UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Problema de Dimensionamento de Lotes

Lucas Gennari Vassalo

Campinas 2018

SUMÁRIO

1. *Introdução*

Todo processo econômico de produção e manufatura tem sido muito estimulado pelo constante crescimento da economia e da população mundial. As revoluções industriais trouxeram uma grande pergunta à mesa: como é possível otimizar os processos de produção a fim de se ter um menor custo ou um melhor aproveitamento de materiais? Desde então, as indústrias têm passado por profundas mudanças de melhorias e modernização da produção de seus produtos e na administração racional.

O Problema de Dimensionamento de lotes engloba uma questão muito importante em todas as indústrias: quando e quanto produzir. Este problema consiste em determinar um plano de quanto produzir e/ou comprar nos próximos períodos de tempo, comumente chamado de horizonte de planejamento. Ele também tem como função determinar os níveis de estoque e os recursos necessários e disponíveis para a implementação do plano (Thomas e MacClain, 1993).

Logo, nesse trabalho serão apresentados métodos de resolução para problemas de dimensionamento de lotes, baseados em sistemas computacionais. Esta é uma área de pesquisa que tem recebido grande atenção devido à sua relevância na otimização de processos produtivos.

Serão apresentados alguns tipos de problemas e suas respectivas modelagens matemáticas (monoestágio de único e múltiplos itens). Também serão apresentados métodos e estratégias de soluções para os problemas.

2. O Problema de Dimensionamento de Lotes

Nas Indústrias, o plano de produção exige a tomada de decisões em tempos de curto, médio e longo prazo sobre a quantidade de itens a ser produzida em várias (ou única) máquinas, em cada período de tempo ao longo de um horizonte de planejamento finito, de modo a atender toda demanda requerida. Levando em consideração algumas restrições que podem ser impostas ao problema como, por exemplo, restrições de capacidade, o problema tem como objetivo minimizar os custos totais de produção.

Na literatura, o planejamento de produção que visa quanto e quando produzir pode ser definido como: O problema de Dimensionamento de Lotes (PDL) (em inglês LSP – Lot Sizing Problem). Em diversos processos produtivos a quantidade a ser produzida em um certo intervalo de tempo é chamada de lote, daí o nome do problema.

O problema de dimensionamento de lotes possui diferentes aspectos ao quais ele pode estar sujeito. Definiremos estes aspectos que caracterizam o PDL abaixo:

Definição 1. *Itens - Em um sistema quando temos somente um tipo de item a ser produzido temos um sistema único-item, caso existam mais tipos a serem produzidos temos um caso multi-item.*

Definição 2. *Estágios - O sistema produtivo pode ser classificado como* ***multiestágio*** *ou* ***monoestágio****. No sistema multiestágio, a produção de alguns itens (chamados de produtos ou itens finais) depende da produção de outros itens (componentes). A demanda dos itens de um estágio, então, depende da quantidade produzida em estágios anteriores e logo as demandas são dependentes. No sistema monoestágio o item é produzido de maneira direta, em um único estágio. As demandas são satisfeitas diretamente pela produção do item final, neste caso dizemos que o problema tem demandas independentes. No caso multiestágio, alguns itens componentes podem ter simultaneamente demandas dependentes e independentes.*

Definição 3. *Demanda - Um problema tem itens com* ***demanda estática*** *se os valores da demanda não mudam em relação ao tempo, e* ***demanda dinâmica*** *se ocorre variação no valor da demanda ao longo do tempo.*

Se os valores da demanda são conhecidos*, temos um problema com* ***demanda determinística****. Se os valores da demanda são conhecidos segundo uma distribuição de probabilidade, temos um problema com* ***demanda estocástica****.*

Definição 4. *Horizonte de Planejamento - Horizonte de planejamento é o intervalo de tempo considerado no planejamento da produção, e pode ser considerado* ***finito*** *ou* ***infinito****. O sistema produtivo pode ser planejado de dois modos classificados por problemas* ***contínuos*** *ou* ***discretos****.*

O caso com horizonte de planejamento finito é usualmente acompanhado por uma demanda dinâmica, e o caso infinito por uma demanda estática. No caso de problemas discretos, o horizonte de planejamento é dividido em intervalos de tempo menores chamados de períodos. Considerar ou não a capacidade de produção no modelo matemático, Definição 5, é um fator importante porque afeta a complexidade computacional do problema de dimensionamento de lotes.

Definição 5. *Capacidade - Um problema em que é possível produzir qualquer quantidade de itens é classificado como* ***não capacitado****. Se existe um limite máximo para a quantidade a ser produzida, o problema é* ***capacitado****.*

Outro fator importante que afeta a estrutura e a complexidade computacional do problema é se o tempo (e/ou o custo) de preparação das máquinas para a produção (de forma simplificada preparo ou *setup* em inglês) é considerado.

Definição 6. *Tempo e custo de preparo - Se o tempo (custo) necessário para a preparação das máquinas depende apenas do item para o qual a máquina está sendo preparada dizemos que o* ***tempo (custo) de preparo*** *é* ***simples****. Se o tempo (custo) necessário para a preparação das máquinas depende também do item produzido antes (ou depois) então o* ***tempo (custo) de preparo*** *é* ***complexo****, ou o* ***tempo (custo) de preparo*** *é* ***dependente da sequência****.*

Em determinadas indústrias, a produção excedente de um determinado produto pode ser armazenada para o atendimento de demandas futuras. Uma das grandes questões a ser respondida ao se estudar o PDL nessas situações é a determinação do balanço (em inglês *tradeoff*) ideal entre custo de preparo e custo de estoque.

Definição 7. *Estoque - A quantidade excedente armazenada é chamada de* ***estoque*** *(*inventory *em inglês) e em geral existe um custo associado ao armazenamento de produtos (custo de estoque).*

Definição 8. *Atraso na entrega - Em certos contextos industriais, a demanda não atendida em um período pode ser atendida em períodos posteriores. Essa demanda não atendida é chamada* ***atraso na entrega*** *(*backlogging *em inglês).*

2.1 O Problema Monoestágio com um Único Item

O objetivo deste problema é a otimização do custo total de produção, considerando os custos de preparo, produção e estoque em um horizonte de tempo finito, esse dividido em intervalos de tempo ou períodos.

O problema de dimensionamento de lotes monoestágio com um único item deve atender a uma demanda preestabelecida e pode ser formulado com ou sem restrições de capacidade.

2.1.1 O Problema sem restrições de capacidade

Índice:

$t = \{1, \dots, T\}$: períodos de tempo;

Considere os seguintes dados (Parâmetros):

d_t : demanda no período t;

c_t : custo unitário de produção no período t;

S_t : custo de preparação para a produção no período t;

H_t : custo unitário de estocagem no período t;

Variáveis de decisão são:

X_t : quantidade produzida no período t;

I_t : quantidade em estoque no período t;

Y_t : é igual a 1 se há preparação no período t e 0 caso contrário;

Formulação:

$$min\ \sum_{t=1}^{T} H_t I_t + c_t X_t + S_t Y_t \qquad (2.1)$$

Sujeito a:

$$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t \qquad t = 1, \dots, T. \qquad (2.2)$$

$$X_t \leq M Y_t \qquad t = 1, \dots, T. \qquad (2.3)$$

$$Y_t \in \{0,1\} \qquad t = 1, \dots, T. \qquad (2.4)$$

$$X_t \geq 0, \quad I_t \geq 0, \quad I_0 = 0 \qquad (2.5)$$

Nesta formulação, a função objetivo (2.1) minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação. As restrições (2.2) são chamadas de restrições de balanceamento de estoque, tal que a quantidade produzida em um período somada a quantidade disponível em estoque no início desse mesmo período subtraído da sobra em estoque ao final desse período deve ser igual a demanda do período. As restrições (2.3) e (2.4) asseguram que o tempo e o custo de preparação são considerados apenas quando existe produção e, por fim, (2.5) são restrições de não negatividade. O estoque inicial e final são nulos.

Através do algoritmo de programação dinâmica desenvolvido por Wagner e Whitin (1958), o qual será apresentado e discutido ao longo desse trabalho, pode-se encontrar de forma ótima uma solução para o problema. Lembramos que mesmo dada sua simplicidade, como será mostrado, problemas de dimensionamento de lotes múltiplos itens, quando relaxados, tornam-se vários subproblemas deste tipo. Por isso, seu estudo merece grande respeito.

O problema citado (2.1) - (2.5) pode ser reformulado a fim de se considerar restrições de capacidade que aqui não foram consideradas. Abaixo é apresentada essa nova formulação que, ao considerar essas restrições de capacidade levam em consideração o tempo de preparo e de produção.

2.1.2 O Problema com restrições de capacidade

Índice:

$t = \{1, \dots, T\}$: períodos de tempo;

Considere os seguintes dados (Parâmetros):

d_t : demanda no período t;

c_t : custo unitário de produção no período t;

S_t : custo de preparação para a produção no período t;

H_t : custo unitário de estocagem no período t;

b_t : tempo necessário para produzir uma unidade no período t;

s_t : tempo de preparação para a produção no período t;

CAP_t : limite de capacidade (em unidades de tempo) no período t;

Variáveis de decisão são:

X_t : quantidade produzida no período t;

I_t : quantidade em estoque no período t;

Y_t : é igual a 1 se há preparação no período t e 0 caso contrário;

Formulação:

$$min \sum_{t=1}^{T} H_t I_t + c_t X_t + S_t Y_t \qquad (2.6)$$

Sujeito à:

$$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t \qquad t = 1, \dots, T. \qquad (2.7)$$

$$b_t X_t + s_t Y_t \leq CAP_t \qquad t = 1, \dots, T. \qquad (2.8)$$

$$X_t \leq M Y_t \qquad t = 1, \dots, T. \qquad (2.9)$$

$$Y_t \in \{0,1\} \qquad t = 1, \dots, T. \qquad (2.10)$$

$$X_t \geq 0, \quad I_t \geq 0, \quad I_0 = 0 \qquad (2.11)$$

Onde a restrição (2.8) refere-se a restrição de capacidade.

2.2 O Problema Monoestágio com Múltiplos itens

Índices:

$t = \{1, \dots, T\}$

$i = \{1, \dots, N\}$

Considere os seguintes dados (Parâmetros):

d_{it} : demanda do item i no período t;

c_{it} : custo unitário de produção do item i no período t;

S_{it} : custo de preparação para a produção do item i no período t;

H_{it} : custo unitário de estocagem do item i no período t;

b_i : tempo necessário para produzir uma unidade do item i;

s_i : tempo de preparação para a produção do item i;

CAP_t : limite de capacidade (em unidades de tempo) no período t;

Variáveis de decisão são:

X_{it} : quantidade produzida do item i no período t;

I_{it} : quantidade em estoque do item i no período t;

Y_{it} : é igual a 1 se há preparação do item i no período t e 0 caso contrário;

Formulação:

$$min \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} H_{it} I_{it} + c_{it} X_{it} + S_{it} Y_{it} \qquad (2.12)$$

Sujeito a:

$$X_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \qquad t = 1, \dots, T; \quad i = \{1, \dots, N\} \qquad (2.13)$$

$$\sum_{i}^{N} b_i X_{it} + \sum_{i}^{N} S_i Y_{it} \leq CAP_t \qquad i = \{1, \dots, N\} \qquad (2.14)$$

$$X_{it} \leq M Y_{it} \qquad t = 1, \dots, T; \quad i = \{1, \dots, N\} \qquad (2.15)$$

$$Y_{it} \in \{0,1\} \qquad t = 1, \dots, T; \quad i = \{1, \dots, N\} \qquad (2.16)$$

$$X_{it} \geq 0, \quad I_{it} \geq 0, \qquad t = 1, \dots, T; \quad i = \{1, \dots, N\} \qquad (2.17)$$

Na formulação anterior, a função objetivo (2.12) minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação do plano de planejamento. As restrições (1.13) são de balanceamento de estoque como já discutida. As restrições (2.14) são as novas restrições, essas devido à limitação de capacidade, onde é levado em consideração o tempo despendido para a produção dos itens e preparação das máquinas. As restrições (2.15) e (2.16) asseguram que o tempo e o custo de preparação são considerados apenas quando existe produção e, por fim, (2.17) são as restrições de não negatividade. O estoque inicial é zero ($I_{i,0} = 0$).

A formulação do problema com múltiplos itens sem restrições de capacidade é semelhante à formulação (2.12) – (2.17), basta reconsiderar as restrições (2.14).

3. Métodos básicos de solução do Problema de Dimensionamento de Lotes único item sem restrição de capacidade

Aqui serão abordados alguns métodos básicos utilizados na resolução dos problemas de dimensionamento de lotes com um único item sem restrição de capacidade. Serão apresentados os métodos heurísticos: Lote-por-Lote, Silver-Meal, Custo Unitário Mínimo e Balanço por partes. Por fim é apresentado o método ótimo proposto por Wagner e Whitin (1985) e realizada uma comparação entre os métodos com exemplificação.

3.1 Heurísticas

Métodos Heurísticos ou Heurísticas são procedimentos realizados a fim de se obter uma ou mais soluções factíveis para o problema. Não há nenhuma garantia de obtenção da solução ótima.

Os métodos heurísticos a seguir são úteis, principalmente, para a obtenção de limitantes primais ou superiores para o PDL único-item. Os custos de produção aqui serão considerados constantes; tal consideração nenhum prejuízo traz ao resultado final.

- Heurística Lote-por-lote: recebe esse nome pois nele o estoque é considerado sempre nulo, tal que toda a demanda do período em questão deve ser atendida pela quantidade produzida no mesmo período. Assim são necessárias preparações de linha de produção em todos os períodos com demanda positiva.

- Heurística de Silver-Meal: Está heurística recebe esse nome em homenagem aos autores, Edward Silver e Harlan Meal. Seja $C(t)$ o custo total de produção até o período t, dividido por t. Assim, se no período 1 a produção visa atender somente a demanda deste período, não há custo de estocagem, então:

$$C(1) = S_1$$

No entanto, se no período 1 a produção visa atender às demandas dos períodos 1 e 2, existirá um custo de estocagem sobre a quantidade d_2 , relativa a demanda do período 2. Ou seja:

$$C(2) = (S_1 + H_1 d_2)/2$$

De maneira análoga:

$$C(3) = (S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3)/3$$

Em geral:

$$C(t) = \frac{S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3 + \cdots + (H_1 + H_2 + \cdots + H_{t-1}) d_t}{t} \quad onde\ t \leq T$$

Quando $C(t) > C(t-1)$ o processo é interrompido e produz-se uma quantidade visando atender as demandas dos períodos $1, 2, \ldots, t-1$, ou seja, $X_1 = d_1 + d_2 + \cdots + d_{t-1}$. Posteriormente, o processo continua novamente a partir do período t.

- Heurística do custo unitário mínimo: Este método é apenas uma pequena modificação do método de Silver-Meal. Ao invés de dividir o custo total de produção pelo período t, dividi-se pela demanda total até o período t.
  Ou seja:
  $$C(t) = \frac{S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3 + \cdots + (H_1 + H_2 + \cdots + H_{t-1}) d_t}{(d_1 + d_2 + \cdots + d_t)} \quad onde\ t \leq T$$

- Heurística de Balanço por Partes: Nesta Heurística, inicia-se no primeiro período do plano de planejamento e evolui em direção ao período final. Em cada período é calculado o custo de estocagem e somado aos custos de estocagens dos períodos anteriores. Quando o valor desta soma supera o valor de custo fixo de preparação, que é fixo, o processo é interrompido e uma comparação é feita entre os períodos a fim de se verificar em qual deles a soma dos custos de estocagem está mais próximo do custo de preparação. Os pedidos deverão atender a projeção de demanda até este período. Em seguida, inicia-se novamente no período seguinte e o processo se repete.

3.2 O Método Ótimo de Wagner e Whitin

Para a apresentação deste método começaremos com uma propriedade:

Propriedade 1: a solução ótima do problema de dimensionamento de lotes único item satisfaz: $I_{t-1} X_t = 0\ para\ t = 1, \ldots, T$. (Johnson e Montgomory, 1974).

Isto significa que a demanda de um período t deve ser totalmente satisfeita com a produção do período $t(X_t)$, ou com o estoque do período $t-1(I_{t-1})$. Assim, a quantidade produzida num determinado período deve ser exatamente igual à soma de um conjunto de futuras demandas, ou seja:

$$X_T = 0\ ou\ X_T = d_T$$

Wagner e Whitin propõem uma técnica de programação dinâmica (citação) para a resolução desse problema utilizando-se das seguintes equações recursivas:

$$f_t = min_{j>t}\left(c_{ij} + f_j\right) \quad t = 1, \dots, T; \quad f_{T+1} = 0$$

Onde:

- f_t é o custo mínimo para o período de planejamento t e deve-se encontrar o período j $(j > t)$ para o qual este mínimo ocorre;
- C_{ij} é determinado pela expressão:

$$C_{ij} = S_t + H_t d_{t+1} + (S_t + H_t d_{t+1}) d_{t+2} + (H_t + H_{t+1} + H_{t+2}) d_{t+3} + \cdots + (H_t + H_{t+1} + \cdots + H_{t-2}) d_{t-1}$$

$$para\ t = 1, \dots, T \quad j = t + 1, \dots, (T + 1)$$

Assim que todos os custos estão determinados deve-se obter o custo mínimo de planejamento para cada período pela aplicação das equações recursivas, de forma regressiva. O objetivo é encontrar para qual período j $(j > t)$ para o qual o mínimo ocorre.

Atualmente existem algumas implementações mais eficientes do método de Wagner e Whitin (1958), por exemplo, Evans (1985). Em Wolsey (1995), pode ser encontrada uma revisão bibliográfica, mostrando avanços dos métodos de resolução para problemas de um único item sem restrições de capacidade.

3.3 Exemplificação e comparação entre os métodos

Considere o seguinte problema para exemplificação e comparação entre os métodos:

Deseja-se produzir um determinado produto P, o qual demora quatro semanas para ser produzido. Pretende-se fazer um plano de produção para o produto P, da semana 8 até a 17. A previsão de demanda para estas semanas é conhecida e é dada pela seguinte tabela:

Semana	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Demanda Liq.	42	42	32	12	26	112	45	14	76	38

Tabela 1: Demanda líquida no período da semana 8 até 17.

O custo de preparação S_t deste produto é igual a \$ 132,00 para qualquer semana t, além disso, o custo unitário de estocagem H_t é de \$ 0,60 por semana.

A tabela abaixo nos mostra a comparação dos resultados obtidos pelos métodos apresentados anteriormente:

	Custo total ($)
Lote-por-Lote	1.320,00
Heurística de Silver-Meal	650,40
Heurística do custo unitário mínimo	718,80
Heurística de balanço por partes	693,60
Solução ótima (Wagner e Whitin)	610,20

Tabela 2: Comparação dos resultados obtidos entre os métodos.

4. *Método de solução heurístico para o problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade*

Um método de solução para esse problema é proposto por Trigeiro *et al.* (1989). Esta heurística consiste em relaxar as restrições de capacidade do modelo utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana (Apêndice), obtendo-se n subproblemas, um para cada um dos n itens, sem restrição de capacidade. Desta forma, os subproblemas são resolvidos com o auxílio do algoritmo de programação dinâmica de Wagner e Whitin (Wagner e Whitin, 1958) visto anteriormente. A solução deste problema relaxado em geral é infactível pois viola as restrições de capacidade. Aplica-se então certa heurística que transfere a produção entre os períodos, na tentativa de se obter uma solução factível. Esta, se encontrada, é um limitante inferior para o problema original. Assim, calculado um limitante atualiza-se os multiplicadores de Lagrange através do método de otimização do subgradiente (Apêndice).

Custos e tempos de preparação são considerados no modelo e, além disso, os custos e a demanda não são constantes no tempo. No entanto, mesmo modelando para custos variáveis, Trigeiro *et al* (1989) considera todos os custos constantes no tempo em suas implementações.

Neste modelo não é considerado sequenciamento de trabalho, isto é, a ordem em que itens são produzidos dentro de um período é indiferente. Desta forma, porém, se um item i for o ultimo item produzido em um período t e este mesmo item será o primeiro item a ser produzido no próximo período $t+1$ o modelo considera mesmo assim o tempo de preparação (que parece não ser necessário). Os autores observam que, em alguns problemas práticos onde o número de itens é de fato muito grande esta consideração tem pouco impacto no resultado.

4.1 Algoritmo Geral

Passo 0: Atribua valores iniciais aos multiplicadores de Lagrange. Faça k=0;

Passo 1: (Passo Primal). Aplique a Relaxação Lagarangiana às restrições de capacidade (2.14), obtendo subproblemas independentes por item. Para cada item, resolva o subproblema por programação dinâmica de Wagner e Whitin (1958) e obtenha uma solução;

Passo 2: (Heurística Lagrangiana). Se a solução obtida for infactível: então tente determinar uma solução factível próxima a solução encontrada no Passo 1;

Passo 3: (Passo Dual). Atualize os multiplicadores de Lagrange pelo método de otimização do subgradiente. Faça $k \leftarrow k + 1$. Vá para o Passo 1.

Repita os Passos 1 a 3, até que sejam feitas 150 iterações.

O Passo 1 produz um limitante inferior para a função objetivo a cada iteração. Já no Passo 3 o método do subgradiente garante que o algoritmo produza o melhor (maior) limitante inferior. Porém se tratando de programação inteira o valor obtido como limitante inferior pode ser menor que o valor ótimo do problema original, devido ao que se refere "*gap de dualidade*", que consiste na diferença entre o valor ótimo da função objetivo do problema dual Lagrangiano (melhor limitante inferior) e o valor ótimo da função objetivo do problema original.

Através deste "*gap*" pode-se, então, realizar-se uma avaliação sobre a solução obtida. Quando a diferença entre os valores das funções objetivo do problema original e do problema dual Lagrangiano for pequena, pode-se dizer que o valor da função objetivo obtido pela solução factível está próximo do valor ótimo. No entanto, quando o "*gap*" é alto, nada pode-se afirmar sobre o valor obtido pela solução factível e o valor ótimo, ou seja, se esses valores estão distantes, ou se existe um grande "*gap de dualidade*"

4.2 Obtenção do Limitante Inferior (Passo1)

Utilizando-se de técnica de relaxação Lagrangiana, obtém-se um limitante inferior para o problema. Aplicando-se a relaxação Lagrangiana as restrições de capacidade (2.14) o problema (2.12) – (2.17) passa a ser escrito como:

Problema Lagrangiano:

$$min \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} H_{it}I_{it} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}(c_{it}\lambda_t^k b_i)X_{it} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}(S_{it} + \lambda_t^k s_i)Y_{it} - \sum_{t=1}^{T}\lambda_t^k CAP_t \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$X_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \qquad t = 1, \dots, T; \quad i = \{1, \dots, N\} \qquad (4.2)$$

$$\sum_{i}^{N} b_i X_{it} + \sum_{i}^{N} S_i Y_{it} \leq CAP_t \qquad i = \{1, \dots, N\} \qquad (4.3)$$

$$X_{it} \leq MY_{it} \qquad t = 1, \dots, T; \quad i = \{1, \dots, N\} \qquad (4.4)$$

$$Y_{it} \in \{0,1\} \qquad t = 1, \dots, T; \quad i = \{1, \dots, N\} \qquad (4.5)$$

$$X_{it} \geq 0, \quad I_{it} \geq 0, \qquad t = 1, \dots, T; \quad i = \{1, \dots, N\} \quad (4.6)$$

Analisando-se o problema Lagrangiano à cima pode-se observar que as restrições de capacidade foram decompostas na função objetivo e não mais restringem nosso problema.

Desta forma, o problema relaxado (4.1) – (4.6) pode ser decomposto item a item, obtendo-se vários subproblemas, sem restrições de capacidade. Como apresentado anteriormente o método de programação dinâmica de Wagner e Whitin (1958) pode ser utilizado para a resolução desses subproblemas. Agrupando-se as soluções de cada, obtém-se a solução resultante desse problema Lagrangiano que em geral não é factível para o problema (4.1) – (4.6), exatamente pela ausência das restrições de capacidade entre as restrições do problema relaxado. O valor da função objetivo para a solução do problema relaxado produzirá um limitante inferior para o problema original (2.12) – (2.17).

4.3 Heurística de Factibilização (Passo 2)

Pelo fato de geralmente a solução encontrada ser infactível é utilizada uma heurística a fim de se eliminar a violação da restrição de capacidade e factibilizar a solução do problema relaxado.

Esta heurística consiste em um método que realiza mudanças na solução obtida pelo Passo 1, tentando ajustar os lotes de acordo com a capacidade disponível em cada período.

O procedimento tem no máximo quatro passos, descritos a seguir. Se a violação não for eliminada, o procedimento é abandonado, as variáveis duais são atualizadas e, um novo problema Lagrangiano é resolvido produzindo outra solução.

Heurística de Factibilização:

- **1º Passo Regressivo:**

Este passo é iniciado no fim do horizonte de planejamento e evolui em direção aos períodos anteriores. Se houver violação de capacidade em um período, cada item com produção positiva é avaliado, com o objetivo de verificar qual é o mais adequado para ser transferido. O item mais adequado é aquele que tem o menor custo por unidade de violação eliminada.

Para transferir um item i de um determinado período t tem-se:

Se o tamanho do lote do item i no período t não for maior do que a violação do período t, duas opções são consideradas:

- Mover todo o lote para o período imediatamente anterior $(t-1)$;

- Mover todo o lote para outro período anterior $(t-j,\ com\ j>i)$, onde $t-j$ é o primeiro período anterior no qual o item i já esteja sendo produzido. Assim, evita-se os custos associados a uma preparação.

No entanto, se o tamanho do lote é maior do que a violação, três diferentes combinações de quantidade e períodos são consideradas para a transferência:

- Mover somente a quantidade necessária para eliminar a violação para o período $t-1$.

- Mover somente a quantidade necessária para eliminar a violação para o período $(t-j)$.

- Mover todo o lote para o período $(t-j)$.

Cabe observar que, transferir mais do que o necessário para eliminar a violação para um período anterior será considerado somente se não houver violação da capacidade deste período anterior.

O item de menor custo é transferido de acordo com um dos procedimentos descritos à cima. Se persistir a violação no período t, um outro item é escolhido e o processo é repetido até que a violação do período seja eliminada. O mesmo processo é aplicado ao período anterior $(t-1)$ e assim por diante até o período 2. Observe que, ao final do processo regressivo tem-se uma solução factível, exceto possivelmente para o primeiro período.

- **1º Passo Progressivo:**

Este passo é iniciado no começo do horizonte de planejamento e evolui em direção aos períodos posteriores. O período alvo é sempre o imediatamente posterior e a quantidade transferida é o estoque I_{it}. Os itens que podem ser transferidos são:

- Os itens que foram agrupados pelo algoritmo de Wagner e Whitin (1958).
- Aqueles que foram transferidos pelo 1º passo regressivo.

As Transferências terminam quando as *violações acumuladas* forem eliminadas para todos os períodos, ou seja, as necessidades acumuladas até o período t forem menores ou iguais à capacidade acumulada até o mesmo período:

$$\sum_{\tau=1}^{t}(\sum_{i} b_i X_{i\tau} + \sum_{i} s_i Y_{i\tau}) \leq \sum_{\tau=1}^{t} CAP_\tau \qquad (4.7)$$

Observe que a desigualdade à cima não implica na eliminação da violação de todos os períodos de $1, \dots, t$. Pois, para um dado período l onde $1 < l \leq t$, pode ocorrer que:

$$\sum_{i} b_i X_{il} + \sum_{i} s_i Y_{il} > CAP_l \;\; onde \;\; 1 < l \leq t \qquad (4.8)$$

Observe ainda que nenhuma tentativa é feita para evitar violação no período alvo. No entanto, não são permitidos atrasos na produção.

- **2º Passo regressivo:**

Idêntico ao primeiro passo, exceto pelo seu estado inicial que é determinado pelo resultado dos dois primeiros passos.

- **2º Passo Progressivo:**

Este passo é mais rigoroso do que o primeiro. Naquele a produção é enviada para períodos posteriores até que as *violações acumuladas* sejam eliminadas. Neste segundo passo progressivo continua-se trabalhando no período até que toda a *violação* seja eliminada. A diferença entre violação acumulada e violação, pode ser vista nas equações (4.7) e (4.8).

Se mesmo assim não for encontrada uma solução factível, o programa principal recebe um aviso e o algoritmo continua com a atualização dos multiplicadores de Lagrange.

Se uma solução factível for encontrada, há a necessidade de aplicar mais um procedimento de melhoria desta solução (Arranjo final) que tem por finalidade eliminar estoques desnecessários. Trigeiro *et at.* (1989) argumenta que este procedimento é necessário pois, nenhum cuidado foi tomado para manter a propriedade,

$$I_{i,t-1} X_{it} = 0,$$

ideia básica do método de Wagner e Whitin (1958).

- **Arranjo Final ou Procedimento de Melhoria:**

A partir da solução factível, os períodos são processados em ordem decrescente. Períodos sem folga de capacidade são ignorados e, em um período t com folga de capacidade, todos os itens que são produzidos são analisados, selecionando aqueles em que $I_{i,t-1}X_{it} \neq 0$, ou seja, seleciona-se os itens que estejam sendo estocados do período anterior $(t-1)$ e, estejam sendo produzidos no período atual (t).

Assim, escolhido um item k, a produção deste item é acrescida em t e decrescida em $t-j$ (onde $t-j$ é o período "anterior" para o qual o estoque final é positivo, para todos os períodos desde $t-j$ até $t-1$ inclusive). Isto é feito até que não haja mais folga no período t ou que o estoque seja eliminado em algum período. Ou seja, a quantidade produzida que será acrescida em t é:

$$\delta = \min\left\{I_{k,t-h}, h = 1, \dots, j;\ \frac{Folga(t)}{b_k}\right\} onde\ Folga(t) = CAP_t - \sum_i b_i X_{it} - \sum_i s_i Y_{it}$$

O arranjo final modifica as equações de balanceamento de estoque para o item k como pode-se observar. Em resumo, este arranjo transfere produção do item k, no período $t-j$, para o período t, mantendo a factibilidade da solução.

4.4 Atualização dos Multiplicadores de Lagrange (Passo 3)

Através do método de otimização do subgradiente (Apêndice), atualiza-se os multiplicadores de Lagrange. A direção do subgradiente é dada pela restrição de capacidade e é exponencialmente suavizada (Camerini *et al.*, 1975). Trigeiro *et al.* (1989) faz apenas alguns comentários com respeito ao método de otimização do subgradiente de modo que não descreve exatamente a maneira como este método é utilizado.

5. Conclusão

O planejamento de produção envolve a tomada de decisões cruciais para se produzir de uma forma eficiente e barata. Para que isso ocorra, há a necessidade da resolução de problemas de dimensionamento de lotes. Logo, é necessário que esses problemas sejam resolvidos de forma a se obter a melhor solução possível. E embora possam parecer, muitas vezes, problemas simplistas, percebemos a alta complexidade que podem adquirir dependendo das restrições e condições que lhes são impostas.

Como foi observado nos estudos, os métodos podem trazer soluções factíveis diferentes e distantes umas das outras, como visto na tabela 2. O método proposto por Wagner e Whitin (1958) obteve solução muito melhor do que o método Lote-por-Lote, por exemplo. Então é necessário grande estudo e atenção quando se trata da resolução de problemas de dimensionamento de lotes para que seu modelo e o método de resolução escolhidos gerem a melhor solução possível.

6. Bibliografia

[1] ARAUJO, S. A. de. *Estudos de Problemas de Dimensionamento de Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade*. Dissertação (Mestrado) | Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

[2] ARAUJO, S. A. de. *Modelos e métodos para o planejamento e programação da produção aplicados no setor de fundições*. Tese (Doutorado) | Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

[3] ARAUJO, S. A. de. *Problemas de Dimensionamento de Lotes e suas Integrações a Outros Problemas em Contextos Industriais*. [S.l.]: Tese de Livre Docência-Universidade Estadual de Paulista, São José do Rio Preto, 2011.

[4] ARAUJO, S. A. de; ARENALES, M. N. Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: Modelagem, métodos de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional*, v. 20, p. 287{306, 2000.}

[5] ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R. *Pesquisa Operacional*. [S.l.]: Editora Campus, 2006.

[6] BAZARAA, M.; JARVIS, J. *Linear Programming and Network Flows*. New York: J. Wiley & Sons, N.Y., 2*a* edição, 1990.

[7] BILLINGTON, P.; MCCLAIN, L.; THOMAS, L. Mathematical programming approaches to capacity mrp systems: Review, formulation and problem reduction. *Management Science*, v. 29, p. 1126{1141, 1983.

[8] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. de. Relaxação Lagrangiana aplicada ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas: Limitantes inferiores. *TEMA Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 13, p. 13{24, 2012.

[9] KARIMI, B.; GHOMI, S. F.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, v. 31, p. 365{378, 2003.

[10] NEMHAUSER, G.; WOLSEY, L. *Integer and Combinatorial Optimization*. [S.l.]: Wiley-Interscience Publication, 1988.

[11] POCHET, Y.; WOLSEY, L. *Production planning by mixed integer programming*. New York: New York: Springer Verlag, 2006.

[12] TOLEDO, F.; ARMENTANO, V. A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, v. 175, p. 1070{1083, 2006.

[13] TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, v. 35, p. 353{366, 1989.

[14] WOLSEY, L. *Integer Programming*. [S.l.]: Ed. John Wiley & Sons, 1998.

Apêndice

Relaxação Lagrangiana

(Nemhauser e Wolsey, 1988 e Geoffrion, 1974)

Considere o seguinte problema de programação inteira (PI):

$$Z_{PI} = \min\{f(x) = c^T x : x \in S\}$$

Sujeito a:

$$S = \{x \in Z_+^n : Ax \leq b\}$$

Observe que: $c \in R^n,\ A \in R^{m\,x\,n},\ b \in R^m$

Uma relaxação de um Problema Inteiro é qualquer problema de minimização:

$$z_{PR} = \min\{f_{PR}(x) : x \in S_R\}$$

Com as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq f_{PR}(x) \quad \forall\, x \in S$$

Dentre várias técnicas de relaxação para um problema inteiro, a relaxação Lagrangiana, a qual é utilizada quando a matriz de restrições pode ser dividida entre restrições fáceis e complexas. Desta forma, a ideia consiste em relaxar exatamente essas restrições ditas como complexas a fim de tornar o problema mais "fácil" de ser resolvido. Esta relaxação é feita através de uma "penalização" na função objetivo através da inserção dessas restrições na mesma.

Assim a relaxação Lagrangiana do problema acima, com relação ao conjunto de restrições complicadas é definida associando a este conjunto um vetor $\lambda \geq 0$, denominado de multiplicador de Lagrange ou variáveis duais (problema dual). O problema Lagrangiano obtido utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana para o problema (PI) é dado a seguir:

$$z_{RL}(\lambda) = \min\{z(\lambda, x) = c^T x + \lambda^T (A^1 x - b^1)\}$$

Sujeito a:

$$x \in S_{RL} = \{x \in Z_+^n : A^2 x \leq b^2\}$$

Onde $\lambda \in R_+^{m1}$

O problema relaxado Lagrangiano não contém as restrições complicadas, as quais foram incluídas na função objetivo como uma ”penalidade” $\lambda^T(A^1x - b^1)$.

Serão apresentadas a seguir, algumas definições do conceito de dualidade necessárias posteriormente.

Definição 1: Um dual fraco de Programação inteira é qualquer problema de maximização:

$$z_D = \max z_D(u)$$

Sujeito a: $u \in S_D$

Que satisfaça:

$$z_D(u) \leq c^T x \qquad \forall x \in S \;\; e \;\; \forall u \in S_D$$

Desta forma o valor da função objetivo para a solução do problema original será sempre maior ou igual ao valor da função objetivo dual para qualquer solução do problema dual. No entanto, se o dual não tem solução ótima $(z_D = \infty)$, então o problema original é infactível $(S = \emptyset)$.

Definição 2: Um dual forte de programação inteira é um dual fraco que satisfaça:

Se $S = \emptyset$ e $z_{PI} \geq -\infty$, então $\exists u^0 \in S_D \; e \; \exists x^0 \in S \;\; tal \; que \; z_D(u^0) = cx^0$

A diferença entre a solução do problema original e a solução do problema dual:

$$\Delta_D = Z_{PI} - Z_D$$

Observe que no problema dual forte Δ_D= 0, ou seja, não tem “*gap*” de dualidade, já no problema dual fraco $\Delta_D \geq 0$.

Proposição 1: O problema dual de uma relaxação de PI é também dual de PI.

A qualidade de uma relaxação de PI, pode ser avaliada pela proximidade do valor da função objetivo desta relaxação e do valor da função objetivo de problema original. Assim, voltando ao problema Lagrangiano, como se trata de uma relaxação de PI e o problema é de minimização temos que: $z_{RL}(\lambda) \leq z_{PI}$. O maior dos limitantes inferiores disponível da família infinita de relaxações $\{RL(\lambda)\}_{\lambda \geq 0}$ é $z_{RL}(\lambda^*)$, onde λ^* é uma solução ótima do seguinte problema:

$$z_{DL} = max_{\lambda \geq 0} z_{RL}(\lambda)$$

O problema DL é chamado dual Lagrangiano com relação as restrições $A^1x \leq b^1$

Observe que, se $Z_{PI} = Z_{DL}$ então Z_{PI} representa o valor ótimo para a função objetivo do problema original (PI) e, a solução x^* associada a Z_{PI} representa a solução ótima do problema (PI).

Existem várias formas de caracterizar problemas onde $Z_{PI} = Z_{DL}$. Uma delas é a seguinte:

Teorema 1 (Geoffrion, 1974): Tem-se que $Z_{PI} = Z_{DL}$ se, e somente se, existem $\lambda^* \geq 0$ e $x^* \in S$ tais que satisfazem as seguintes condições:

1. $z_{RL}(\lambda^*) = z(\lambda^*, x^*)$, x^* é solução ótima para o problema relaxado Lagrangiano $RL(\lambda)$.
2. $A^1x \leq b^1$, x^* é factível para o problema original PI.
3. $\lambda^T(A^1x - b^1) = 0, (\lambda^*, x^*)$ Satisfaz as condições de folgas complementares.

Tem-se então que x^* é uma solução ótima do problema PI original se satisfaz as três condições. No entanto, se satisfaz somente (1) e (2), tem-se que x^* é uma solução $\varepsilon - ótima$ para o problema original (PI), onde $\varepsilon = \lambda^T(A^1x - b^1)$.

Método de Otimização do Subgradiente

(Florentino, 1990, Held *et al.*, 1974 e Camerini *et al.*, 1975)

Este método, que tem produzido bons resultados, tem sido o mais utilizado para se obter uma melhor aproximação para a solução λ^* do problema dual Lagrangiano (Diaby *et al*., 1992).

À partir de um conjunto inicial de multiplicadores de Lagrange, um processo iterativo gera um sequência de multiplicadores cujo limite tende a solução do problema dual Lagrangiano.

Considere o problema dual Lagrangiano do problema PI:

$$z_{DL} = max_{\lambda \geq 0} z_{RL}(\lambda)$$

Onde:

$$z_{RL}(\lambda) = \min\{z(\lambda, x) = \ c^T x + \lambda^T(A^1 x - b^1)\}$$

Logo, o problema fica:

$$z_{DL} = max_{\lambda \geq 0}\{\min\{z(\lambda, x) = \ c^T x + \lambda^T(A^1 x - b^1)\}\}$$

Definição 3: Uma função $g: R^n \rightarrow R^1$ é côncava se:

$$g(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) \geq \alpha g(y^1) + (1-\alpha)g(y^2) \quad \forall\, y^1, y^2 \in R^n \ e\ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Proposição 2: A função $z_{RL}(\lambda)$ é côncava em λ e linear por partes.

Definição 4: Um vetor $s(\lambda^0) \in R^n$ é um subgradiente da função côncava $z_{RL}(\lambda)$ no ponto (λ^0) se:

$$z_{RL}(\lambda) \leq z_{RL}(\lambda^0) + (\lambda - \lambda^0)^T s(\lambda^0), \ \forall\, \lambda \geq 0.$$

Observa-se que, se $z_{RL}(\lambda)$ for diferenciável no ponto λ^0 então $s(\lambda^0) = \nabla z_{RL}(\lambda^0)$, onde $\nabla z_{RL}(\lambda^0)$ é o gradiente de $z_{RL}(\lambda)$ no ponto λ^0.

Definição 5: O conjunto $\partial z_{RL}(\lambda^0) \neq \{s \in R^n\!: s$ é $subgradiente\ de\ z_{RL}(\lambda)\ em\ \lambda^0\}$ é chamado de subdiferencial de $z_{RL}(\lambda)$ em λ^0.

Tem-se que $\partial z_{RL}(\lambda^0) \neq \emptyset$. E ainda, se $z_{RL}(\lambda) \in C^1$, então $\partial z_{RL}(\lambda^0)$ contém um único elemento $\nabla z_{RL}(\lambda^0)$.

Proposição 3: Seja $z_{RL}(\lambda)$ uma função côncava em R^n, λ^* é uma solução de

$\max\{z_{RL}(\lambda): \lambda \geq 0\}$ se, e somente se, $0 \in \partial z_{RL}(\lambda^*)$.

Proposição 4: O vetor $(Ax+b)$ é um subgradiente de $z_{RL}(\lambda)$ no ponto λ^0.

Algoritmo do Subgradiente:

- Passo 1: (Inicialização): Escolha um ponto inicial λ^k e faca k=1.
- Passo 2: Determine um subgradiente $s(\lambda^k) \in \partial z_{RL}(\lambda^k)$. $Se\ s(\lambda^k) = 0$, PARE (λ^k é uma solução ótima).
- Passo 3: Faca $\lambda^k = \lambda^{k+1} + \theta_k s(\lambda^k)\ para\ \theta_k > 0$. Faca $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 2.

Perceba que não há nenhuma garantia sobre a direção do subgradiente ser realmente uma direção de subida e, desta forma, uma boa escolha para o tamanho do passo θ_k é essencial para a convergência do método. O método converge caso sejam satisfeitas certas condições:

1. $lim_{k\to\infty}\theta_k = 0$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k = \infty$

Assim, no algoritmo à cima usa-se um dos seguintes procedimentos para a escolha do passo:

1- A série divergente: $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k \to \infty, \theta_k \to 0\ quando\ k \to \infty$. Esta escolha é teoricamente correta, mais a convergência é muito lenta.

2- A série geométrica: $\theta_k = \theta_0\rho^k$, ou $\theta_k = [z^l - z_{RL}(\lambda^k)]\rho^k/||s(\lambda^k)||^2$ onde $0 < \rho < 2$ e z^l é um limitante superior para o problema dual Lagrangiano.

Teoricamente, o algoritmo do subgradiente pode parar quando em alguma iteração k, encontrar $s(\lambda^k) = 0 \in \partial z_{RL}(\lambda^K)$. Mas esta situação dificilmente acontecerá, por isso adota-se um número máximo de iterações, ou um critério de parada baseado na não melhoria da solução após um certo número de iterações.