Modelo de Black-Scholes

Victor Lion - 148152

Sumário

1 Introduction

Durante o primeiro semestre de 2019, sobre a orientação do Professor Doutor Laércio Vendite, pude estudar o método de Black-Scholes, largamente utilizado em um contexto financeiro, sobre o preço de ativos, como por exemplo uma ação. O estudo do modelo de Black-Scholes foi motivado pelo meu interesse manifestado em matérias passadas, em principal a matéria Matemática Financeira, que foi ministrada pelo prórpio Laércio Vendite. Durante o semestre pude aumentar bastante meu conhecimento sobre modelagem, mercado financeiro e também sobre outros tantos assuntos que não imaginava durante o começo do semestre.

2 O modelo de Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes, como dito anteriormente, é muito utilizado em precificação de ativos, ou seja, no mercado financeiro. Dito isso Black-Scholes é um modelo matemático para a dinâmica do mercado financeiro, mais precisamente dos preços de ativos no tempo, então a partir de uma equação diferencial parcial (EDP) podemos estimar o preço de um ativo.

De antemão digo que para a modelagem é necessário nos utilizarmos de movimentos Brownianos para a modelagem, e dizemos que B_t, representa um ativo de risco no mercado, sendo este dado por:

$$B_t = B_0 exp(\mu - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma dW_t)$$

Porém é muito mais recorrente a sua formulação em uma EDP:

$$dB_t = \mu B_t dt + \sigma B_t dW_t$$

Porém qual o porquê de se utilizar movimentos Brownianos como modelagem? Como resposta: pois enxergamos a parte aleatória dos ganhos de uma ação como um passeio aleatório, como se a cada instante estivéssemos nos utilizando dos lados de uma moeda jogada pra cima para saber se o preço da ação sobe ou desce, e as constantes μ, e σ, onde a primeira é a tendência de B_t e a segunda é a volatilidade da ação. Ou seja, temos que além da aleatoriedade das ações elas se comportam de maneira proporcional o que é verossímil a realidade observada.

3 Movimento Browniano

Definição 1 (Movimento Browniano)**.** *Dizemos que um processo W_t em $[0,T]$ com valores em $\mathbb{R}$ é um* ***movimento Browniano unidimensional*** *iniciado em 0 se satisfizer:*

1. $W_0 = 0$ *qtp;*

2. $W_\omega : [0,T] \to \mathbb{R}$ *é contínuo qtp;*

3. $W_t - W_\omega \sim \mathcal{N}(0, t-s), \forall 0 \leqslant s < t \leqslant T$*;*

4. *Se* $0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \leqslant T$*, então os processos* $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0}$ *são independentes.*

Note então que um movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$ é um processo a valores em $\mathbb{R}^n$, tal que cada componente é um movimento Browniano unidimensional e assim cada componente gere processos unidimensionais independentes.

4 σ-Álgebras e Martingales

4.1 σ-Álgebras

Após o começo do estudo surgiu uma questão sobre a relação entre a noção de um jogo em que o conhecimento do passado não permite prever um conhecimento futuro, então foi necessário também estudar de que maneira seria possível modelar o conhecimento, ou informação, e junto disso a noção de martingale.

Definição 2 (σ-Álgebra)**.** *Seja X um conjunto e 2^X o conjunto das partes de X. Então X é dito* ***σ-Álgebra****, se e somente, se X possui as seguintes propriedades:*

1. $\varnothing \subset X$*;*

2. *Se* $\Sigma \subset X$*, então* $\Sigma^C \subset X$*;*

3. *Se* $E_1, E_2, ...$ *são uma sequência em X, então* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset X$

Assim definidas as σ-Álgebras, podemos definir filtrações para que assim possamos fazer nossa modelagem de informação, então seguimos com:

Definição 3 (Filtração)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e seja I, um conjunto de índices. Para todo $i \in I$, e seja $\mathcal{F}_i$ uma sub σ-álgebra de $\mathcal{A}$, então:*

$\mathbb{F} := (\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ *É chamada de **filtração** se,* $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_l \subseteq \mathcal{A}, \forall k \leqslant l$.

Então filtrações são famílias de σ-álgebras ordenadas e não-decrescentes. Então se $\mathbb{F}$ é uma filtração então $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, é dito espaço de probabilidade filtrado.

Tendo precisamente definido o que são σ-álgebras e também filtrações podemos prosseguir e definir martingales e assim ficará mais claro sua relevância no contexto de Black-Scholes.

4.2 Martingales

O termo martingale tem origem num grupo de estratégias de apostas populares na França do século XVIII. E a mais simples destas estratégias é usada para descrever um jogo de moeda, em que o apostador ganhava se a moeda desse cara, por exemplo, e perdia se a moeda desse coroa. A estratégia consistia do apostador dobrar sua aposta a cada rodada a modo de recuperar os investimentos perdidos na primeira vitória, somado o lucro igual ao da primeira aposta. Conforme dinheiro e tempo do apostador se aproximam do infinito a probabilidade de vitória, ou seja, de cair cara se aproxima de 1, o que faz a estratégia de apostas martingale soar como infalível. Porém, as apostas tomam um crescimento exponencial desse modo levando a falência dos apostadores. Dada a introdução histórica, e então do termo martingale, podemos traçar um paralelo com estratégias de investimentos, onde estamos considerando que o investidor toma a figura de um apostador, assim de modo que σ-álgebras modelam efetivamente informação conseguimos definir matematicamente o martingale:

Definição 4 (Martingale)**.** *Um processo estocástico $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definido no espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, P)$ no qual todas as variáveis aleatórias são integráveis, é dito martingale se:*

$$E[X_m | \mathcal{F}_n] = X_n, \forall m \geqslant n \in \mathbb{N}$$

.

Se X_t for um processo a tempos contínuos em $[0, T]$, num espaço com filtração também a tempos contínuos, a definição se mantém, trocando $m, n \in \mathbb{N}$, na igualdade acima por $s \geqslant t \in [0, T]$, respectivamente.

5 Exemplos

5.1 Alguns exemplos de σ-Álgebras

Aqui darei alguns exemplos simples de σ-álgebra:

- A familia que consiste apenas do conjunto vazio e do conjunto X é chamada de σ-álgebra trivial ou mínima sobre X.
- O conjunto de partes de X é chamado de σ-álgebra discreta.
- A coleção $\{\varnothing, A, A^C, X\}$ é uma σ-álgebra simples gerada pelo subconjunto A.
- A coleção de subconjuntos de X que são contáveis ou cujos complementos são contáveis é uma σ-álgebra. Esta é a σ-álgebra gerada pelo conjunto unitário de X.
- A coleção de todas as uniões de conjuntos em uma partição contável de X é uma σ-álgebra.

5.2 Alguns exemplos simples de Martingales

- Todo passeio aleatório não enviesado, em qualquer dimensão é um martingale.
- O dinheiro do apostador é um martingale se o apostador estiver jogando um jogo honesto.
- Existe também o martingale de **Moivre**, que é definido para uma moeda desonesta com probabilidade p de dar cara e probabilidade $q = 1-p$ para coroa. Considere então a sequência:

  $$X_{n+1} = X_n \pm 1$$

  Com $+$ para cara e $-$ se der coroa. Então seja:

  $$Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}$$

  Então, $\{Y_n : n = 1, 2, 3, ...\}$ é um martingale com relação à $\{X_n : n = 1, 2, 3, ...\}$.

6 Considerações finais

Durante o semestre pude me aprofundar em diversos conceitos que não imaginaria estarem envolvidos no mercado financeiro, e além disso, pude estudar problemas extremamente interessantes, por vezes ainda mais interessantes que o próprio modelo de Black-Scholes, como utilizar σ-álgebras para modelar informação, o que para mim foi um dos momentos mais satisfatórios do estudo, apesar de ser um tema deveras denso, e complicado.

Pude compreender como se dá a precificação de ativos, derivativos e também entender princípios econômicos que não tive a oportunidade de estudar durante a graduação.

Também gostaria de acrescentar que apesar do modelo ser largamente utilizado ainda hoje, o modelo apresenta algumas falhas importantes que não são previstas pelo modelo, como por exemplo a suposição de que o risco e a volatilidade são constantes, e não prever mudanças bruscas de valores nos preços de ações como acontece algumas vezes, e sendo aplicável ao modelo Europeu, porém apesar de suas debilidades se mostra muito efetivo por vezes e atualmente seu uso vem se popularizando.

Devo dizer que infelizmente não pude dar o aprofundamento necessário a fim de compreender completamente o assunto e gostaria muito de que fosse possível no futuro, pois é um assunto de meu interesse, e sei que com mais tempo de dedicação e persistência o trabalho a ser realizado pode ser muito frutífero.

Volto a agradecer o professor Laércio Vendite pela oportunidade de entrar em contato com um assunto de grande importância, e extremamente interdisciplinar não se restringindo apenas ao âmbito matemático, o que faz do problema ainda mais importante e interessante para nós matemáticos aplicados.

Referências

[1] R. BARTLE. The elements of integration and Lebesgue measure. *Wiley classics library. ISBN 9780471042228.*, 1995.

[2] R. BASS. Stochastic processes. *Cambridge University Press.*, 2011.

[3] J. L. DOOB. What is a martingale? *The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America*, 1971.

[4] L. EVANS. An introduction to stochastic differential equations. *American Mathematical Society,*, 2012.

[5] G. FOLLAND. Real analysis: Modern techniques and their applications. *Wiley, 2013. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts)*, 2013.

[6] A. FRIEDMAN. Partial differential equations of parabolic type. *Prentice-Hall*, 1964.

[7] P. K. HERVéS-BELOSO, C.; MONTEIRO. . information and σ-algebras. 2012.

[8] S. KARATZAS, I.; SHREVE. Brownian motion and stochastic calculus. *Springer-Verlag*, 1988.

[9] H. KUO. Introduction to stochastic integration. *Springer New York*, 2005.

[10] J. MUNKRES. Analysis on manifolds. *Avalon Publishing*, 1997.