Sistemas Baseados em Regras Fuzzy Conjuntivas

Aluna: Gislaine de O Queiros RA: 155579
Orientador: Estevão Esmi Laureano

April 2019

1 Resumo

Sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF) consistem em sistemas de entrada-saída que utilizam informações prévias descritas através de um conjunto de regras do tipo "Se-Então", fornecidas por especialistas e/ou conjunto de dados, para associar novas entradas à saídas desejadas. Aplicações de SBRFs podem ser encontradas em diversas áreas do conhecimento como medicina, biologia, química, engenharia, etc.

O comportamento e a acurácia do SBRF estão intimamente ligados a qualidade do conjunto de regras disponível. Se as base de regras contém inconsistencias, isto é, se elas contêm anômalias tais como contradições e/ou incompletude do domínio, então, isso pode comprometer o resultado fornecido por um sistema baseado nessas regras. Logo, é importante se utilizar de recursos de verificação de integridade das base de regras fuzzy para que elas expressem corretamente o fenômeno de interesse.

As bases de regras, em geral, podem ser classificadas como conjuntivas ou implicativas. Na literatura temos diversmos métodos para identificar anomalias em base de regras fuzzy, porém, poucos deles consideram regras conjuntivas que são as utilizadas pelos bem-conhecidos SBRF do tipo Mamdani. Além disso, nehum método de identificação de anomalias que conhecemos considera a regras fuzzy ponderadas. Esse projeto objetiva-se a estudar os sistemas de base de regras fuzzy e o método proposto por Scarpelli *et al.* que é baseado em medidas de similaridade fuzzy para identificação de regras conjuntivas possivelmente contraditórias.

2 Introdução

A teoria de conjuntos fuzzy é uma teoria matemática introduzida por Lofti Zadeh para modelar e processar conceitos e objetos cujas fronteiras são difusas e/ou incertas [13]. Uma das razões da difusão e popularização dessa teoria em diversas áreas do conhecimento está, em parte, ligado ao desevenvolvimento dos chamados sistemas baseados em regras (SBRF). Um SBRF utiliza operadores da lógica fuzzy e um conjunto de informações sobre um determinado fenômeno descritas por regras do tipo "Se-Então" para elaborar um sistema de entrada-saída associado ao problema questão [9]. A utilização de regras "Se-Então" facilita a interdisciplinaridade e interpretabilidade do sistema obtido, devido sua proximidade com a linguagem natural. De fato, muitas tarefas e fenômenos podem ser descritos de maneira natural através de regras de modo que sistemas baseados em regras fuzzy tem sido utilizados para resolver diversos problemas de engenharia, medicina, química, computação, etc [2, 5, 9, 10].

A base de regras tem papel central na elaboração do SBRFs. De maneira geral, quanto melhor e mais preciso for o conjunto de regras fuzzy melhor será a acuracia e comportamento geral do SBRF obtido. Esse tipo de relação entre a "qualidade" das regras com a "qualidade" do SBRF fica evidente em estudos que investigam a capacidade de aproximação universal desses tipos de sistemas

[9]. Assim, faz-se necessário o estudo e o desenvolvimento de métodos que identifiquem a existência de possíveis anomalias em um conjunto de base de regras que possam produzir comportamento indesejados no SBRF construído. Do ponto de vista prático, a identificação dessas anomalias também permitem que o conjunto de dados seja revisto por especialistas, indicando quais regras requerem uma análise mais cuidadosa.

Neste projeto focaremos em SBRF cuja base de regras é composta por regras fuzzy conjuntivas. Uma regra conjuntiva representa parte de uma relação funcional entre entrada e saída e essa relação funcional não necessariamente corresponde a uma relação de causa-efeito tal como acontece em regras fuzzy implicativas. As regras conjuntivas, em geral, são representadas por relações fuzzy definidas em termos de t-normas que nada mais são do que extensões do conectivo Booleano “e” para a lógica fuzzy. Um exemplo de SBRF que considera base de regras conjuntivas é dada pelo método de inferência de Mamadani [9].

Scarpelli *et al.* proporam um método para identificar possiveis incosisências entre regras fuzzy que pode ser aplicado tanto a base de regras conjuntivas quanto implicativas [11]. Este método visa comparar as regras fuzzy duas a duas com o intuito de identificar potenciais inconsistências e contradições entre elas. Isto é obtido através de um índice de consistência definido através da noção de medida de similaridade entre conjuntos fuzzy. Vale destacar que este método não leva em conta possíveis ponderações das regras tais como pode ocorre em alguns SBRFs.

3 Teoria de Conjuntos Fuzzy

A teoria de conjuntos fuzzy foi proposta por Lofti Zadeh em meados dos anos 60 como uma teoria para modelar e processar conceitos e objetos cujas fronteiras são incetas ou difusas [13]. Matematicamente falando, um (sub)conjunto fuzzy A de um conjunto arbitrário não vazio X é identificado como uma função $\mu_A : X \to [0,1]$ chamada de função de pertinência de A, onde $\mu_A(x)$ representa o grau com que x pertence ao conjunto fuzzy A. Por simplicidade de notação, alternativamente, utilizaremos a notação $A(x)$ ao invés de $\mu_A(x)$. A classe dos conjuntos fuzzy de X é denotado pelo símbolo $\mathcal{F}(X)$.

A teoria de conjuntos fuzzy estende a teoria clássica de conjuntos [13]. De fato, cada subconjunto Y de X também pode ser unicamente identificado como o subconjunto fuzzy cuja função de pertinência é dada pela função característica χ_Y de Y dada por $\chi_Y(x) = 1$ se $x \in Y$ e $\chi_Y(x) = 0$ se $x \in Y$. A relação de inclusão e as operações de união, intersecção e de complemento de subconjuntos é estendido para conjuntos fuzzy como se segue:

Um subconjunto fuzzy A está contido em um subconjunto fuzzy B se $A(x) \leq B(x)$ para todo $x \in X$, neste caso, denotamos por $A \subseteq B$. Sejam $A, B \in \mathcal{F}(X)$, a interseção e a união de A e B são dados respectivamente pelos conjuntos fuzzy $A \cap B$ e $A \cup B$ cujas função de pertinência são:

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} \quad \text{e} \quad (A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

para todo $x \in X$. O complemento de A é o conjunto fuzzy $\bar{A}$ cuja função de pertinência é dada por $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$, $\forall x \in X$ [1].

Exemplos bem conhecidos de conjuntos fuzzy são os conjuntos fuzzy trapezoidais e triangulares. Especificamente, um conjunto fuzzy trapezoidal $(a; b; c; d)$, $a \leq b \leq c \leq d$, é um conjunto fuzzy de $\mathbb{R}$ cuja função de pertinênica é dada por

$$(a; b; c; d)(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } b \leq x \leq c \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{, se } a \leq x < b \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{, se } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases} .$$

No caso onde $b = c$, falamos de conjunto fuzzy triangular e denotamos por $(a; b; d)$ ao invés de $(a; b; b; d)$.

Cada conjunto fuzzy A de X pode ser identificado com uma família de subconjuntos clássicos de X chamados de α-níveis de A [6]. Precisamente, para todo $\alpha \in (0, 1]$ definimos o α-nível de A como sendo o subconjunto [8]:

$$[A]_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Se, adicionalmente, X é também um espaço topológico, então, definimos

$$[A]_0 = \overline{\{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}}$$

onde $\overline{Y}$ denota o fecho de $Y \subseteq X$. A relação de inclusão e de igualdade entre conjuntos fuzzy podem ser caracterizada em termos de α-níveis como se segue [6]:

(i) $A \subseteq B \Leftrightarrow [A]_\alpha = [B]_\alpha \ \forall \alpha \in (0, 1]$;

(ii) $A = B \Leftrightarrow [A]_\alpha = [B]_\alpha \ \forall \alpha \in (0, 1]$.

Diversos operadores sobre os conjuntos fuzzy podem ser definidos através de operadores elementares da lógica fuzzy [1]. A lógica fuzzy nada mais é do que a estensão da lógica Booleana para o domínio $[0, 1]$. Uma t-norma t é um operador de $[0, 1]^2$ para $[0, 1]$ que estende o conectivo Booleano "e" e satisfaz as seguintes propriedades para todo $a, b, c, d \in [0, 1]$:

(a) comutatividade: $a \ t \ b = b \ t \ a$;

(b) associatividade: $a \ t \ (b \ t \ c) = (a \ t \ b) \ t \ c$;

(c) monotocidade: $a \ t \ b \leq c \ t \ d$ se $a \leq c$ e $b \leq d$;

(d) 1 é elemento neutro: $1 \ t \ a = a$.

Exemplos de t-normas incluem [9]:

- t-norma do mínimo: $a \wedge b = \min\{a, b\}$ para todo $a, b \in [0, 1]$.
- t-norma do produto: $a \cdot b = ab$ para todo $a, b \in [0, 1]$.

- t-norma de Lukasiewicz: $at_Lb = \max\{0, a+b-1\}$ para todo $a, b \in [0,1]$.

Similarmente, uma s-norma (ou uma t-conorma) $s : [0,1]^2 \to [0,1]$ estende o conectivo Booleano "ou" e satisfaz as seguintes propriedades [1], para todo $a, b, c, d \in [0,1]$:

(a) comutatividade: $a\ s\ b = b\ s\ a$;

(b) associatividade: $a\ s\ (b\ s\ c) = (a\ s\ b)\ s\ c$;

(c) monotocidade: $a\ s\ b \leq c\ s\ d$ se $a \leq c$ e $b \leq d$;

(d) 0 é elemento neutro: $0\ s\ a = a$.

Alguns exemplos bem conhecidos de s-normas são a

- s-norma do máximo: $a \vee b = \max\{a, b\}$ para todo $a, b \in [0,1]$.
- s-norma da soma algébrica: $a + b - ab$ para todo $a, b \in [0,1]$.

Uma negação fuzzy η é uma função de $[0,1]$ para $[0,1]$ que é decrescente e estende a negação da lógica Booleana: $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$. Se adicionalmente η for estritamente crescente e é involutiva, isto é, $\eta(\eta(x)) = x\ \forall x \in [0,1]$, então, η é dita uma negação forte [1][9]. A negação usual é dada por $\eta(x) = 1 - x$ para todo $x \in [0,1]$ e que o complemento de um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(X)$ surge desta negação: $A^c(x) = \eta(A(x))$ para todo $x \in X$. De fato, para cada negação fuzzy podemos definir o complemento de um conjunto fuzzy com respeito à respectiva negação fuzzy. Contudo, para o propósito deste trabalho, iremos focar apenas na negação fuzzy usual.

A implicação fuzzy é uma função $i : [0,1]^2 \to [0,1]$ que estende a implicação Booleana, isto é, $0\ i\ 0 = 0\ i\ 1 = 1\ i\ 1 = 1$ e $1\ i\ 0 = 0$, e é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento. Assim como ocorre na lógica Booleana, implicações fuzzy podem ser obtidas de diversas expressões que envolvem outros operadores lógicos da lógica fuzzy, tais como t-normas, s-normas e negações fuzzy [1]. Neste trabalho focaremos em uma classe de implicações fuzzy chamadas de residuais e são definidas em termos de t-normas. Mais precisamente, seja t uma t-norma contínua à esquerda, a implicação fuzzy $i_t : [0,1]^2 \to [0,1]$ definda por

$$a\ i_t\ b = \sup\{c \in [0,1] \mid a\ t\ c \leq b\}$$

é dita a implicação fuzzy residual com respeito à t-norma t. Vejamos alguns exemplos de implicações fuzzy residuais bem conhecidos [2]:

- se t é a t-norma do mínimo, então, obtemos a implicação de Gödel

$$a\ i\ b = \begin{cases} b & , \text{se } a > b \\ 1 & , \text{se } a \leq b. \end{cases}$$

- se t é a t-norma do produto, então, obtemos a implicação de Goguen

$$a\ i\ b = \begin{cases} \frac{b}{a} & , \text{ se } a > b \\ 1 & , \text{ se } a \leq b. \end{cases}$$

- se t é a t-norma de Lukasiewicz, então, obtemos a implicação de Lukasiewicz

$$a\ i\ b = 1 - a + b.$$

Uma relação fuzzy R entre um universo X e outro universo Y nada mais é do que um conjunto fuzzy em $X \times Y$, onde $R(x, y)$ representa o grau de relação entre $x \in X$ e $y \in Y$. De forma mais geral [1], um conjunto fuzzy R de $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ é também chamado de uma relação n-ária em X. Um caso especial de relação fuzzy é o produto cartesiano de conjuntos fuzzy. Sejam t uma t-norma e A_i um conjunto fuzzy de X_i, $i = 1, \ldots, n$. O produto cartesiano fuzzy de $A_1, \ldots, A_n$ com respeito à t-norma t é a relação fuzzy $A_1 \times_t \ldots \times_t A_n$ cuja função de pertinência é dada por

$$(A_1 \times_t \ldots \times_t A_n)(x_1, \ldots, x_n) = A_1(x_1)\ t \ldots t\ A_n(x_n)$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$. Se a t-norma considerada é do mínimo, então, o correspondente produto cartesiano fuzzy é denotado simplesmente por $A_1 \times \ldots \times A_n$.

Uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ e uma relação fuzzy $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ podem ser combinadas através de composições relacionais [8] para produzir relações fuzzy em $X \times Z$. Seja t uma t-norma qualquer, a composição sup-t de $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ e $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ é a relação fuzzy $R \circ_t S$ de $X \times Z$ cuja função de pertinência é dada por

$$(R \circ_t S)(x, z) = \sup_{y \in Y} R(x, y)\ t\ S(y, z), \quad \forall (x, z) \in X \times Z.$$

Similarmente, a composição sup-t do conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(Y)$ e da relação fuzzy R é o conjunto fuzzy $A \circ_t R$ de Y cuja função de pertinência é dada por

$$(A \circ_t R)(y) = \sup_{x \in X} A(x)\ t\ R(x, y), \quad \forall y \in Y.$$

No caso em particular que t é a t-norma do mínimo, falamos de composição max-min e utilizamos simplesmente o símbolo $\circ$ ao invés de $\circ_\wedge$.

Outra composição relacional de interesse neste trabalho é a composição inf-i [9]. Seja i uma implicação fuzzy qualquer, a composição inf-i de $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ e $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ é a relação fuzzy $R \bullet_i S$ de $X \times Z$ cuja função de pertinência é dada por

$$(R \bullet_i S)(x, z) = \inf_{y \in Y} R(x, y)\ i\ S(y, z), \quad \forall (x, z) \in X \times Z.$$

Similarmente, a composição inf-i do conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(X)$ e da relação fuzzy R é o conjunto fuzzy $A \bullet_i R$ de Y cuja função de pertinência é dada por

$$(A \bullet_i R)(y) = \inf_{x \in X} A(x)\ i\ R(x, y), \quad \forall y \in Y.$$

No caso particular onde i corresponde a implicação de Gödel, Goguen ou Lukasiewicz, denotamos a respectiva composição inf-i pelos símbolos $\bullet$, $\bullet_G$ ou $\bullet_L$.

4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Um sistema de base de regras fuzzy (SBRF) é um mapeamento Φ composto por três módulos, isto é, $\Phi(\cdot) = D(I(F(\cdot)))$, onde F é o módulo de fuzzificação, I é o módulo de inferência e D é o módulo de defuzzificação [1]. A Figura 1 ilustra a arquitetura de um sistema de base de regras fuzzy.

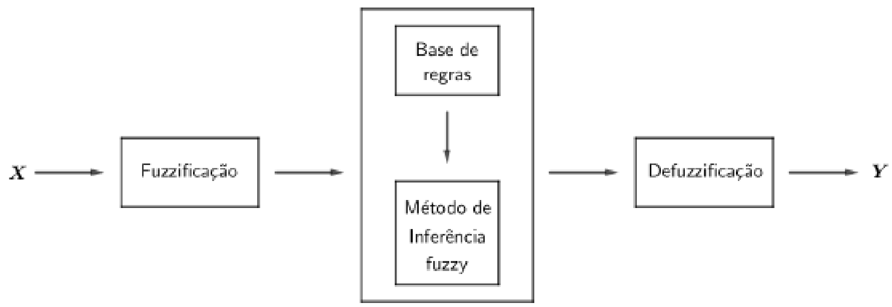

Figure 1: Arquitetura de um sistema de base de regras fuzzy (fonte: [10]).

O módulo de fuzzificação F é um operador que mapea uma entrada em conjuntos fuzzy em domínios apropriados [1][9]. Um dos métodos de fuzzificação mais bem-conhecidos e utilizados é o método de inclusão canônica que consiste da função que associa cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ com o subconjunto fuzzy $\{x\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

O módulo de inferência [5] é o mapeamento I que associa os conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(X)$, obtidos pelo módulo de fuzzificação F, a conjuntos de um domínio Y. O mapeamento I é obtido a partir de uma base de regras fuzzy que consiste de um conhecimento prévio do fenômeno considerado advindo de uma conjunto de dados e/ou por especificações de especialistas, e um sistema de inferência responsável por associar uma saída a novas entradas levando em conta a base de regras fuzzy.

Uma base de regras fuzzy [1] consiste de um conjunto de regras fuzzy da forma

$$\textbf{Se } x_1 \text{ is } A_{i1} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ is } A_{in}\textbf{então } y_1 \text{ is } B_{i1} \text{ e } \ldots \text{ e } y_m \text{ is } B_{im}, \quad i = 1, ..., k$$

onde A_{ij} e B_{ip} são conjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$ associados respectivamente as variável linguísticas x_j e y_p. Note que, utilizando a noção de produto cartesiano fuzzy com respeito a uma t-norma t, cada regra pode ser reescrita da seguinte forma

$$\textbf{Se } x \text{ is } A_i\textbf{então } y \text{ is } B_i, \qquad i = 1, ..., k$$

onde $A_i = A_{i1} \times_t \ldots \times_t A_{in} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B_i = A_{i1} \times_t \ldots \times_t A_{im} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Neste caso, dizemos que as proposições fuzzy "x is A_i" e "y is B_i" são respectivamente o antecedente e o consequente da i-ésima regra da base de regras fuzzy. Os conjuntos fuzzy A_i e B_i representam termos linguíticos associados respectivamente as varíaveis de entrada x e de saída y, tais como "alto", "médio", "quente", etc [9][1].

Cada regra pode ser representada por uma relação fuzzy R_i de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ cuja função de pertinência é dada por

$$R_i(x, y) = f(A_i(x), B_i(y)), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

onde f denota uma implicação fuzzy ou uma t-norma. Se f for uma implicação fuzzy, então, dizemos que as regras são implicativas. Neste caso, as regras fuzzy são interpretadas como relações de causa-efeito. Agora, se f for uma t-norma, então, dizemos que as regras são conjuntivas e, neste caso, assumi-se que as regras fuzzy representam o conhecimento parcial sobre a relação funcional entre a entrada e a saída que podem ser obtidos através do conhecimento de especialistas ou de um conjunto de dados [2, 9]. Neste trabalho focaremos apenas em base de regras fuzzy conjuntivas.

O processo de se unir as relações R_i induzidas por cada regra em uma única relação fuzzy R é chamada de agregação [5]. Considere uma base de regras fuzzy conjuntivas "**Se** x *is* A_i**então** y *is* B_i", $i = 1, ..., k$, e as respectivas relações fuzzy R_i dadas conforme a Equação (1) para alguma t-norma t dada. A relação fuzzy R é definida como a união das relações fuzzy R_i, isto é,

$$R_t = \bigcup_{i=1}^{k} R_i. \tag{2}$$

ou seja,

$$R_t(x, y) = \sup_{i=1,\dots,k} A_i(x) \; t \; B_i(y), \; \forall \; (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

A relação R_t é também chamada de *base de regras de sup-t*. Intuitivamente, a relação fuzzy de R_t consiste da união dos conhecimentos parciais sobre uma relação funcional (desconhecida) entre a entrada e a saída descritas por cada regra fuzzy. Se a t-norma t adotada para representar a base de regras fuzzy do tipo conjuntiva é a do mínimo, isto é, $t = \wedge$, então, obtemos a relação fuzzy que descreve a base de regra de Mamdani [7] que é denota por R_M ao invés de $R_\wedge$. Neste caso, a Equação (3) pode ser reescrita da seguinte forma

$$R_M(x, y) = \sup_{i=1,\dots,k} A_i(x) \wedge B_i(y), \; \forall \; (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Agora, se a t-norma escolhida for a do produto, então, obtemos a base de regras de Larsen que denotaremos por R_L.

Um método de inferência fuzzy visa produzir uma resposta para uma determinada entrada utilizando a base de regras fuzzy dada [2]. Neste trabalho, focaremos na regra composicional de inferência [2, 9]. Mais precisamente, se R a relação fuzzy induzida por uma base de regras fuzzy do tipo "Se x is A_i, então, y is B_i para $i = 1, ..., k$", então, uma regra composicional de inferência é um mapeamento I que associa um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a um conjunto fuzzy $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ dado por

$$B = I(A) = A \otimes R \tag{4}$$

onde $\otimes$ denota uma composição relacional entre a relação fuzzy R e o conjunto fuzzy A, tal como sup-t ou inf-i.

O método de inferência de Mamdani consiste em considerar $\otimes$ como sendo a composição max-min na Equação (4). Neste caso, o método de Mamdani, que consiste da utilização da base de regras de Mamdani junto com o método de inferência de Mamdani, é dado por:

$$\begin{aligned} B(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} A(x) \ \wedge \ R_M(x,y) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} A(x) \ \wedge \ A_i(x) \ \wedge \ B_i(y) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (A \cap A_i)(x) \ \wedge \ B_i(y) \end{aligned} \tag{5}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^m$.

Dado uma t-norma t contínua à esquerda, o método de inferência residual de Gödel consiste em considerar a base de regras sup-t e a composição relacional $\otimes = \bullet_t$ na Equação (4), isto é, a composição inf-i_t onde i_t é a implicação residual com respeito à t. Neste caso obtemos o seguinte método de inferência $I : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$:

$$B(y) \quad = \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} A(x) \ i \ R_t(x,y). \tag{6}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^m$. .

O módulo de defuzzificação consiste em associar a saída $B = I(A)$ do método de inferência a um elemento do $\mathbb{R}^m$. Um dos defuzzificadores mais utilizados é o método do centro de gravidade explicitado a seguir [9]. Seja B um subconjunto fuzzy de $X \subseteq \mathbb{R}$, o defuzzificador D dado pelo centro de gravidade de B é dado por

$$D(B) = \begin{cases} \dfrac{\int_X xB(x)dx}{\int_X B(x)dx} & , \text{ se } X \text{ é não enumerável} \\ \dfrac{\sum_{x_i \in X} x_i B(x_i)}{\sum_{x_i \in X} B(x_i)} & , \text{ se } X \text{ é enumerável} \end{cases} ,$$

obviamente, aqui estamos assumindo que as integrais ou as séries acima existem nos casos respectivamente onde X é não enumerável ou X é enumerável e infinito.

5 Identificação de Anomalias em Base de Regras Fuzzy Conjuntivas

A verificação da existências de anomalias em uma base de regras fuzzy é essencial para que o modelo matemático baseado nessas regras expresse corretamente o fenômino estudado. Neste trabalho estudaremos o método proposto por [11] para identificação de pares de regras possivelmente contraditórias na base de regras que por sua vez podem produzir saídas inconsistentes se ambas regras forem consideradas nos cálculos do SFBR em questão.

O modelo de Scarpelli *et al.* pode ser aplicável para analisar tanto base de regras implicativas quanto conjuntivas, por considerar apenas medidas de correspondência entre os antecedentes e consequentes sem levar em conta o papel da condicional "Se-Então" na regra. Mais especificamente, este método compara as regras fuzzy duas-a-duas analisando a consistência de tais regras através do *índice de consistência* que é definido em termos de uma dada medida de similaridade. Vejamos abaixo sua definição.

Uma medida de similaridade em $\mathcal{F}(X)$ é uma $S : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades [3]:

- $S(A, B) = S(B, A)$ para todo $A, B \in \mathcal{F}(X)$;
- $S(X, \emptyset) = 0$;
- $S(A, A) = 1$ para todo $A \in \mathcal{F}(X)$;
- Se $A \subseteq B \subseteq C$, então, $S(A, C) \leq S(A, B)$ e $S(A, C) \leq S(B, C)$.

Um exemplo bem conhecido de medida de similaridade é a função

$$S(A, B) = \begin{cases} \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} & , \text{ se } |A \cup B| > 0 \\ 1 & , \text{ se } |A \cup B| = 0 \end{cases} \tag{7}$$

para todo $A, B \in \mathcal{F}(X)$, onde $|C|$ denota a cardinalidade do conjunto fuzzy $C \in \mathcal{F}(X)$ e é definida como se segue:

$$|C| = \begin{cases} \int_X C(x)dx & , \text{ se } X \text{ é não enumerável} \\ \sum_{x_i \in X} C(x_i) & , \text{ se } X \text{ é enumerável} \end{cases},$$

Evidentemente, na definição de cardinalidade de conjuntos fuzzy acima, estamos assumindo que as integrais ou as séries existem e são finitas nos casos respectivamente onde X é não enumerável ou X é enumerável e infinito.

Seja S_X uma medida de similaridade em $\mathcal{F}(X)$ e S_Y uma medida de similaridade em $\mathcal{F}(Y)$ e duas regras r_1 :"Se x is A, então, y is B" e r_2 :"Se x is $\tilde{A}$, então, y is $\tilde{B}$", onde $A, \tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$ e $B, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Y)$. O índice de consistência C entre as regras r_1 e r_2 com respeito à S_X, S_Y e a implicação fuzzy i é dado por [11]:

$$C(r_1, r_2) = S_X(A_1, A_2) \; i \; S_Y(B1, B2).$$

Além disso, r_1 e r_2 são ditas potencialmente contraditórias com respeito a $\beta \in [0, 1]$ se

$$C(r_1, r_2) < \beta$$

onde β é um limiar de corte dado de acordo com o contexto. Vabe destacar que aqui generalizamos de maneira natural a definição original deste índice proposta por [11], onde tal conceito leva em conta escolhas particulares de medidas de similaridade.

A fim de ilustrar o método de Scarpelli *et al.* vamos considerar o seguinte exemplo de uma base de regras fuzzy que descreve o risco de uma pessoa estar com dengue baseado na sua temperatura corporal e no nível de dores das suas articulações:

- x denota a *temperatura corporal* que toma valores no domínio $X = [36, 41]$. Considere os conjuntos fuzzy $A_1 = (36; 36; 38)$, $A_2 = (37; 38; 39)$ e $A_3 = (38; 40; 41; 41)$ que modelam respectivamente os termos linguísticos *normal*, *febre moderada* e *febre alta*.

- y denota o *nível de dor nas articulações* e toma valores no domínio $Y = [0, 1]$. Considere os conjuntos fuzzy $B_1 = (0; 0; 0,5)$, $B_2 = (0; 0,5; 1)$ e $B_3 = (0,5; 1; 1)$ que modelam respectivamente os termos linguísticos *baixo*, *médio* e *alto*.

- z denota o *risco de estar com dengue* e toma valores no domínio $Z = [0, 1]$. Considere os conjuntos fuzzy $C_1 = (0; 0; 0,5)$, $C_2 = (0; 0,5; 1)$ e $C_3 = (0,5; 1; 1)$ que modelam respectivamente os termos linguísticos *baixo*, *médio* e *alto*.

- considere a seguintes regras:

  1. r_1 : **Se** (x is *febre moderada*) e (y is *médio*) **então** (z is *alto*);
  2. r_2 : **Se** (x is *febre moderada*) e (y is *alto*) **então** (z is *baixo*);
  3. r_3 : **Se** (x is *normal*) e (y is *alto*) **então** (z is *baixo*);

Considerando a medida de similaridade dada na Equação (7) e a implicação de fuzzy de Goguen, obtemos os seguintes índices de consistências:

$$C(r_1, r_2) = 0$$

$$C(r_1, r_3) = 0$$

$$C(r_2, r_3) = 1$$

Pelo método de Scarpelli *et al.*, obtemos que a regra r_1 é contraditória com as regras r_2 e r_3, indicando que pessoa, segundo essas regras pode ter risco de ter dengue baixo e alto ao mesmo tempo.

6 Considerações Finais

Neste projeto estudamos sistemas baseados em regras fuzzy, dando especial atenção para o caso onde as regras são conjuntivas, isto é, no caso onde cada regra representa um conhecimento parcial da relação funcional do sistema de entrada-saída de interesse [14][1]. A qualidade deste tipo de SBRF é estreitamente ligada a qualidade das regras fuzzy consideradas. Estas podem conter diversos tipo de anomalias tais como incompletude, redundância e contradição [3]. A incompletude é geralmente fácil de identificar bastando analisar se os suportes dos conjuntos associados aos antecedentes cobrem todo o domínio. A redundância, por sua vez, não altera a saída produzida por um sistemas baseado em regras fuzzy, mas somente causa aumento de processamento e complexidade do sistema obtido. Por fim, resta analisar possíveis contradições entre as regras. Na literatura há diversas abordagens nesse sentido, veja por exemplo [11],[12], [4]. Aqui, focamos no trabalho de Scarpelli *et al.* que apresenta um método de identificação de possíveis contradições entre regras baseado em medidas de similaridades entre antecedentes e consequentes. Contudo, da revisão bibliográfica que fizemos, vale destacar que nenhum método da literatura considera sistemas baseados em regras fuzzy ponderadas. Sendo assim, como pesquisa futura, pretendemos estender as ideias de Scarpelli *et al.* para lidar também com essas classes de SBRFs.

[7]

References

[1] Laécio Carvalho Barros, Rodney Carlos Bassanezi, and Weldon Alexander Lodwick. *First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. Springer, 2016.

[2] B. Bede. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.

[3] H. Bustince, M. Pagola, and E. Barrenechea. Construction of fuzzy indices from fuzzy DI-subsethood measures: Application to the global comparison of images. *Information Sciences*, 177(3):906 – 929, 2007.

[4] Didier Dubois, Henri Prade, and Laurent Ughetto. Checking the coherence and redundancy of fuzzy knowledge bases. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 5(3):398–417, 1997.

[5] Rene Jager. *Fuzzy logic in control*. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, Holanda, 1995.

[6] George Klir and Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic*, volume 4. Prentice hall New Jersey, 1995.

[7] Ebrahim H Mamdani and Sedrak Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International journal of man-machine studies*, 7(1):1–13, 1975.

[8] CV Negoita and DA Ralescu. Representation theorems for fuzzy concepts. *Kybernetes*, 4(3):169–174, 1975.

[9] Witold Pedrycz and Fernando Gomide. *Fuzzy Systems Engineering: Towards Human-Centric Computing*. Wiley, IEEE Press, New York, 2007.

[10] Daniel D. C. Santos. Um estudo sobre identificação de anomalias em bases de regras fuzzy aplicado a estimação do risco de endometriose. Master's thesis, University of Campinas, Campinas, Brazil, 2018.

[11] H Scarpelli, W Pedrycz, and F Gomide. Quantification of inconsistencies in fuzzy knowledge bases. In *Proc. of the Second European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, EUFIT*, volume 94, pages 1456–1460, 1994.

[12] Ronald R Yager and Henrik Legind Larsen. On discovering potential inconsistencies in validating uncertain knowledge bases by reflecting on the input. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 21(4):790–801, 1991.

[13] Lotfi A Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.

[14] Lotfi A Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, (1):28–44, 1973.