Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC - Unicamp)
Departamento de Matemática Aplicada

Projeto de Pesquisa:

Reconhecimento de Padrões em Imagens Digitais Usando Geometria Fractal: Aspectos Teóricos e Aplicados

Aluno: Giovanni Taraschi

Orientador: Prof. Dr. João Batista Florindo

Junho de 2018

Resumo

Este projeto propõe o estudo e o desenvolvimento de ferramentas matematico-computacionais para a análise e classificação de imagens baseadas na geometria fractal. Para isso, o projeto foi dividido em três etapas. Na primeira realizou-se um estudo teórico sobre a geometria fractal. Nessa etapa buscou-se familiarizar-se com os conceitos de auto-similaridade, estrutura fina e dimensão fractal além de se definir formalmente um fractal. Ainda nessa etapa foram estudadas as dimensões fractais alternativas, que são de grande interesse prático, uma vez que dão origem a métodos numéricos para se estimar a dimensão. Na segunda etapa, estudou-se um método numérico clássico para a estimativa da dimensão fractal, o "box-counting". O box-counting foi então implementado e testado sobre uma base de fractais cuja dimensão fractal exata é conhecida, com a finalidade de testar sua precisão. Por fim, na terceira etapa desenvolveu-se um descritor fractal, o Sliding-Box descriptor (SBD). Esse descritor foi então aplicado na classificação de duas bases de imagens de texturas visuais (Outex e USPTex) assim como na identificação de espécies de plantas brasileiras usando imagens da superfície da folha. Os resultados obtidos comprovam a competitividade do método desenvolvido quando comparado com outros métodos clássicos e estado-da-arte na classificação de imagens de textura.

1 Introdução

A alta flexibilidade da geometria fractal e sua capacidade de descrever objetos com alto grau de complexidade em diferentes escalas a tornam uma ferramenta apropriada para descrever objetos da natureza. Dessa forma, para muitas aplicações do mundo real, a geometria fractal é mais apropriada que a Euclidiana. Em [1], [2] e [3] encontram-se aplicações recentes da geometria fractal em diferentes áreas da ciência.

O principal conceito da geometria fractal é o de dimensão fractal. Esta pode ser entendida como uma medida do grau de irregularidade de certo objeto ou da forma como ele ocupa o espaço. Em imagens de textura, a dimensão fractal relaciona-se com propriedades físicas como a rugosidade e a luminância [4].

No entanto, na maioria das situações práticas, apenas a dimensão fractal não é suficiente para descrever satisfatoriamente o objeto [2]. São necessárias abordagens mais elaboradas como multifractais [5], dimensão fractal multiescala [6] e os descritores fractais [7].

Esse projeto focou no estudo dos descritores fractais, dados os ótimos resultados alcançados por este método recentemente. Porém, para uma boa compreensão dos descritores fractais, são necessários conhecimento teórico a respeito da geometria fractal e o estudo de dimensões fractais alternativas assim como de métodos numéricos para estimar a dimensão fractal. As próximas seções descrevem cada etapa deste processo, passando por atividades de cunho teórico assim como por atividades práticas.

2 Revisão Bibliográfica

Uma imagem de textura é uma imagem digital em escala de cinzas que apresenta padrões na distribuição dos *pixels* em diferentes escalas. Imagens de textura são de grande interesse prático, uma vez que são capazes de expressar características físicas de objetos do mundo real, tais como rugosidade, regularidade e luminância. Usualmente, as abordagens para a análise de imagens de textura são classificadas em 4 grupos: estrutural, estatística, baseada em transformações e baseada em modelos [8].

Os métodos estruturais geralmente trabalham com morfologia matemática e primitivas geométricas, sendo [9] um exemplo icônico deste grupo de métodos. As abordagens baseadas em transformações derivam da representação da imagem em outros espaços (como o domínio das frequências). Assim estes métodos conseguem descrever com precisão a periodicidade presente em diversas imagens. Fourier [10] e *wavelets* [11] são importantes exemplos desta categoria. Os métodos estatísticos baseiam-se nas relações entre os *pixels*. Apesar de obterem resultados interessantes na prática, eles não possuem uma base matemática satisfatória, tornando a interpretação dos seus resultados difícil. *Local Binary Patterns* (LBP) [12] é um método clássico desta categoria.

Por fim, existem os métodos baseados em modelos. Tais abordagens buscam combinar a precisão dos métodos que exploram as relações entre os *pixels* com um modelo matemático ou físico consolidado. Nesta categoria se destacam os métodos baseados na geometria fractal tais como multifractais [5], dimensão fractal multiescala [6] e os descritores fractais [7]. Diversas estruturas da natureza apresentam certo grau de auto-similaridade, conceito que se relaciona diretamente com a geometria fractal, encorajando o uso destes métodos.

3 Geometria fractal

Em geral, um fractal pode ser entendido como um objeto matemático que possui propriedades como auto-similaridade, estrutura-fina e não são satisfatoriamente descritos pela geometria Euclidiana [13]. Por auto-similaridade entendemos aqui que parte do objeto reproduz, de certa maneira, o objeto todo. A auto-similaridade pode ser exata, quando parte do objeto reproduz exatamente (a menos de mudança de escala) o objeto de referência. Pode ser quase auto-similaridade, quando parte do objeto reproduz o todo, porém com alguma distorção. Pode ser ainda estatística, quando a auto-similaridade está no campo das distribuições probabilísticas.

Estrutura-fina é a ideia de que o objeto possui a mesma riqueza de detalhes em qualquer escala observada. Por fim, os fractais não são satisfatoriamente descritos pela geometria Euclidiana no sentido de que não existe uma regra geométrica ou equação simples que defina um objeto fractal. Neste sentido, fractais são objetos irregulares demais para serem descritos pela geometria Euclidiana.

Aos objetos fractais está associada uma grandeza chamada dimensão fractal. A dimensão fractal é um número real positivo que mede o grau de regularidade do objeto e como o mesmo ocupa o espaço. Usualmente, toma-se a dimensão fractal como a dimensão de Hausdorff.

Dado um conjunto U, o diâmetro deste conjunto é dado por $|U| = \sup\{d(x,y) : x, y \in U\}$, onde $d(x,y)$ é uma métrica. Diz-se que uma família de conjuntos $\{U_i\}$ é uma σ-cobertura de um conjunto F se:

- $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$
- $0 < |U_i| < \sigma$

Assim, a medida de Hausdorff é dada por:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\sigma \to 0} H^s_\sigma(F) \;\; onde \;\; H^s_\sigma(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : U_i \; é \; \sigma\text{-}cobertura \; de \;\; F\right\}$$

Para qualquer estrutura fractal, $\mathcal{H}^s$ tem um comportamento similar. $H^s = \infty$ para $s < D$ e $H^s = 0$ para $s > D$, para algum D real e não negativo. Assim D é definido como dimensão de Hausdorff de F. Formalmente:

$$D = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Uma vez definida a dimensão de Hausdorff, pode-se definir formalmente um fractal: De acordo com a definição mais clássica, dada por Mandelbrot, fractal é um conjunto matemático cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que sua dimensão Euclidiana [14]. É importante destacar que a definição para fractal não é única, no entanto a dada acima é a mais aceita.

4 Dimensões fractais alternativas

Em diversas aplicações, o cálculo da dimensão de Hausdorff é muito complicado e por vezes impossível [15], Nestes casos, é interessante definir-se uma dimensão fractal alternativa à de Hausdorff. As dimensões alternativas baseiam-se na lei de potência seguida pelos fractais:

$$M_\sigma \propto \sigma^s,$$

onde M_σ é uma medida do objeto na escala σ, isto é, uma medida que desconsidera qualquer detalhe menor que σ. Dentre as dimensões alternativas, foram estudadas a dimensão de Box-Counting e a dimensão de Buligand-Minkowski.

Na dimensão de Box-Counting, o conjunto de interesse F é coberto por uma malha quadrada de lado σ, se $F \subset \mathbb{R}^2$, ou por uma malha cúbica de lado σ se $F \subset \mathbb{R}^3$ e define-se:

$$M_\sigma = \text{Número de caixas que intersectam } F$$

. O tamanho da malha é variado tendendo σ para 0 e a dimensão de Box-Counting é dada por:

$$dim_B(F) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\log M_\sigma}{-\log \sigma}$$

Já para a dimensão de Buligand-Minkowski cada ponto do conjunto de interesse é dilatado morfologicamente por um círculo de raio σ se $F \subset \mathbb{R}^2$ ou por uma esfera de raio σ se $F \subset \mathbb{R}^3$. Calcula-se a área da região dilatada A_σ se estivermos em duas dimensões ou o volume da região dilatada V_σ , se estivermos em três dimensões. O raio de dilatação é variado tendendo σ para 0. Assim a dimensão de Buligand-Minkowski é dada por:

$$dim_M(F) = 2 - \lim_{\sigma \to 0} \frac{\log A_\sigma}{\log \sigma} \quad \text{, se estivermos em duas dimensões}$$

$$dim_M(F) = 3 - \lim_{\sigma \to 0} \frac{\log V_\sigma}{\log \sigma} \quad \text{, se estivermos em três dimensões}$$

Em [13] prova-se a seguinte relação entre as dimensões de Hausdorff ($dim_H(F)$), Box-Counting ($dim_B(F)$) e de Minkowski ($dim_M(F)$):

$$dim_H(F) \leq dim_B(F) = dim_M(F)$$

Apesar das dimensões alternativas em geral assumirem valores diferentes da dimensão de Hausdorff, elas mantêm a ideia principal de medir o grau de regularidade do objeto e a forma como ele ocupa o espaço. Além disso, as dimensões alternativas por vezes dão origem a estratégias para se estimar a dimensão fractal, sendo de grande interesse prático.

5 Atividades desenvolvidas

5.1 Estimativa para dimensão fractal

Para fractais encontrados na natureza, o cálculo analítico da dimensão fractal é inviável e por vezes impossível. Isto se dá porque os fractais encontrados no mundo real só possuem auto-similaridade e estrutura fina para um certo intervalo de escalas. Além disso, o cálculo analítico da dimensão fractal exige saber a lei de formação do objeto, muitas vezes desconhecida no caso de objetos naturais. Portanto, fazem-se necessárias técnicas numéricas capazes de estimar a dimensão fractal.

Desta forma, nesta etapa do projeto, estudou-se um método clássico para a estimativa da dimensão fractal, o Box-Counting. Este método, como o próprio nome sugere, é baseado na dimensão de Box-Counting.

Dado um conjunto F representado computacionalmente por uma imagem binária quadrada com dimensões $m \times m$, define-se $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como uma sequência decrescente tal que $l_0 = m$ e $l_{n+1} = \left\lfloor \frac{l_n}{2} \right\rfloor$. Para cada valor da sequência, o conjunto F é coberto por uma malha quadrada de lado l_n e calcula-se:

$$M(l_n) = \text{Número de caixas que intersectam } F$$

Plotam-se os pontos $\log(l_n) \times \log(M(l_n))$. A reta que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos é encontrada utilizando-se o método dos quadrados mínimos. A dimensão fractal é estimada pelo coeficiente angular dessa reta.

Para testar a eficiência do método, foram utilizados dois fractais: Cantor generalizado [16] e triângulo de Pascal modk [17]. O fractal de Cantor generalizado ($C(p)$) depende de um parâmetro $0 < p < 1$ e sua dimensão de Hausdorff pode ser calculada através da fórmula:

$$dim_H(C(p)) = \frac{-\log(2)}{\log(\frac{1-p}{2})}$$

Já o triângulo de Pascal modk ($P(k)$) depende de um parâmetro k, onde k é um número primo e sua dimensão de Hausdorff pode ser calculada através da fórmula:

$$dim_H(P(k)) = 1 + \log_k \left(\frac{k+1}{2} \right)$$

Assim, variando-se os parâmetros p e k obtemos um conjunto de testes cuja dimensão de Hausdorff exata é bem conhecida.

Como os fractais em questão foram representados computacionalmente em imagens binárias, um fator que afeta as estimativas é a resolução dessas imagens. Desta forma, variou-se também a resolução das imagens nos testes realizados. É de se esperar que quanto maior a resolução da imagem, mais precisa seja a estimativa. Os resultados para o fractal de Cantor generalizado estão nas tabelas 1,2,3. Já os resultados para o triângulo de Pascal modk estão nas tabelas 4,5,6 e 7

Tabela 1: Cantor generalizado para imagens com resolução 256×256 pixels

parâmetro p	valor estimado	valor exato
0.2000	0.7851	0.7565
0.2667	0.6790	0.6909
0.3333	0.5784	0.6309
0.4000	0.4955	0.5757
0.4667	0.4862	0.5244
0.5333	0.3929	0.4763
0.6000	0.3929	0.4307
0.6667	0.1786	0.3869
0.7333	0.1934	0.3440
0.8000	0.2143	0.3010

Tabela 2: Cantor generalizado para imagens com resolução 1024×1024 pixels

parâmetro p	valor estimado	valor exato
0.2000	0.7641	0.7565
0.2667	0.6972	0.6909
0.3333	0.6289	0.6309
0.4000	0.5482	0.5757
0.4667	0.4523	0.5244
0.5333	0.4333	0.4763
0.6000	0.3642	0.4307
0.6667	0.2833	0.3869
0.7333	0.2736	0.3440
0.8000	0.1500	0.3010

Tabela 3: Cantor generalizado para imagens com resolução 4096×4096 pixels

parâmetro p	valor estimado	valor exato
0.2000	0.7713	0.7565
0.2667	0.6982	0.6909
0.3333	0.6241	0.6309
0.4000	0.5684	0.5757
0.4667	0.4886	0.5244
0.5333	0.4553	0.4763
0.6000	0.3693	0.4307
0.6667	0.3465	0.3869
0.7333	0.2022	0.3440
0.8000	0.2401	0.3010

Tabela 4: Triângulo de Pascal mod2

Resolução em *pixels*	valor estimado	valor exato
256	1.5849	1.5849
512	1.5849	1.5849
1024	1.5849	1.5849
2048	1.5849	1.5849

.

Tabela 5: Triângulo de Pascal mod3

Resolução em *pixels*	valor estimado	valor exato
81	1.5062	1.6309
243	1.6991	1.6309
729	1.6011	1.6309
2187	1.5349	1.6309

.

Tabela 6: Triângulo de Pascal mod5

Resolução em *pixels*	valor estimado	valor exato
25	1.6674	1.6826
125	1.7706	1.6826
625	1.5924	1.6826
3125	1.6495	1.6826

.

Tabela 7: Triângulo de Pascal mod7

Resolução em *pixels*	valor estimado	valor exato
49	1.6574	1.7124
125	1.6286	1.7124
625	1.6344	1.7124

.

Para o fractal de Cantor generalizado, a estimativa de Box-Counting mostrou-se relativamente precisa para valores pequenos de p, já para valores maiores de p a estimativa é mais grosseira. Para o triângulo de Pascal modk a estimativa mostrou-se extremamente precisa para $k = 2$, sendo igual ao valor exato para todas as resoluções. Para os outros valores de k no entanto o valor estimado diverge bastante do valor real.

5.2 Desenvolvimento de um descritor fractal: Sliding-Box descriptor (SBD)

Fractais mostraram-se uma importante ferramenta na análise da natureza, tendo aplicações em diferentes áreas [1, 3, 18–20]. Na análise de texturas em particular, a dimensão fractal está relacionada a propriedades físicas como rugosidade e luminância [4].

No entanto, em situações práticas uma medida escalar como a dimensão fractal (ou uma estimativa para ela) não é suficiente para descrever satisfatoriamente o objeto. Na análise de texturas, por exemplo, existem imagens com aspectos visivelmente diferentes porém com mesmas dimensões fractais [2]. Neste contexto, fazem-se necessários conjuntos com medidas fractais mais completos. Dentre eles, destacam-se os descritores fractais [21].

Descritores fractais são baseados na lei de potências obedecida pelos fractais $D = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\log M_\sigma}{-\log \sigma}$, onde M_σ é uma medida na escala sigma. Define-se uma função $u : \log \sigma \to \log M_\sigma$ e toda a curva $\log \times \log$ é usada para analisar o objeto. Desta forma, os descritores fornecem informação sobre todas as escalas da textura, tanto uma visão local como uma visão global é obtida. Fica claro que os descritores geram mais informação do que uma medida escalar.

Neste trabalho, propôs-se um método de descritor fractal baseado na análise estatística da distribuição dos *pixels* na imagem. O método começa mapeando a imagem em escalas de cinza com dimensões $m \times n$ para um conjunto tridimensional de pontos B:

$$\mathbb{Z}^{m \times n} \to \mathbb{Z}^{m \times n \times I_{max}}$$

$$(i, j) \mapsto (i, j, I(i, j))$$

Onde $I_{max} = \max\{m, n\}$ e $0 \leq I(i, j) \leq I_{max}$ é a medida da intensidade do *pixel* com coordenadas (i, j).

Definiu-se $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como uma sequência decrescente tal que $l_0 = \min\{m, n, I_{amx}\}$ e $l_{n+1} = \left\lfloor \frac{l_n}{2} \right\rfloor$. Para cada valor da sequência, o conjunto B foi varrido por uma caixa cúbica de lado l_n. Conforme a caixa desliza sobre o conjunto conta-se o número de pontos envolvidos no momento presente. Para realizar estas varreduras, foi utilizada a convolução discreta tridimensional:

$$D(j_1, j_2, j_3) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} B(k_1, k_2, k_3) \cdot C(j_1 - k_1, j_2 - k_2, j_3 - k_3)$$

Cada k_i percorre todos os valores que levam a índicies válidos de B e C

Para reproduzir o efeito de "caixa deslizante", tomou-se $C \in \mathbb{Z}^{l_n \times l_n \times l_n}$, $C(k_1, k_2, k_3) = 1 \quad \forall k_1, k_2, k_3$ e apenas a parte válida da convolução foi tomada. Isto é, os índices j_1, j_2, j_3 respeitam:

$$1 + \left\lfloor \frac{l_n}{2} \right\rfloor \leq j_1 \leq m - \left\lceil \frac{l_n}{2} - 1 \right\rceil$$

$$1 + \left\lfloor \frac{l_n}{2} \right\rfloor \leq j_2 \leq n - \left\lceil \frac{l_n}{2} - 1 \right\rceil$$

$$1 + \left\lfloor \frac{l_n}{2} \right\rfloor \leq j_3 \leq I_{max} - \left\lceil \frac{l_n}{2} - 1 \right\rceil$$

Toma-se a distribuição cumulativa de D:

$$\mathcal{C}^r(k) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum_{j_3} \sum_{k'=0}^{k} \delta(D(j_1, j_2, j_3), k')$$

onde $\delta(x, y)$ é o delta de Kronecker (1 se $x = y$, 0 caso contrario). Por fim, os descritores são obtidos pelas distribuições cumulativas para r dentro de um intervalo pré-especificado.

$$\mathcal{D} = \cup |\mathcal{C}^r(k)|^\alpha \qquad r = 2, 4, 8, \cdots, \min(m, n)$$

Onde α é uma constante empiricamente determinada.

Desta forma, cada varredura fornece dados estatísticos sobre a distribuição dos *pixels* e suas intensidades. Como o lado do cubo é diferente para cada varredura, é obtida uma análise em diferentes escalas: os cubos com lados maiores fornecem informação global da estrutura da imagem enquanto os cubos menores fornecem informação local. Aqui vê-se claramente a combinação da abordagem fractal, dada pela análise em diferentes escalas, com a análise estatística, dada pela média e desvio padrão. Os detalhes do processo todo estão descritos no Algoritmo 1.

Algorithm 1 Sliding-box descriptor algorithm

Input: A, m, n
Output: M, Std
$I_{max} = max(m, n)$
for $i = 1$ to m **do**
    for $j = 1$ to n **do**
        $aux \leftarrow \left\lceil \frac{A(i,j) \cdot I_{max}}{256} \right\rceil$
        $B(i, j, aux) \leftarrow 1$
    end for
end for
$l \leftarrow \min(m, n)$
$k \leftarrow 0$
while $l \leq 2$ **do**
    $C \leftarrow \text{ones3}(l)$
    $D \leftarrow \text{conv3}(B, C)$
    for $k = 0$ to l^2 **do**
        $\mathcal{C} \leftarrow sum(D \leq k)$
    end for
    $\mathcal{D} \leftarrow \cup\{\mathcal{D}, \mathcal{C}\}$
    $l \leftarrow \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$
end while

Tabela 8: Variáveis usadas no Algoritmo 1

A	Matriz $m \times n$ contendo a imagem de textura em escalas de cinza
B	Conjunto tridimensional resultado de mapear A
C	Conjunto tridimensional usado como máscara para a convolução
D	Resultado da convolução válida entre B e C
$\mathcal{D}$	Vetor do descritor
l	Lado da caixa em cada varredura

Tabela 9: Rotinas pré-programadas supostamente disponíveis para o Algoritmo 1

max(m,n)	Retorna o máximo valor entre m e n
ones3(l)	Retorna um conjunto tridimensional $l \times l \times l$ cujos elementos são todos 1
conv3(B,C)	Retorna a parte válida da convolução tridimensional discreta entre B e C
$sum(A \leq k)$	Retorna a soma dos valores de A menores ou iguais a k

5.3 Aplicações

Nesta etapa, o Sliding-Box descriptor (SBD) foi testado na classificação de duas bases clássicas de texturas: Outex [22] e USPTex [23]. O SBD é comparado em termos de porcentagem de imagens corretamente classificadas com alguns métodos clássicos e do estado-da-arte: Local Binary Patterns (LBP) [24], LBP+VAR [24], Textons VZ-MR8 [25], Textons VZ-Joint [26], Bouligand-Minkowski (BM) [27] , Multifractals [28] e Local Phase Quantization (LPQ) [29]. Os resultados obtidos encontram-se na tabela 10.

Tabela 10: Porcentagem de imagens corretamente classificadas nas bases Outex e USPTex com os respectivos desvios.

Método	Outex	USPTex
LBP	75.4±0.6	67.9±0.4
LBP+VAR	72.7±0.5	69.9±0.6
MR8	63.6±0.5	36.2±0.5
VZ-Joint	78.6±0.5	63.0±0.4
BM	80.1±0.5	77.9±0.4
Multifractal	57.7±0.6	44.4±0.6
LPQ	74.8±0.4	76.3±0.4
SBD	82.2±0.7	80.6±0.4

Para ambas as bases, o SBD superou as demais abordagens, obtendo taxas de acerto superiores a 80%. Isso evidencia que a estratégia de "caixa deslizante", combinada com a análise estatística, tem alta capacidade de descrever uma imagem. Além disso, para as duas bases, a abordagem a obter a segunda melhor porcentagem de acerto foi outro descritor fractal: descritor de Bouligand-Minkowski (BM). Isso mostra que os métodos baseados na geometria fractal, em especial os descritores fractais, são competitivos no reconhecimento e classificação de texturas.

O SBD também foi aplicado à identificação de espécies de plantas brasileiras (base 1200Tex [30]). Neste problema, busca-se identificar a espécie de uma planta com base na textura de suas folhas. Tal tarefa é de interesse prático uma vez que em muitas situações reais a folha é a única estrutura da planta a que se tem acesso. Novamente, o método proposto é comparado com métodos clássicos na análise de texturas. Os resultados obtidos encontram-se na tabela 11. Embora tenha obtido resultado similar ao do descritor LPQ (dentro da margem de tolerância), o SBD apresentou alta taxa de acerto (79.1±0.5), mostrando potencial para propósitos práticos.

Tabela 11: Porcentagem de amostras de folhas cujas espécies estão corretamente identificadas e respectivos desvios.

Method	Success rate (%)±error
LBP	68.8±0.7
LBP+VAR	73.2±0.7
MR8	53.4±0.7
VZ-Joint	63.9±0.6
BM	72.2±0.6
Multifractal	57.9±0.8
LPQ	79.0±0.6
SBD	79.1±0.5

6 Conclusões

Na primeira etapa do projeto, foi feito um estudo teórico introdutório à geometria fractal. Nesta etapa, foram definidos formalmente o que é um fractal e a dimensão de Hausdorff. Ainda nesta primeira etapa, foram estudadas as dimensões fractais alternativas por Box-Counting e Buligand-Minkowski.

Em seguida, estudou-se um método numérico clássico para a estimativa da dimensão fractal, o Box-Counting, que por sua vez é baseado na dimensão de Box-Counting. Este estudo foi motivado pela dificuldade, e por vezes impossibilidade, de se calcular analiticamente a dimensão fractal de objetos do mundo real. O método foi testado utilizando-se como base dois fractais: Cantor generalizado e triângulo de Pascal modk. O método obteve boas estimativas para o fractal de Cantor generalizado quando o parâmetro p era próximo de 0 e para o triângulo de Pascal modk com $k = 2$. Para os demais casos analisados a estimativa encontrada divergiu bastante do valor real.

Na terceira etapa do projeto, foi desenvolvido um descritor fractal, o Sliding-Box Descriptor (SBD). Este descritor foi inspirado no Box-Counting, porém, no lugar de utilizar uma malha quadrada fixa, utiliza-se uma caixa deslizante combinada com uma análise estatística. Este descritor foi aplicado à classificação de imagens de textura presentes nas bases Outex [22] e USPTex [23] . Para ambas as bases o SBD obteve porcentagens de acerto superiores a 80%, superando métodos consagrados na literatura.

O SBD também foi aplicado a um problema prático: a identificação de espécies de plantas brasileiras baseada na textura de suas folhas. Novamente obteve um dos melhores resultados entre as abordagens analisadas ($79.1 \pm 0.5\%$ de acerto), mostrando potencial para propósitos práticos. Os bons resultados obtidos pelo SBD indicam a força dos métodos baseados na geometria fractal, em particular dos descritores fractais que, mesmo com uma estratégia relativamente simples, alcançam bons resultados.

Referências

[1] Ş. Ţălu, S. Stach, V. Sueiras, and N. M. Ziebarth, "Fractal analysis of afm images of the surface of bowman's membrane of the human cornea," *Annals of biomedical engineering*, vol. 43, no. 4, pp. 906–916, 2015.

[2] O. M. Bruno, R. de Oliveira Plotze, M. Falvo, and M. de Castro, "Fractal dimension applied to plant identification," *Information Sciences*, vol. 178, no. 12, pp. 2722–2733, 2008.

[3] C. Nkono, O. Féménias, A. Lesne, J.-C. Mercier, F. Y. Ngounouno, and D. Demaiffe, "Relationship between the fractal dimension of orthopyroxene distribution and the temperature in mantle xenoliths," *Geological Journal*, vol. 51, no. 5, pp. 748–759, 2016.

[4] D. Chappard, I. Degasne, G. Hure, E. Legrand, M. Audran, and M. Basle, “Image analysis measurements of roughness by texture and fractal analysis correlate with contact profilometry,” *Biomaterials*, vol. 24, no. 8, pp. 1399–1407, 2003.

[5] L. Liu, X. Yang, and X. Jing, “Fourier transform infrared spectroscopy microscopic imaging classification based on multifractal methods,” *Applied Optics*, vol. 56, no. 6, pp. 1689–1700, 2017.

[6] Y. Liu, Y. Liu, L. Sun, and J. Liu, “Multiscale fractal characterization of hierarchical heterogeneity in sandstone reservoirs,” *Fractals*, vol. 24, no. 03, p. 1650032, 2016.

[7] J. B. Florindo, G. Landini, and O. M. Bruno, “Texture descriptors by a fractal analysis of three-dimensional local coarseness,” *Digital Signal Processing*, vol. 42, pp. 70–79, 2015.

[8] A. Materka, M. Strzelecki, *et al.*, “Texture analysis methods–a review,” *Technical university of lodz, institute of electronics, COST B11 report, Brussels*, pp. 9–11, 1998.

[9] A. Serna and B. Marcotegui, “Detection, segmentation and classification of 3d urban objects using mathematical morphology and supervised learning,” *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. 93, pp. 243–255, 2014.

[10] R. Azencott, J.-P. Wang, and L. Younes, “Texture classification using windowed fourier filters,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 19, no. 2, pp. 148–153, 1997.

[11] Y. Qian, M. Ye, and J. Zhou, “Hyperspectral image classification based on structured sparse logistic regression and three-dimensional wavelet texture features,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 51, no. 4, pp. 2276–2291, 2013.

[12] X. Wu and J. Sun, “Joint-scale lbp: a new feature descriptor for texture classification,” *The Visual Computer*, vol. 33, no. 3, pp. 317–329, 2017.

[13] K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.

[14] B. B. Mandelbrot and R. Pignoni, *The fractal geometry of nature*, vol. 173. WH freeman New York, 1983.

[15] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, vol. 85. Cambridge university press, 1986.

[16] A. Y. Cherny, E. Anitas, A. Kuklin, M. Balasoiu, and V. Osipov, "Scattering from generalized cantor fractals," *Journal of Applied Crystallography*, vol. 43, no. 4, pp. 790–797, 2010.

[17] S. Wolfram, "Geometry of binomial coefficients," *The American Mathematical Monthly*, vol. 91, no. 9, pp. 566–571, 1984.

[18] J. Contreras-Ruiz, M. Martínez-Gallegos, and E. Ordoñez-Regil, "Surface fractal dimension of composites tio 2-hydrotalcite," *Materials Characterization*, vol. 121, pp. 17–22, 2016.

[19] M. N. Starodubtseva, I. E. Starodubtsev, and E. G. Starodubtsev, "Novel fractal characteristic of atomic force microscopy images," *Micron*, vol. 96, pp. 96–102, 2017.

[20] F. Wang, D.-w. Liao, J.-w. Li, and G.-p. Liao, "Two-dimensional multifractal detrended fluctuation analysis for plant identification," *Plant methods*, vol. 11, no. 1, p. 12, 2015.

[21] J. B. Florindo, A. R. Backes, M. de Castro, and O. M. Bruno, "A comparative study on multiscale fractal dimension descriptors," *Pattern Recognition Letters*, vol. 33, no. 6, pp. 798–806, 2012.

[22] T. Ojala, T. Maenpaa, M. Pietikainen, J. Viertola, J. Kyllonen, and S. Huovinen, "Outex-new framework for empirical evaluation of texture analysis algorithms," in *Pattern Recognition, 2002. Proceedings. 16th International Conference on*, vol. 1, pp. 701–706, IEEE, 2002.

[23] D. Casanova, J. B. Florindo, M. Falvo, and O. M. Bruno, "Texture analysis using fractal descriptors estimated by the mutual interference of color channels," *Information Sciences*, vol. 346, pp. 58–72, 2016.

[24] T. Ojala, M. Pietikainen, and T. Maenpaa, "Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 24, no. 7, pp. 971–987, 2002.

[25] M. Varma and A. Zisserman, "A statistical approach to texture classification from single images," *International journal of computer vision*, vol. 62, no. 1-2, pp. 61–81, 2005.

[26] M. Varma and A. Zisserman, "A statistical approach to material classification using image patch exemplars," *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 31, no. 11, pp. 2032–2047, 2009.

[27] A. R. Backes, D. Casanova, and O. M. Bruno, "Plant leaf identification based on volumetric fractal dimension," *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol. 23, no. 06, pp. 1145–1160, 2009.

[28] Y. Xu, H. Ji, and C. Fermüller, "Viewpoint invariant texture description using fractal analysis," *International Journal of Computer Vision*, vol. 83, no. 1, pp. 85–100, 2009.

[29] V. Ojansivu and J. Heikkilä, "Blur insensitive texture classification using local phase quantization," in *International conference on image and signal processing*, pp. 236–243, Springer, 2008.

[30] D. Casanova, J. J. de Mesquita Sá Junior, and O. M. Bruno, "Plant leaf identification using gabor wavelets," *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 19, no. 3, pp. 236–243, 2009.