

Modelos Discretos e Contínuos de Dinâmicas Populacionais Intra- e Interespecífica

Larissa Macul Moreno

November 26, 2018

1 Resumo e Objetivos

O objetivo deste trabalho é fazer o estudo de alguns problemas de dinâmicas populacionais. De forma a construir estratégias para a obtenção de coeficientes e resultados interessantes em seus modelos matemáticos.

2 Modelos Matemáticos de Dinâmicas Populacionais

É possível transformar um problema de dinâmica populacional em um modelo matemático dividindo-o em estágios. Conhecendo um estado inicial e uma taxa de variação, deseja-se descobrir próximos estados.

Um exemplo simples seria uma população de bactérias, onde cada indivíduo realiza reprodução por cissiparidade a cada determinado período de tempo. Então, a cada estágio, o número atual de indivíduos se dobra. Sendo M_i o número de bactérias no estado i e a o coeficiente de variação, podemos dizer que:

$$M_{i+1} = aM_i$$

Dado um número inicial M_0 podemos fazer a previsão dos próximos estados. Dada por:

$$M_n = aM_{n-1} = a(aM_{n-2}) = \dots = a^n M_0$$

Para $a = 1$, a população não varia com o tempo. Para $a < 1$ a população decresce com o tempo, tendendo a zero com n muito grande. Para $a > 1$ a população cresce ao longo do tempo. No caso das bactérias, $a = 2$, então podemos prever que, em condições ideais (fontes de alimento em abundância) o crescimento da população será em fatores de potências de 2 ao longo do tempo.

Nesse exemplo podemos perceber como os coeficientes de variação representaram boas indicações sobre o futuro da população. Se o coeficiente era superior a 1 indicava a continuação e crescimento da espécie. Se era menor que 1 indicava o decrescimento da espécie e uma futura extinção. Nos modelos estudados

a seguir, uma análise de coeficientes semelhante será feita para que situações desejáveis (não -extinção ou convivência entre espécies) sejam encontradas.

Transformar uma função que depende de um estado k em uma função contínua que varia ao longo do tempo possibilita o uso de derivadas para tratar das variações. Então, faz sentido usar sistemas de equações diferenciais para representar modelos populacionais.

3 Modelo Presa-Predador e Competição Intra-e Interespecífica

Para a descrição de um modelo de competição interespecífica entre duas espécies, onde uma seria presa e a outra predadora, é possível usar as Equações de Lotka-Volterra (Referência 1).

Seja P o número de indivíduos que descreve uma população de peixes, T o número de indivíduos que descreve uma população de tubarões e a , b , c e d coeficientes positivos. As equações a seguir descrevem suas variações ao longo do tempo.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= aP - bPT \\ \frac{dT}{dt} &= -cT + dPT\end{aligned}$$

Os coeficientes a e b representam as taxas de crescimento normais da população de Peixes e Tubarões respectivamente, e os coeficientes b e c representam a interação entre as duas espécies. Podemos concluir que a população de peixes cresce de maneira ilimitada, mas seu tamanho é controlado pela população de tubarões. Já os tubarões precisam de peixes para sobreviver.

Agora, analisando as equações diferenciais, quero encontrar condições para o crescimento das duas populações.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} > 0 &\iff aP - bPT > 0 \iff P(a - bT) > 0 \iff T < \frac{a}{b} \\ \frac{dT}{dt} > 0 &\iff -cT + dPT > 0 \iff T(-c + dP) > 0 \iff P > \frac{c}{d}\end{aligned}$$

A Figura 1 representa a variação das populações P e T em torno do ponto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. É possível observar que nessas condições há sempre a tendência intuitiva de que o crescimento de peixes significa comida em abundância para os predadores, o que proporciona o crescimento da população de tubarões, consequentemente mais tubarões se alimentarão de mais peixes, diminuindo essa população, porém com alimento escasso a população de tubarões decai, e assim por diante.

Agora, seja H o número de indivíduos de uma população de Hienas e U o número de indivíduos numa população de Urubus. As duas espécies competem entre si para obter alimentos. Adicionando também a este modelo condições de

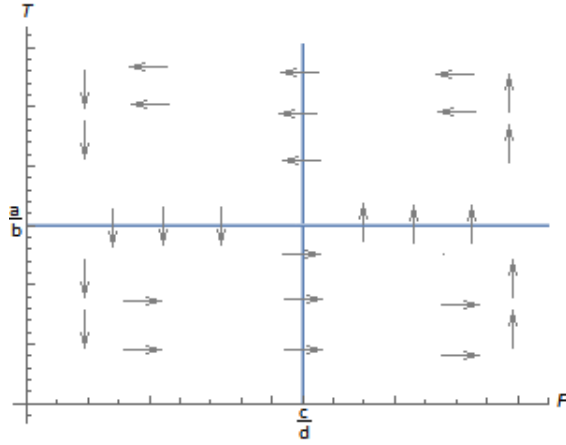


Figure 1: Linhas de campo para modelo presa x predador simples

Verhulst (Referência 1) de competição intraespecífica entre membros da mesma espécie temos o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \lambda H \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha HU \\ \frac{dU}{dt} &= \gamma U \left(1 - \frac{U}{M}\right) - \beta HU\end{aligned}$$

Onde λ, γ, α e β são números positivos e K e M representam o limite de crescimento da espécie. Transformando os coeficientes das equações, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= H(a - bH - cU) \\ \frac{dU}{dt} &= U(d - eU - fH)\end{aligned}$$

Os coeficientes a e d representam o crescimento natural das populações de Hienas e Urubus respectivamente; b e e representam a taxa de influência da competição intraespecífica e c e f a taxa de influência inter-específica.

Analisando novamente o crescimento das populações através das equações diferenciais vamos obter as retas $r : \frac{a}{c} - \frac{b}{c}H$ e $s : \frac{d}{e} - \frac{f}{e}H$.

$$\frac{dH}{dt} > 0 \iff H(a - bH - cU) > 0 \iff a - bH - cU > 0 \iff U < \frac{a}{c} - \frac{b}{c}H : r$$

$$\frac{dU}{dt} > 0 \iff U(d - eU - fH) > 0 \iff d - eU - fH > 0 \iff U < \frac{d}{e} - \frac{f}{e}H : s$$

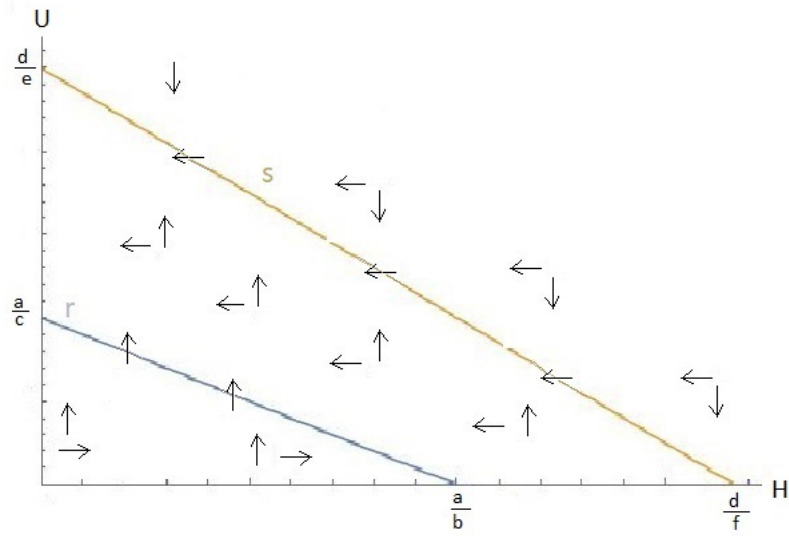


Figure 2: Caso 1 de coeficientes para o Modelo Hiena - Urubu

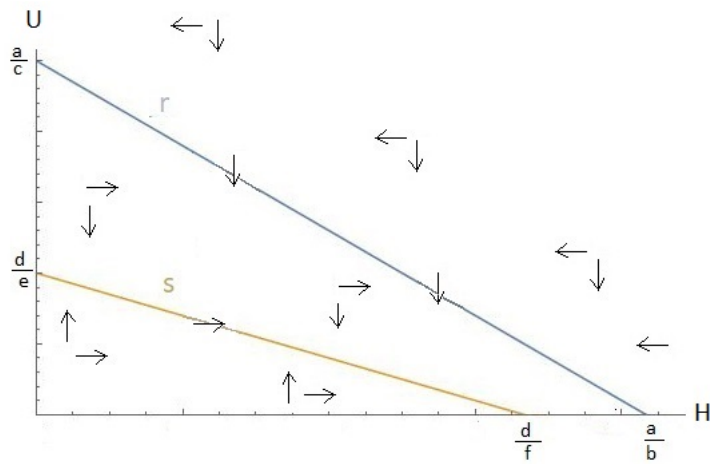


Figure 3: Caso 2 de coeficientes para o Modelo Hiena - Urubu

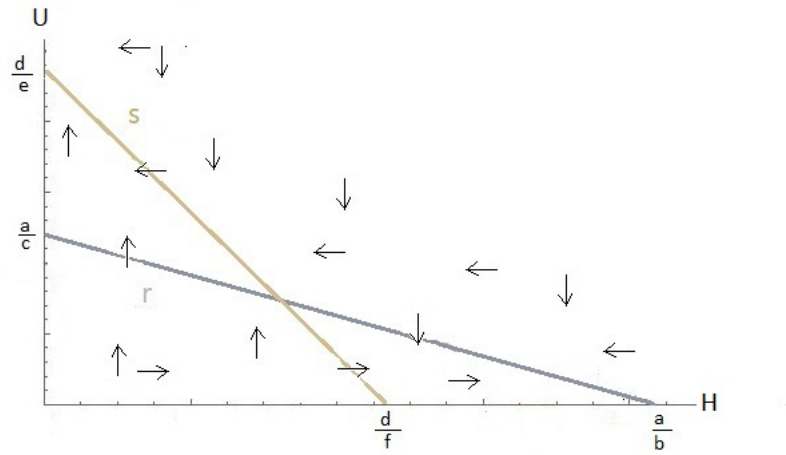


Figure 4: Caso 3 de coeficientes para o Modelo Hiena - Urubu

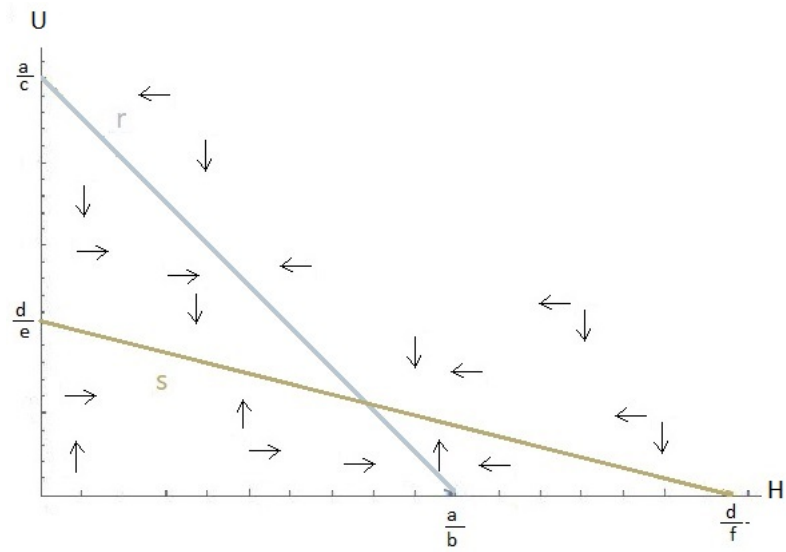


Figure 5: Caso 4 de coeficientes para o Modelo Hiena - Urubu

Dependendo dos coeficientes as retas r e s se posicionam no plano cartesiano positivo de quatro maneiras distintas. Resultando em quatro modelos de comportamento das espécies, como mostrado nas Figuras 2 a 5.

Podemos observar que somente na Figura 5, o modelo tende à convivência estável entre as duas espécies. Diferente do que acontece nas Figuras 2, 3 e 4, onde o modelo tende para extinção de uma população. Para isso então os coeficientes devem ter a relação:

$$\frac{a}{c} > \frac{d}{e}$$

$$\frac{a}{b} > \frac{d}{f}$$

Esses coeficientes podem ser interpretados que para as duas espécies conviverem deve existir um equilíbrio entre a competição intra- e interespecífica.

4 Estados Estacionários e Estados Estacionários Estáveis

Para os dois modelos descritos acima, as condições de convivência entre as duas espécies se dá ao redor de um ponto estacionário que é a solução do sistema de equações diferenciais do modelo.

$$M_{n+1} = M_n \iff \frac{dM}{dt} = 0$$

Para o segundo modelo, o ponto estacionário a ser estudado agora é o descrito pela Figura 3. Onde as retas r e s não se interceptam para U e H positivos, e o modelo tende para extinção da população de Urubus.

$$\frac{dU}{dt} = U(d - eU - fH) = 0 \iff U = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = H(a - bH - cU) = 0 \iff a - bH - cU = 0 \iff a - bH = 0 \iff H = \frac{a}{b}$$

Como observado na Figuras 3, independente do estado inicial do sistema, a tendência é que ele vá para o ponto $(\frac{a}{b}, 0)$. Esse ponto é chamado de Ponto Estacionário Estável já que se alguma variação nas populações acontece, o sistema retornará ao estado estacionário. As figuras 2 e 4 também representam situações com pontos estáveis.

É possível identificar se um ponto estacionário é estável ou não através da matriz Jacobiana do sistema de equações diferenciais. No caso do modelo estudado:

$$J = \begin{bmatrix} a - cU - 2bH & -cH \\ -fU & d - 2eU - fH \end{bmatrix}$$

Pontos estacionários estáveis tem matriz Jacobiana com autovalores negativos (ou com parte real negativa) (Referência 1). Para o ponto encontrado na Figura 3 ($r > s$) os autovalores são os seguintes.

$$\begin{aligned} \det(J - I\lambda) &= (a - cU - 2bH - \lambda)(d - 2eU - fH - \lambda) - (-cH)(-fU) = 0 \\ \iff (a - 2bH - \lambda)(d - fH - \lambda) = 0 &\iff \iff (a - 2a - \lambda)(d - f\frac{a}{b} - \lambda) = 0 \\ \iff (-a - \lambda)(d - f\frac{a}{b} - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -a < 0$$

$$\lambda_2 = d - f\frac{a}{b} < 0 \iff \frac{d}{f} < \frac{a}{b}$$

Assim, como no caso onde $r > s$ as condições para a negatividade dos autovalores são cumpridas, o ponto $(\frac{a}{b}, 0)$ é de fato um ponto estacionário estável.

Podemos também concluir que para este modelo o ponto $(0, 0)$ nunca será um ponto estacionário estável, já que os autovalores da matriz Jacobiana são sempre positivos neste caso.

$$\begin{aligned} \det(J - I\lambda) &= (a - cU - 2bH - \lambda)(d - 2eU - fH - \lambda) - (-cH)(-fU) = 0 \\ (a - \lambda)(d - \lambda) = 0 &\iff \lambda = a, d \iff \lambda > 0 \end{aligned}$$

É evidente o trabalho necessário para encontrar soluções analíticas para casos mais complexos. Então mesmo que existam métodos para resolver sistemas lineares e para obter seus respectivos autovalores, a seguir a abordagem usada será a simulação dos modelos matemáticos e a interpretação dos coeficientes obtidos.

5 Simulação de Modelos

O modelo a seguir descreve o relacionamento entre três populações: Gaviões, Cobras e Roedores. Gaviões se alimentam de cobras; cobras são predadas por gaviões, e se alimentam de roedores; e roedores são predados por gaviões e cobras.

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= G(-a + bC + cR) \\ \frac{dC}{dt} &= C(d - eG + fR) \\ \frac{dR}{dt} &= R(g - hG - iC) \end{aligned}$$

Como a relação entre Gaviões e Cobras e entre Gaviões e Roedores é de predador e presa, pode ser descrita pelo modelo de Lotka Volterra. A tendência do sistema é que as populações variem em torno de um ponto de equilíbrio.

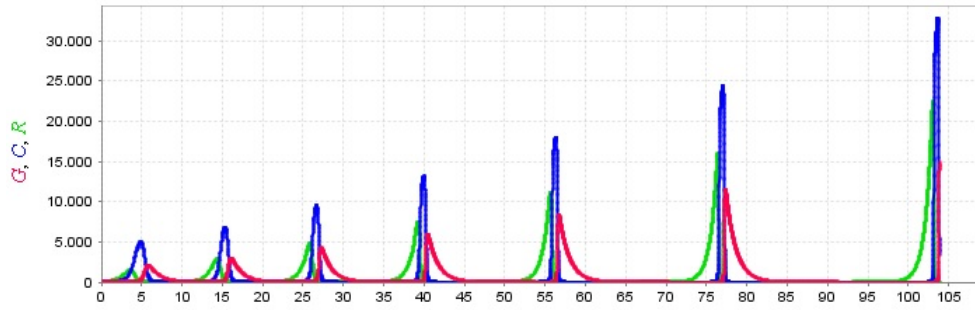


Figure 6: Modelo Gavião, Cobra e Roedores ao longo do tempo

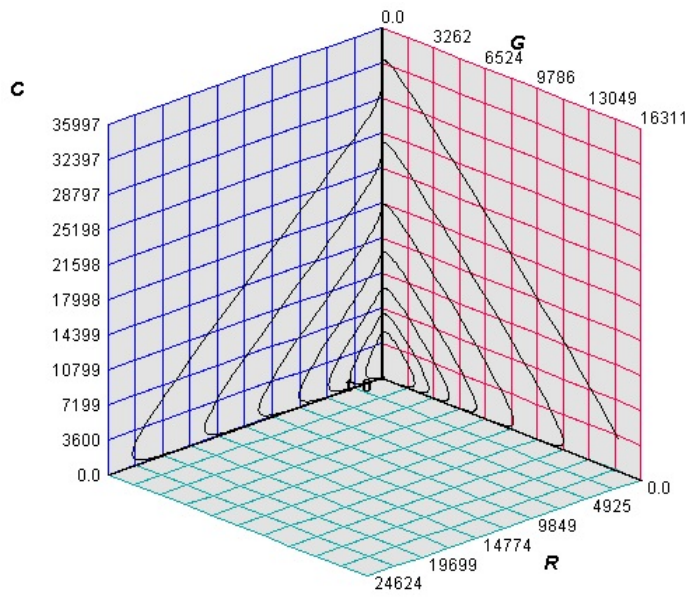


Figure 7: Relação entre Gaviões, Cobras e Roedores

Usando essas equações como parâmetros e estimando os demais coeficientes, o modelo foi simulado no software Populus (Referência 2).

Podemos observar na Figura 6 e 7 que o modelo está em equilíbrio para os coeficientes escolhidos. Ao longo do tempo, as espécies de Cobra e Gavião variam devido sua competição para predação Roedores.

O modelo final descreve a relação entre Tuiuius, Jacarés, Anuros e Peixes. Tuiuius e Jacarés são predadores de Anuros e Peixes, além de ter competição intra-específica. Anuros e Peixes também compartilham fontes de alimentos e tem competição intra-específica. Formando o seguinte sistema de Equações Diferenciais.

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= J(a_1 - b_1J - c_1T + d_1A + e_1P) \\ \frac{dT}{dt} &= T(a_2 - b_2J - c_2T + d_2A + e_2P) \\ \frac{dA}{dt} &= A(a_3 - b_3J - c_3T - d_3A - e_3P) \\ \frac{dP}{dt} &= P(a_4 - b_4J - c_4T - d_4A - e_4P)\end{aligned}$$

Como Jacarés e Tuiuius e Peixes e Anuros tem uma relação de competição inter-específica, podemos utilizar o resultado encontrado no modelo de dinâmica entre Hienas e Urubus para encontrar os coeficientes que resultam no Estado Estacionário Estável onde as espécies convivem.

Em um modelo com Jacarés e Tuiuius, as condições para um estado estacionário são as seguintes.

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{c_1} &> \frac{a_2}{b_2} \\ \frac{a_1}{b_1} &> \frac{a_2}{c_2}\end{aligned}$$

Assim como para um modelo com Peixes e Anuros, as condições seriam:

$$\begin{aligned}\frac{a_3}{c_3} &> \frac{a_4}{b_4} \\ \frac{a_4}{b_4} &> \frac{a_4}{c_4}\end{aligned}$$

Usando o software Populus para simular o modelo estimando os outros coeficientes chegamos na seguinte variação ao longo do tempo, mostrada na Figura 8. É possível observar na Figura 9 a trajetória das espécies.

Em ambos os modelos simulados, um estado estacionário estável de convivência entre as espécies foi alcançado como desejado.

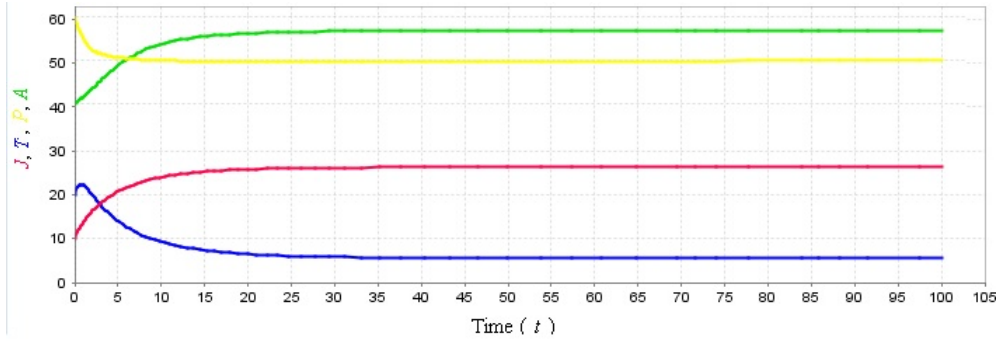


Figure 8: Modelo Tuituius, Jacarés, Peixes e Anuros

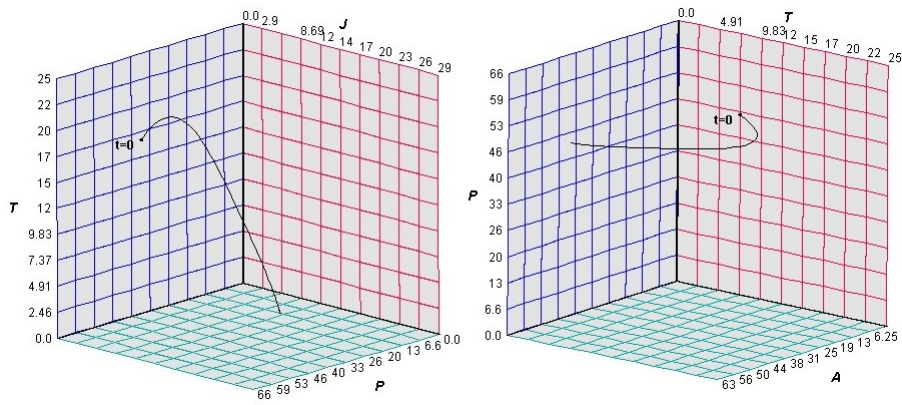


Figure 9: Relação entre Tuituius, Jacarés, Peixes e Anuros

6 Conclusão e Trabalhos Futuros

A possibilidade de transformar um problema de dinâmica populacional em um modelo matemático significa poder prever acontecimentos e para a Biologia e Meio Ambiente pode significar prever a extinção de uma espécie, ou o impacto da poluição em um bioma.

Em termos da continuação deste trabalho, pretendemos incluir a variabilidade espacial além daquela abordada neste trabalho, a temporal. Trabalhos de Modelagem e Simulação Numérica já foram iniciados com resultados animadores.

7 Referências

1. Edelstein-Keshet, L., *Mathematical Models in Biology*.
2. College of Biological Science, University of Minnesota, Populus. <https://cbs.umn.edu/populus/overview>