A\tilde{x}^k) = p^k + \lambda(Bw^k - c) \\ & = 2p^k - z^k. \end{aligned}$$

Tendo essas relações, então

$$\left. \begin{array}{l} -A\tilde{x}^k \in \mathcal{F}(\tilde{p}^k) \\ \tilde{p}^k + \lambda(-A\tilde{x}^k) = 2p^k - z^k \end{array} \right\} \Rightarrow 2p^k - z^k = \tilde{p}^k + \lambda(-A\tilde{x}^k) \in (I + \lambda\mathcal{F})(\tilde{p}^k).$$

Assim,

$$\tilde{p}^k = (I + \lambda\mathcal{F})^{-1}(2p^k - z^k) = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{F}}(2p^k - z^k),$$

em que a igualdade $\tilde{p}^k = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{F}}(2p^k - z^k)$ vem do fato de que o operador \mathcal{F} é monótono maximal, e portanto, o resolvente $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{F}}$ é, pela Proposição 2.1.3, um operador não-expansivo firme que possui domínio completo.

$$\begin{aligned} q^k - \tilde{p}^k &= p^k + \lambda(Ax^{k+1} + Bw^k - c) - (p^k + \lambda(A\tilde{x}^k + Bw^k - c)) \\ &= \lambda A(x^{k+1} - \tilde{x}^k). \end{aligned}$$

Finalmente, podemos concluir que se (IV) válido para k , então, (V) válido para k . De fato

$$\begin{aligned} \|q^k - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{F}}(2p^k - z^k)\| &= \|q^k - \tilde{p}^k\| \\ &= \|\lambda A(x^{k+1} - \tilde{x}^k)\| \\ &\leq \lambda \|A\| \|x^{k+1} - \tilde{x}^k\| \\ &\leq \lambda \|A\| \mu_k \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|q^k - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{F}}(2p^k - z^k)\| \leq \alpha_k.$$

- Se (V) válido para k , então, (VI) válido para k e (IV) para $k + 1$: pela definição de \tilde{w}^k ,

temos que

$$0 \in \partial \left[g(w) + \langle p^k, Bw \rangle + \frac{\lambda}{2} \left\| \rho_k A x^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw - c \right\|^2 \right] \Big|_{w=\tilde{w}^k}. \quad (18)$$

Pelos mesmos argumentos utilizados para expandir o subdiferencial em (16), temos para todo $w \in \mathbb{R}^n$ que

$$\begin{aligned} & \partial \left[g(w) + \langle p^k, Bw \rangle + \frac{\lambda}{2} \left\| \rho_k A x^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw - c \right\|^2 \right] = \\ & = \partial g(w) + \partial \left[\langle p^k, Bw \rangle + \frac{\lambda}{2} \left\| \rho_k A x^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw - c \right\|^2 \right] \\ & = \partial g(w) + A^t p^k + \lambda A^t (\rho_k A x^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw - c). \end{aligned}$$

Assim, reescrevemos (18) na forma

$$0 \in \partial g(\tilde{w}^k) + A^t (p^k + \lambda (\rho_k A x^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + B\tilde{w}^k - c)). \quad (19)$$

Definindo

$$\tilde{s}^k := p^k + \lambda (\rho_k A x^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + B\tilde{w}^k - c),$$

e substituindo em (19), temos

$$0 \in \partial g(\tilde{w}^k) + B^t \tilde{s}^k.$$

Note que

$$\begin{aligned}
0 \in \partial g(\tilde{w}^k) + B^t \tilde{s}^k &\Rightarrow -B^t \tilde{s}^k \in \partial g(\tilde{w}^k) \\
&\Rightarrow \tilde{w}^k \in \partial g^*(-B^t \tilde{s}^k) && \text{(Prop. 1.3.9)} \\
&\Rightarrow -B\tilde{w}^k \in -B\partial g^*(-B^t \tilde{s}^k) \\
&\Rightarrow -B\tilde{w}^k \in \partial [g^* \circ (-B^t)](\tilde{s}^k) && \text{(Prop. 1.3.8)} \\
&\Rightarrow -B\tilde{w}^k + c \in \partial [g^* \circ (-B^t)](\tilde{s}^k) + c \\
&\Rightarrow -B\tilde{w}^k + c \in \partial [g^* \circ (-B^t) + \langle c, \cdot \rangle](\tilde{s}^k) && \text{(Lema 3.2.1)} \\
&\Rightarrow -B\tilde{w}^k + c \in \mathcal{G}(\tilde{s}^k).
\end{aligned}$$

Agora, seja (s^k) uma sequência de elementos de \mathbb{R}^l definida por

$$s^k := z^k + \rho_k(q^k - p^k).$$

Substituindo os valores de z^k e de q^k na definição de s^k , obtemos que:

$$\begin{aligned}
s^k &= z^k + \rho_k(q^k - p^k) \\
&= p^k + \lambda(\rho_k A x^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c)).
\end{aligned}$$

Pela definição de \tilde{s}^k , temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{s}^k + \lambda(c - B\tilde{w}^k) &= p^k + \lambda(\rho_k A x^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c)) \\
&= s^k.
\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\left. \begin{aligned} c - B\tilde{w}^k &\in \mathcal{G}(\tilde{s}^k) \\ \tilde{s}^k + \lambda(c - B\tilde{w}^k) &= s^k \end{aligned} \right\} \Rightarrow s^k = \tilde{s}^k + \lambda(c - B\tilde{w}^k) \in (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{G})(\tilde{s}^k).$$

Logo,

$$\tilde{s}^k = (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{G})^{-1}(s^k) = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(s^k).$$

Como \mathcal{G} é um operador monótono maximal, sabemos pela Proposição 2.1.3 que $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}$ é

um operador não-expansivo firme com domínio completo. Por isso, podemos considerar a igualdade $\tilde{s}^k = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(s^k)$

Agora, observe que $z^{k+1} = s^k$, de fato

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= p^{k+1} + \lambda(c - Bw^{k+1}) \\ &= p^k + \lambda(\rho_k Ax^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c) + Bw^{k+1} - c) + \lambda(c - Bw^{k+1}) \\ &= p^k + \lambda(\rho_k Ax^{k+1} - (1 - \rho_k)(Bw^k - c)) \\ &= s^k. \end{aligned}$$

Como temos por definição que $s^k = z^k + \rho_k(q^k - p^k)$, então

$$z^{k+1} = z^k + \rho_k(q^k - p^k).$$

Logo, conclui-se que se (V) é válido para k , então, (VI) é válido para k . Resta mostrar que (IV) é válido para $k + 1$.

Note que

$$p^{k+1} - \tilde{s}^k = \lambda B(w^{k+1} - \tilde{w}^k).$$

Portanto, como $\tilde{s}^k = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^k)$

$$\begin{aligned} \|p^{k+1} - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^k)\| &= \|p^{k+1} - \tilde{s}^k\| \\ &= \|\lambda B(w^{k+1} - \tilde{w}^k)\| \\ &\leq \lambda \|B\| \|w^{k+1} - \tilde{w}^k\| \\ &\leq \beta_{k+1}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\|p^{k+1} - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^k)\| \leq \beta_{k+1}.$$

Assim, mostramos que se (V) é válido para k , então, (IV) é válido para $k + 1$. Com isto, finalizamos a demonstração dos itens (I) até (VI), logo, podemos aplicar o Teorema 2.4.2.

Observação 3.3.2. Até o momento, não utilizamos a existência da tripla, exceto para mostrar (I). Entretanto, como comentado na Observação 3.3.1, poderíamos ter mostrado

(I) sem a hipótese da existência de uma tripla *Kuhn-Tucker*. Nesse caso, utilizaríamos da tripla pela primeira vez no momento a seguir.

Como estamos assumindo a hipótese da existência de uma tripla *Kuhn-Tucker*, temos pela Proposição 3.3.1, temos que $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ é um conjunto não vazio. Dessa forma, pelo Teorema 2.4.2, temos que a sequência z^k converge para um elemento \bar{z} tal que

$$\bar{z} \in \bar{\mathcal{Z}}_{\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}} = \{p + \lambda v \mid v \in \mathcal{G}(p), -v \in \mathcal{F}(p)\}.$$

Isto é, $z^k \rightarrow \bar{z}$, em que \bar{z} é escrito na forma

$$\bar{z} = \bar{p} + \lambda \bar{v}, \text{ com } \bar{v} \in \mathcal{G}(\bar{p}) \text{ e } -\bar{v} \in \mathcal{F}(\bar{p}).$$

Observe que pela Proposição 2.4.2, $\bar{p} \in \text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$.

Observação 3.3.3. Se a existência de uma tripla não fosse necessária para provar (I), como comentado na Observação 3.3.1, e fosse usada somente para garantir que $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ é não vazio, poderíamos também concluir pelo Teorema (2.4.2) que, se o problema dual (D) não tem solução, então, a sequência (z^k) é ilimitada. Dessa forma, teríamos que ao menos uma das sequências (p^k) e $(c - Bw^k)$ seria ilimitada.

Seja

$$v^k = c - Bw^k.$$

Temos então pela definição da sequência (z^k) que

$$z^k = p^k + \lambda v^k.$$

Mostraremos a seguir que $p^k \rightarrow \bar{p}$ e que $v^k \rightarrow \bar{v}$.

Como \mathcal{G} é um operador monótono maximal, temos pela Proposição 2.1.3 que $\mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}$ é não-expansivo firme com domínio completo. Dessa forma, $\mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}$ define uma função Lipschitz com constante 1, portanto, $\mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}$ define uma função contínua. Devido à continuidade de $\mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}$, como temos que $z^k \rightarrow \bar{z}$, então,

$$\mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}(z^k) \rightarrow \mathcal{J}_{\lambda \mathcal{G}}(\bar{z}).$$

Como $\bar{z} = \bar{p} + \lambda\bar{v}$ e $\bar{v} \in \mathcal{G}(\bar{p})$, temos que

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z} = \bar{p} + \lambda\bar{v} \\ \bar{v} \in \mathcal{G}(\bar{p}) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{z} = \bar{p} + \lambda\bar{v} \in (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{G})(\bar{p}),$$

logo,

$$\bar{p} = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(\bar{z}).$$

Assim, $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^k) \rightarrow \bar{p}$.

A partir de (IV), temos que para todo k vale que

$$\|p^k - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{G}}(z^k)\| \leq \beta_k.$$

Como (β_k) possui soma finita, então, $\beta_k \rightarrow 0$. Logo, tomando o limite $k \rightarrow +\infty$ na relação anterior, obtemos que

$$p^k \rightarrow \bar{p}.$$

Como $\bar{p} \in \text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$, \bar{p} é solução do dual (D). Dessa forma, a sequência (p^k) converge para uma solução do dual.

Agora, observe que

$$v^k = \frac{1}{\lambda}(z^k - p^k).$$

Logo, $v^k = c - Bw^k$ deve convergir para $\bar{v} = \frac{1}{\lambda}(\bar{z} - \bar{p})$. Ainda, temos que

$$v^k = c - Bw^k \Rightarrow Bw^k \rightarrow c - \bar{v}. \quad (20)$$

Note que isso não implica a convergência de w^k .

Considere a sequência (r^k) definida por

$$r^k := Ax^k + bw^k - c.$$

Ou seja, r^k é definida pelo resíduo na iteração k . Mostraremos agora que $r^k \rightarrow 0$.

A partir da fórmula para cálculo de p^{k+1} , temos

$$\rho_k(Ax^{k+1} + Bw^k - c) = \frac{1}{\lambda}(p^{k+1} - p^k) + Bw^k - Bw^{k+1}.$$

Tomando o limite $k \rightarrow +\infty$ nessa relação e sabendo da convergência de p^k e de Bw^k e do fato de que $0 < \inf \rho_k$, obtemos,

$$Ax^{k+1} + Bw^k - c \rightarrow 0.$$

Note que ainda não temos o resíduo r^k à esquerda, entretanto, a partir do fato de que $Ax^{k+1} + Bw^k - c \rightarrow 0$, vemos que,

$$Ax^{k+1} \rightarrow \bar{v}.$$

Logo,

$$Ax^k \rightarrow \bar{v}. \tag{21}$$

Assim,

$$r^k = Ax^k + Bw^k - c \rightarrow 0.$$

Agora, veremos que $f(\tilde{x}^k) + g(\tilde{w}^k) \rightarrow \bar{\tau}$. Para tal considere as sequências (\tilde{u}^k) e (\tilde{r}^k) definidas por

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^k &:= f(\tilde{x}^k) + g(\tilde{w}^k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \\ \tilde{r}^k &:= A\tilde{x}^k + B\tilde{w}^k - c, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Queremos mostrar que $\tilde{\tau}^k \rightarrow \bar{\tau}$. Vimos anteriormente que

$$\begin{aligned} Ax^k &\rightarrow \bar{v}, \\ Bw^k &\rightarrow c - \bar{v}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\|x^{k+1} - \tilde{x}^k\| \leq \mu_k \Rightarrow \|Ax^{k+1} - A\tilde{x}^k\| \leq \|A\|\mu_k.$$

Portanto, tomando $k \rightarrow +\infty$, podemos concluir que

$$A\tilde{x}^k \rightarrow \bar{v}.$$

Utilizando a mesma abordagem na sequência (\tilde{w}^k) , conclui-se que

$$B\tilde{w}^k \rightarrow c - \bar{v}.$$

Dessa forma, temos também que

$$\tilde{r}^k \rightarrow 0.$$

Com esses resultados, temos que

$$\tilde{p}^k \rightarrow \bar{p},$$

$$\tilde{s}^k \rightarrow \bar{p}.$$

Considere $(\hat{x}, \hat{w}, \hat{p}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ uma tripla *Kuhn-Tucker* associada ao problema (P), isto é,

$$A\hat{x} + B\hat{w} - c = 0,$$

$$0 \in \partial f(\hat{x}) + A^t \hat{p},$$

$$0 \in \partial g(\hat{w}) + B^t \hat{p}.$$

Note que

$$0 \in \partial f(\hat{x}) + A^t \hat{p} \Rightarrow -A^t \hat{p} \in \partial f(\hat{x}).$$

Dessa forma, pela definição de subdiferencial, vale para todo $x \in \mathbb{R}^m$ a desigualdade

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \langle -A^t \hat{p}, x - \hat{x} \rangle.$$

Abrindo o produto interno e reagrupando os termos, obtemos que

$$f(x) + \langle \hat{p}, Ax \rangle \geq f(\hat{x}) + \langle \hat{p}, A\hat{x} \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Procedendo de forma equivalente com a relação $0 \in \partial g(\hat{w}) + B^t \hat{p}$, tem-se que

$$g(w) + \langle \hat{p}, Bw \rangle \geq g(\hat{w}) + \langle \hat{p}, B\hat{w} \rangle, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

Somando as duas relações anteriores e adicionando $\langle \hat{p}, -c \rangle$ em ambos os lados do resultado, temos que vale para todos $x \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$ a desigualdade

$$f(x) + g(w) + \langle \hat{p}, Ax + Bw - c \rangle \geq f(\hat{x}) + g(\hat{w}) + \langle \hat{p}, A\hat{x} + B\hat{w} - c \rangle.$$

Como $(\hat{x}, \hat{w}, \hat{p})$ é uma tripla *Kuhn-Tucker*, (\hat{x}, \hat{w}) é solução de (P), logo $f(\hat{x}) + g(\hat{w}) = \bar{\tau}$ e $A\hat{x} + B\hat{w} - c = 0$, assim,

$$f(x) + g(w) + \langle \hat{p}, Ax + Bw - c \rangle \geq \bar{\tau}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n.$$

Em especial, a desigualdade anterior vale com $x = \tilde{x}^k$ e $w = \tilde{w}^k$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, assim, temos

$$f(\tilde{x}^k) + g(\tilde{w}^k) + \langle \hat{p}, A\tilde{x}^k + B\tilde{w}^k - c \rangle \geq \bar{\tau}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicando as definições de $\tilde{\tau}^k$ e \tilde{r}^k e ajustar os termos, obtemos

$$-\langle \hat{p}, \tilde{r}^k \rangle \leq \tilde{\tau}^k - \bar{\tau}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Pela relação em (17), utilizando a definição de \tilde{p}^k , temos

$$0 \in \partial f(\tilde{x}^k) + A^t \tilde{p}^k.$$

Isso implica que \tilde{x}^k minimiza a função

$$f(x) + \langle \tilde{p}^k, Ax \rangle$$

De forma análoga, podemos concluir que \tilde{w}^k minimiza a função

$$g(w) + \langle \tilde{s}^k, Bw \rangle.$$

Portanto, temos para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ que

$$\begin{aligned} f(x) + \langle \tilde{p}^k, Ax \rangle &\geq f(\tilde{x}^k) + \langle \tilde{p}^k, A\tilde{x}^k \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \\ g(w) + \langle \tilde{s}^k, Bw \rangle &\geq g(\tilde{w}^k) + \langle \tilde{s}^k, B\tilde{w}^k \rangle, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Em especial, as desigualdades anteriores valem para $x = \hat{x}$ e \hat{w} . Somando as desigualdades anteriores para $x = \hat{x}$ e \hat{w} e utilizando as definições $\tilde{\tau}^k$ e $\bar{\tau}$, temos

$$\bar{\tau} + \langle \tilde{p}^k, A\hat{x} \rangle + \langle \tilde{s}^k, B\hat{w} \rangle \geq \tilde{\tau}^k + \langle \tilde{p}^k, A\tilde{x}^k \rangle + \langle \tilde{s}^k, B\tilde{w}^k \rangle. \quad (23)$$

Como $(\hat{x}, \hat{w}, \hat{p})$ é uma tripla *Kuhn-Tucker*, temos

$$A\hat{x} = c - B\hat{w}.$$

Pela definição do resíduo \tilde{r}^k , temos também que

$$A\tilde{x}^k = \tilde{r}^k + c - B\tilde{w}^k.$$

Substituindo essas duas identidades em (23) e reagrupando os termos, obtemos para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ a desigualdade

$$\bar{\tau} + \langle \tilde{p}^k, c \rangle + \langle \tilde{s}^k - \tilde{p}^k, B\hat{w} \rangle \geq \tilde{\tau}^k + \langle \tilde{p}^k, \tilde{r}^k + c \rangle + \langle \tilde{s}^k - \tilde{p}^k, B\tilde{w}^k \rangle.$$

Que simplificada, pode ser escrita como

$$\tilde{\tau}^k - \bar{\tau} \leq \langle \tilde{p}^k - \tilde{s}^k, B\tilde{w}^k - B\hat{w} \rangle - \langle \tilde{p}^k, \tilde{r}^k \rangle, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Unindo as desigualdades (22) e (24), temos que para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, vale

que

$$-\langle \hat{p}, \tilde{r}^k \rangle \leq \tilde{\tau}^k - \bar{\tau} \leq \langle \tilde{p}^k - \tilde{s}^k, B\tilde{w}^k - B\hat{w} \rangle - \langle \tilde{p}^k, \tilde{r}^k \rangle.$$

Como vimos que $\tilde{r}^k \rightarrow 0$, temos que $\langle \tilde{p}^k - \tilde{s}^k, \rightarrow \rangle 0$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} B\tilde{w}^k - B\hat{w} &\rightarrow c - \bar{v} - B\hat{w}, \\ \tilde{p}^k &\rightarrow \bar{p}, \\ \tilde{s}^k &\rightarrow \bar{p} \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \tilde{p}^k - \tilde{s}^k, B\tilde{w}^k - B\hat{w} \rangle - \langle \tilde{p}^k, \tilde{r}^k \rangle \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\tilde{\tau}^k - \bar{\tau} \Rightarrow \tilde{\tau}^k \rightarrow \bar{\tau}.$$

Agora, considere uma subsequência (x^{k_j}, w^{k_j}) de (x^k, w^k) tal que (x^{k_j}, w^{k_j}) seja convergente, digamos para (\bar{x}, \bar{w}) . Note primeiramente que o par (\bar{x}, \bar{w}) deve satisfazer $A\bar{x} + B\bar{w} - c = 0$, pois caso contrário, teríamos uma contradição com o fato de que $r^k \rightarrow 0$.

Como para todo k temos

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - \tilde{x}^k\| &\leq \mu_k, \\ \|w^{k+1} - \tilde{w}^k\| &\leq \nu_k. \end{aligned}$$

vale que

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{k_j-1} &\rightarrow \bar{x}, \\ \tilde{w}^{k_j-1} &\rightarrow \bar{w}. \end{aligned}$$

Como a soma f e g são funções convexas, próprias e fechadas, pela Proposição 1.2.1, f e g são inferiormente semicontínuas, logo

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq \liminf f(\tilde{x}^{k_j-1}), \\ g(\bar{w}) &\leq \liminf g(\tilde{w}^{k_j-1}). \end{aligned}$$

Somando as desigualdades anteriores, e aplicando a Proposição 4.0.1

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) + g(\bar{w}) &\leq \liminf f(\tilde{x}^{k_j-1}) + \liminf g(\tilde{w}^{k_j-1}) \\ &\leq \liminf (f(\tilde{x}^{k_j-1}) + g(\tilde{w}^{k_j-1})) \\ &= \bar{\tau}. \end{aligned}$$

Como (\bar{x}, \bar{w}) é viável para o problema (P), $f(\bar{x}) + g(\bar{w}) < \bar{\tau}$ é impossível pela própria definição de $\bar{\tau}$. Logo, $f(\bar{x}) + g(\bar{w}) = \bar{\tau}$ e assim, o par (\bar{x}, \bar{w}) é solução do problema (P). ■

Vale ressaltar que sob a hipótese de existência de uma tripla *Kuhn-Tucker* no Teorema 3.3.1, a sequência (p^k) sempre converge, mesmo que o problema dual (D) possua mais de uma solução. Veja que isso não ocorre com as sequências (x^k) e (w^k) , que podem não convergir, mas sim, ter subsequências convergentes para uma solução do primal (P).

Outro ponto importante a ser mencionado se refere à convergência de $f(x^k) + g(w^k)$ ao valor ótimo. O Teorema 3.3.1 estabelece que $f(\tilde{x}^k) + g(\tilde{w}^k)$ converge para o valor ótimo $\bar{\tau}$, entretanto, o mesmo não ocorre para $f(x^k) + g(w^k)$. Note que pelas definições de \tilde{x}^k e de \tilde{w}^k , $\tilde{x}^k \in \text{dom}(f)$ e de $\tilde{w}^k \in \text{dom}(g)$ para todo k . Mas isso pode não ser verdade para os termos x^k e w^k , que por hipótese, satisfazem somente

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - \tilde{x}^k\| &\rightarrow \mu_k \\ \|w^{k+1} - \tilde{w}^k\| &\rightarrow \nu_k. \end{aligned}$$

Dessa forma, não é possível garantir que $x^{k+1} \in \text{dom}(f)$ e $w^{k+1} \in \text{dom}(g)$. O corolário enunciado a seguir nos mostra uma maneira de garantir a convergência de $f(x^k) + g(w^k)$ ao valor ótimo $\bar{\tau}$.

Corolário 3.3.1. *Se f e g são funções reais, então, $f(x^k) + g(w^k) \rightarrow \bar{\tau}$.*

Demonstração. Se f e g são funções convexas reais, ou seja, não assumem valores nos reais estendidos, então, pela Proposição 1.2.2, f e g são funções contínuas. Temos por

hipótese que

$$\|x^{k+1} - \tilde{x}^k\| \rightarrow 0,$$

$$\|w^{k+1} - \tilde{w}^k\| \rightarrow 0.$$

Dessa forma, pela continuidade das funções f e g , temos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{k+1}) + g(w^{k+1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(\tilde{x}^k) + g(\tilde{w}^k) = \bar{\tau}.$$

Assim,

$$f(x^k) + g(w^k) \rightarrow \bar{\tau}.$$

■

Uma das desvantagens do ADMM é que não é possível garantir a convergência das sequências (x^k) e (w^k) . O que nos obriga a buscar por subsequências convergentes para determinar uma solução do problema (P). Esse comportamento decorre do fato de que os minimizadores \tilde{x}^k e \tilde{w}^k dos subproblemas podem não ser únicos, o que permite a existência de múltiplos pontos de acumulação na sequência definida por esses minimizadores, que por sua vez, são pontos de acumulação das sequências (x^k) e (w^k) . Entretanto, sob a hipótese de que as matrizes A e B possuem posto coluna completo, é possível garantir que, se (P) admite uma tripla *Kuhn-Tucker*, então, as sequências (x^k) e (w^k) convergem para uma solução de (P). Em um primeiro momento, essa hipótese parece ser restritiva, entretanto, muitas das aplicações do ADMM satisfazem essa condição, conforme veremos na próxima seção.

Além de garantir a convergência das sequências (x^k) e (w^k) , é possível mostrar que se o dual (D) não tem solução, então, ao menos uma das sequências (p^k) ou $(c - Bw^k)$ é ilimitada. Isso é interessante do ponto de vista prático pois, se verificado que ao menos uma das sequências (p^k) ou $(c - Bw^k)$ é ilimitada, é possível que o dual (D) não tenha solução.

Como mostrado em [8], uma maneira de assegurar a convergência de (x^k) e (w^k) seria por meio da unicidade dos minimizadores \tilde{x}^k e \tilde{w}^k dos subproblemas que decorre do posto coluna completo das matrizes A e B . Entretanto, podemos aproveitar

da convergência das sequências (Ax^k) e (Bw^k) .

Corolário 3.3.2. *Suponha que as matrizes A e B possuam posto coluna completo. Dessa forma, se o problema (P) admite uma tripla Kuhn-Tucker, então, as sequências (x^k) e (w^k) convergem para uma solução do problema primal (P). Caso contrário, ao menos uma das sequências (p^k) ou (v^k) é ilimitada, em que $v^k := c - Bw^k$ para todo k .*

Demonstração. Suponha que (P) possua uma tripla Kuhn-Tucker. Nesse caso, valem as conclusões (1) a (4) apresentadas no Teorema 3.3.1. Para mostrar a convergência das sequências (x^k) e (w^k) partiremos das relações (21) e (20), que estabelecem que

$$\begin{aligned} Ax^k &\rightarrow \bar{v}, \\ Bw^k &\rightarrow c - \bar{v}. \end{aligned}$$

Observe que

$$Ax^k \rightarrow \bar{v} \Rightarrow (A^t A)x^k \rightarrow A^t \bar{v}.$$

Como A possui posto coluna completo, temos que $A^t A$ possui inversa $(A^t A)^{-1}$. Dessa forma

$$(A^t A)x^k \rightarrow A^t \bar{v} \Rightarrow (A^t A)^{-1}(A^t A)x^k \rightarrow (A^t A)^{-1}A^t \bar{v}.$$

Logo,

$$x^k \rightarrow (A^t A)^{-1}A^t \bar{v}.$$

Como temos que B também possui posto coluna completo, podemos proceder de maneira análoga ao que foi feito com a sequência (Ax^k) e concluir que

$$w^k \rightarrow (B^t B)^{-1}B^t(c - \bar{v}).$$

Considere $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{aligned} \bar{x} &:= (A^t A)^{-1}A^t \bar{v}, \\ \bar{w} &:= (B^t B)^{-1}B^t(c - \bar{v}), \end{aligned}$$

de forma que

$$x^k \rightarrow \bar{x}, w^k \rightarrow \bar{w}.$$

Pela afirmação (4) no Teorema 3.3.1, o par (\bar{x}, \bar{w}) é solução do problema primal (P).

Agora, suponha que o problema (D) não possui solução. Como comentado nas Observações 3.3.1 e 3.3.3, a existência da tripla *Kuhn-Tucker* é usada somente em dois momentos. O primeiro deles ocorre para concluir que os operadores \mathcal{F} e \mathcal{G} são monótonos maximais. O segundo momento em que usamos essa hipótese ocorre quando aplicamos o resultado do Teorema 2.4.2, de forma a garantir pela Proposição 3.3.1 que $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ é não vazio.

Como agora temos por hipótese que A e B possuem posto coluna completo, vale que as transpostas A^t e B^t possuem posto linha completo. Assim, pela Proposição 1.2.3 em conjunto com o Lema 1.2.1, vale que $f^* \circ (-A^t)$ e $g^* \circ (-B^t)$ são funções convexas, próprias e fechadas, mesmo sem a existência da tripla *Kuhn-Tucker*. Isso nos permite aplicar o Teorema 2.4.2 na íntegra e invocar a existência da tripla somente para garantir que $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ é não vazio. Dessa forma, se o dual (D) não tem solução, o que implica que $\text{Zer}(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ é vazio, pelo Teorema 2.4.2, (z^k) é ilimitada, e portanto, ao menos uma das sequências (p^k) e (v^k) é uma sequência ilimitada. ■

3.4 Estruturas Adequadas ao ADMM

Apresentaremos nessa seção algumas estruturas de problemas que tornam o ADMM um algoritmo vantajoso. Particularmente, abordaremos a separabilidade por blocos e a separabilidade por componentes. Veremos que essas características permitem que a resolução dos subproblemas possam ser tratadas em paralelo, o que aumenta a eficiência do método em questão. Algumas outras estruturas adequadas ao uso do ADMM podem ser encontradas em [5].

Considere o problema (P) e suponha que a função f possa ser decomposta na

soma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m'} f_i(x_i),$$

em que $1 \leq m' \leq m$, $f_i : \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ são funções convexas, próprias e fechadas e $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ para todo $i = 1, \dots, m'$ com $\sum_{i=1}^{m'} m_i = m$. Nesse caso, se a matriz $A^t A$ for diagonal por blocos e a partição dos blocos for compatível com a partição em x , isto é, se temos

$$A^t A = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & D_{m'} \end{pmatrix},$$

em que $D_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ para todo $i = 1, \dots, m'$, então, o subproblema na variável x em (15) é separável. De fato, definindo $a^k := Bw^k - c$, expandindo o termo $\|Ax + a^k\|^2$, e então, ajustando os produtos internos e eliminando a constante $\frac{\lambda}{2}\|a^k\|^2$ no cálculo do minimizador, temos que o subproblema em x pode ser escrito na forma

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \mathcal{L}_\lambda(x, w^k, p^k) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ f(x) + \langle A^t(p^k + \lambda a^k), x \rangle + \frac{\lambda}{2} x^t (A^t A) x \right\},$$

Definindo $d^k := A^t(p^k + \lambda a^k)$ e particionando d^k de forma apropriada, é possível separar o subproblema na forma

$$\tilde{x}_i^k \in \arg \min_{x_i \in \mathbb{R}^{m_i}} \left\{ f_i(x_i) + \langle d_i^k, x_i \rangle + \frac{\lambda}{2} \|D_i x_i\|^2 \right\}, \quad \forall i = 1, \dots, m'.$$

Quando um problema possui tal característica, dizemos que ele é separável por blocos. Ressaltamos que todo esse processo pode também ser feito para a função g e para a variável w . Note que um problema separável por blocos é paralelizável, o que para fins práticos é uma propriedade com muito potencial e deve ser explorada.

Um caso particular dos problemas separáveis por blocos são os problemas separáveis por componente. Nesse caso, temos $m' = m$ e $m_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, m'$ e ainda, $A^t A$ uma matriz diagonal. Como na separabilidade por componentes o subproblema na variável x pode ser separado em m minimizações de funções reais, em muitos

casos é possível determinar fórmulas fechadas para o cálculo de cada \tilde{x}_i^k , o que é algo muito vantajoso no ponto de vista prático.

Um exemplo muito comum de problema separável por componentes ocorre quando temos $A = I$ e ainda

$$f(x) = \alpha \|x\|_1,$$

em que α é um escalar positivo e $\|x\|_1$ denota a norma-1 do vetor x , isto é

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|.$$

No contexto do Teorema 3.3.1, a atualização de \tilde{x}^k considerando a separabilidade em componentes

$$\tilde{x}_i^k := \arg \min_{x_i \in \mathbb{R}} \left\{ |x_i| + \frac{1}{2\frac{\alpha}{\lambda}} \left(x_i + (Bw^k - c)_i + \frac{1}{\lambda} p_i^k \right)^2 \right\}.$$

Observe que o termo à direita é o operador proximal da função $\frac{\alpha}{\lambda}|x|$, isto é

$$\tilde{x}_i^k = \text{prox}_{\frac{\alpha}{\lambda}|x|} \left(-(Bw^k - c)_i - \frac{1}{\lambda} p_i^k \right), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Existe uma fórmula fechada para o cálculo de $\text{prox}_{\gamma|x|}(y)$, desenvolvida por exemplo em [3, Lema 6.5], dada por

$$\text{prox}_{\gamma|x|}(y) = \mathcal{S}_\gamma(y),$$

em que $\mathcal{S}_\gamma(y)$ é operador de limiar suave (*soft thresholding*), isto é

$$\mathcal{S}_\gamma(y) := \begin{cases} y - \gamma, & \text{se } y \geq \gamma, \\ 0, & \text{se } |y| < \gamma, \\ y + \gamma, & \text{se } y \leq -\gamma. \end{cases}$$

Dessa forma, temos

$$\tilde{x}_i^k = \mathcal{S}_{\frac{\alpha}{\lambda}} \left(-(Bw^k - c)_i - \frac{1}{\lambda} p_i^k \right), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Ressaltamos que como existe uma fórmula fechada para o subproblema em x , podemos fazer $x^{k+1} := \tilde{x}^k$.

3.5 Aplicações a Problemas Estruturados

Começamos um breve estudo de alguns problemas que possuem estruturas adequadas para a aplicação do método ADMM. Iniciaremos introduzindo uma abordagem ADMM para problemas convexos genéricos, dados por

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & x \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

em que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é uma função convexa, própria e fechada e $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo, fechado e não vazio.

Para transformar esse problema no formato do problema (P), levamos as restrições ao objetivo via função indicadora. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ w \in \mathbb{R}^m}} \quad & f(x) + \Phi_{\mathcal{C}}(w) \\ \text{s.a} \quad & x - w = 0. \end{aligned}$$

Note que como \mathcal{C} é convexo, fechado e não vazio, $\Phi_{\mathcal{C}}$ é uma função convexa, própria e fechada. Fazendo as associações com o problema (P), temos:

- $g(w) = \Phi_{\mathcal{C}}(w)$;
- $A = I$;
- $B = -I$;
- $c = 0$;

No contexto do Teorema 3.3.1, tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{x}^k &\in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ f(x) + \langle p^k, x \rangle + \frac{\lambda}{2} \|x - w^k\|^2 \right\}, \\ \tilde{w}^k &:= \text{Proj}_{\mathcal{C}}(\rho_k x^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k + \frac{1}{\lambda}p^k), \\ p^{k+1} &:= p^k + \lambda(\rho_k x^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k - w^{k+1}),\end{aligned}$$

em que $\text{Proj}_{\mathcal{C}}(y)$ denota a projeção de y no conjunto \mathcal{C} .

Note que a igualdade no cálculo de \tilde{w}^k decorre do fato de que \mathcal{C} é por hipótese um conjunto convexo, fechado e não vazio, logo, a projeção $\text{Proj}_{\mathcal{C}}(y)$ existe e é única para todo $y \in \mathbb{R}^m$.

3.5.1 Problema de Busca de Base

Considere agora o problema de busca de base, tradução livre para *basis pursuit*, definido por

$$\begin{aligned}\min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & \|x\|_1 \\ \text{s.a.} \quad & Mx = b.\end{aligned}$$

Note que esse problema pode ser interpretado como determinar a solução o mais esparsa possível do sistema $Mx = b$.

O problema de busca de base é um problema que pode ser levado à forma de (P) por meio da função indicadora. De fato, definindo

$$\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid Mx = b\},$$

obtemos o problema reformulado como

$$\begin{aligned}\min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & \|x\|_1 + \Phi_{\mathcal{C}}(w) \\ \text{s.a.} \quad & x - w = 0.\end{aligned}$$

Temos então as seguintes associações com o problema (P):

- $f(x) = \|x\|_1$;
- $g(w) = \Phi_C(w)$;
- $A = I$;
- $B = -I$;
- $c = 0$;

Nesse caso, utilizando o que foi desenvolvido para problemas convexos gerais e para o caso com $f(x) = \|x\|_1$ e $A = I$, no contexto do Teorema 3.3.1, obtemos as iterações

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &:= \mathcal{S}_{\frac{1}{\lambda}} \left(w_i^k - \frac{1}{\lambda} p_i^k \right), \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ w^{k+1} &:= \text{Proj}_{\mathcal{C}} \left(\rho_k x^{k+1} + (1 - \rho_k) w^k + \frac{1}{\lambda} p^k \right), \\ p^{k+1} &:= p^k + \lambda (\rho_k x^{k+1} + (1 - \rho_k) w^k - w^{k+1}). \end{aligned}$$

Pode ser encontrada em [5, Seção 6.2] uma fórmula analítica para o cálculo da projeção no conjunto $\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid Mx = b\}$.

Note que atribuímos o resultado dos subproblemas diretamente aos termos x^{k+1} e em w^{k+1} , sem intermédio de \tilde{x}^k e \tilde{w}^k . Isso pode ser feito pois existem fórmulas analíticas simples para determinar a solução dos dois subproblemas, logo, não há sentido em aproximar a solução nesse caso.

3.5.2 Problema LASSO

O problema LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) é um problema na forma

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2} \|Mx - b\|^2 + \alpha \|x\|_1,$$

em que α é um escalar positivo.

Na forma do problema (P), o problema LASSO pode ser descrito como

$$\begin{aligned} \min_{x, w \in \mathbb{R}^m} \quad & \frac{1}{2} \|Mx - b\|^2 + \alpha \|w\|_1 \\ \text{s.a} \quad & x - w = 0. \end{aligned}$$

Fazendo as associações com o problema (P), temos:

- $f(x) = \frac{1}{2}\|Mx - b\|^2$;
- $g(w) = \alpha\|w\|_1$;
- $A = I$;
- $B = -I$;
- $c = 0$;

Ao tratarmos o subproblema em x , vemos que ele é a minimização de uma quadrática. De fato, o subproblema em x é

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \frac{1}{2}\|Mx - b\|^2 + \langle p^k, x \rangle + \frac{\lambda}{2}\|x - w^k\|^2 \right\}.$$

Fazendo uma simples manipulação com os produtos internos que definem as normas, chegamos em

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \frac{1}{2}x^t(M^tM + \lambda I)x - (M^tb + \lambda w^k - p^k)^t x \right\}.$$

Cuja solução é

$$x^{k+1} := (M^tM + \lambda I)^{-1}(M^tb + \lambda w^k - p^k).$$

Note que a matriz $(M^tM + \lambda I)$ é sempre invertível pois $\lambda > 0$.

Dessa forma, no contexto do Teorema 3.3.1, temos o processo iterativo dado por

$$\begin{aligned} x^{k+1} &:= (M^tM + \lambda I)^{-1}(M^tb + \lambda w^k - p^k), \\ w_i^{k+1} &:= \mathcal{S}_{\frac{\alpha}{\lambda}}(\rho_k x_i^{k+1} + (1 - \rho_k)w_i^k + \frac{1}{\lambda}p_i^k), \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ p^{k+1} &:= p^k + \lambda(\rho_k x^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k - w^{k+1}). \end{aligned}$$

3.5.3 Problema LASSO Generalizado

O problema LASSO generalizado é uma simples modificação do problema LASSO e é dado por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2}\|Mx - b\|^2 + \alpha\|Ax\|_1,$$

em que α é um escalar positivo, $\|\cdot\|_1$ denota a norma-1 e $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$ é uma matriz qualquer. Na forma do problema (P), o problema LASSO generalizado pode ser descrito como

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & \frac{1}{2} \|Mx - b\|^2 + \alpha \|w\|_1 \\ \text{s.a} \quad & Ax - w = 0. \end{aligned}$$

Fazendo as associações com o problema (P), temos:

- $f(x) = \frac{1}{2} \|Mx - b\|^2$;
- $g(w) = \alpha \|w\|_1$;
- $B = -I$;
- $c = 0$;

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito no problema LASSO, no contexto do Teorema 3.3.1 temos

$$\begin{aligned} x^{k+1} &:= (M^t M + \lambda A^t A)^{-1} (M^t b + A^t (\lambda w^k - p^k)), \\ w_i^{k+1} &:= \mathcal{S}_{\frac{\alpha}{\lambda}}(\rho_k A x_i^{k+1} + (1 - \rho_k) w_i^k + \frac{1}{\lambda} p_i^k), \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ p^{k+1} &:= p^k + \lambda (\rho_k A x^{k+1} + (1 - \rho_k) w^k - w^{k+1}). \end{aligned}$$

4 Apêndice

Definição 4.0.1 (Bola Aberta). Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Definimos a bola aberta de centro x e raio ε pelo conjunto

$$\mathcal{B}(x, \varepsilon, \cdot) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\}.$$

Definição 4.0.2. Sejam $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^n$. Definimos a soma dos conjuntos $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ por

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 := \{x + y \mid x \in \mathcal{C}_1 \text{ e } y \in \mathcal{C}_2\}.$$

Definição 4.0.3. Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos o produto por escalar $\lambda\mathcal{C}$ por

$$\lambda\mathcal{C} := \{\lambda x \mid x \in \mathcal{C}\}.$$

Definição 4.0.4. Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos a soma $x + \mathcal{C}$ por

$$x + \mathcal{C} := \{x + y \mid y \in \mathcal{C}\}.$$

Definição 4.0.5. Considere $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Definimos o produto $A\mathcal{C}$ por

$$A\mathcal{C} := \{Ax \mid x \in \mathcal{C}\}.$$

Proposição 4.0.1. Sejam (β^k) e (γ^k) sequências de números reais, então

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \beta^k + \liminf_{k \rightarrow +\infty} \gamma^k \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} (\beta^k + \gamma^k).$$

Demonstração. Veja [11]. ■

Definição 4.0.6 (Função Indicadora). Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Definimos a função indicadora $\Phi_{\mathcal{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ do conjunto \mathcal{X} por

$$\Phi_{\mathcal{X}}(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \text{se } x \notin \mathcal{X}. \end{cases}$$

Proposição 4.0.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, então,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Demonstração. Veja [11].



Índice

- casco afim, 8
- conjunto afim, 8
- conjunto convexo, 6
- continuidade, 14
- decomposição, 52
- decomposição de *Douglas-Rachford*, 52
- domínio, 32
 - completo, 32
- domínio efetivo, 10
- epígrafo, 10
- função
 - convexa, 12
 - fechada, 13
 - própria, 13
 - subdiferenciável, 23
- função conjugada, 21
- função convexa, 10
- imagem, 32
- interior relativo, 9
- método
 - de penalização, 58
 - ADMM, 66
 - dos multiplicadores, 65
 - proximal, 47
 - proximal generalizado, 50
- não-expansividade, 36
- não-expansividade firme, 37
- operador, 31
 - identidade, 34
 - não-expansivo, 36
 - não-expansivo firme, 37
 - resolvente, 38
 - subdiferencial, 43
- operador monótono, 34
- operador monótono maximal, 34
- operador proximal, 44
- ponto interior relativo, 8
- problema
 - de busca de base, 99
 - LASSO, 100
 - LASSO generalizado, 101
- semicontinuidade inferior, 13
 - pontual, 13
- subdiferenciabilidade, 23
- subdiferencial, 23
- subgradiente, 23

Referências

- [1] H. H. Bauschke e P. L. Combettes. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. New York: Springer, 2011.
- [2] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali e M. C. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [3] A. Beck. *First-Order Methods in Optimization*. Philadelphia: SIAM, 2017.
- [4] D. P. Bertsekas. *Convex Optimization Theory*. Belmont: Athena Scientific, 2009.
- [5] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato e J. Eckstein. “Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers”. Em: *Foundations and Trends in Machine Learning* 3.1 (2011), pp. 1–122.
- [6] S. Boyd e L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [7] J. Eckstein. “Splitting Methods for Monotone Operators with Applications to Parallel Optimization”. Tese de dout. Massachusetts: MIT, 1989.
- [8] J. Eckstein e D. P. Bertsekas. “On the Douglas—Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators”. Em: *Mathematical Programming* 55.1-3 (1992), pp. 293–318.
- [9] A. N. Iusem. “Proximal Point Methods in Optimization”. Em: 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA. Rio de Janeiro: SBM, 1995.
- [10] A. Izmailov e M. Solodov. *Otimização: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*. 2ª ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [11] E.L. Lima. *Curso de Análise*. 15ª ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.
- [12] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970.