

Um estudo sobre a variabilidade de problemas-teste lineares com dados gerados aleatoriamente

Augusto Plastino Duarte* Sandra Augusta Santos†

15 de Junho de 2018

Resumo

Apresentamos um conjunto de diferentes experimentos nos quais trabalhamos com matrizes geradas aleatoriamente, de diferentes estruturas, analisando diversos aspectos e objetos matemáticos diretamente relacionados à estas estruturas. Dividimos nossas jornadas de trabalho em três diferentes classes de experimentos, aqui separados por seções.

Conteúdo

1	Desenvolvimento Geral do Projeto	3
1.1	Primeira classe de experimentos	3
1.2	Segunda classe de experimentos	4
1.3	Terceira classe de experimentos	4
2	Análise de valores associados a conjuntos clássicos de Matrizes Aleatórias	4
2.1	Introdução	4
2.2	Considerações sobre os resultados obtidos	6
3	Resultados Teóricos e Experimentais para Matrizes Ortogonais Haar-distribuídas	8
3.1	Introdução	8
3.2	Teoria	9
3.2.1	Primeira Pergunta	9
3.2.2	Segunda Pergunta	10
3.2.3	Terceira Pergunta	12
3.3	Resultados Experimentais	15

*Bolsista PICME-CNPq, processo no. 144939/2017-7

†DMA - IMECC - Unicamp (www.ime.unicamp.br/~sandra)

4	Análise da qualidade do estimador SGECO, para a Norma-1	18
4.1	Introdução e construção	18
4.2	Relação entre normas	18
4.3	Funcionamento do estimador	19
4.4	Modelos e resultados	19
4.4.1	Geração aleatória – Construção “zero”	20
4.4.2	Primeira Construção	20
4.4.3	Segunda Construção	22
4.4.4	Adendo na construção	23
4.4.5	Importância da distribuição de Haar de U e V	24
4.5	Notas	25
5	Conclusões Finais	25
A	Análise de métricas estatísticas para diferentes modelos estimadores de $\tilde{\kappa}_1$	28
A.1	1ª Construção	29
A.1.1	<i>Sharp Break</i>	29
A.1.2	<i>Exponential Decay</i>	31
A.2	2ª Construção	34
A.2.1	<i>Sharp Break</i>	34
A.2.2	<i>Exponential Decay</i>	36
A.3	2ª Construção, sem matrizes Haar-distribuídas	39
A.3.1	<i>Sharp Break</i>	39
A.3.2	<i>Exponential Decay</i>	41
A.4	Discussão	44

1 Desenvolvimento Geral do Projeto

Iniciamos nosso projeto com estudos no campo de Matrizes Aleatórias, nos embasando no artigo de Edelman e Rao [8] – conforme a proposta original do trabalho – como fonte primária de informação. Tal artigo se propõe a ser um texto de fácil acesso e entendimento para alunos de graduação em matemática; no entanto, não vimos nele uma didática muito clara conforme avançamos nossa leitura.

À medida que prosseguimos, era comum buscarmos informações adicionais em outras referências – tanto notacionais e metodológicas quanto teóricas (pertencentes aos campos da álgebra [17, 7], probabilidade [26] e estatística [19, 24]).

Estendemos esta etapa de estudo teórico até o início do capítulo 7 do artigo original de estudo. Após isso, julgamos ter familiaridade o suficiente com o campo para prosseguirmos com o projeto, com um ideal mais experimental em mente, e nos apoiando em mais referências apenas quando necessário.

Em seguida, começamos a elaborar e implementar diversos experimentos diferentes, relacionados a diferentes aspectos pertinentes à análise numérica mergulhada no campo de Matrizes Aleatórias; alguns experimentos foram descartados, outros engavetados para serem revisitados no relatório final (mais detalhes podem ser encontrados no relatório parcial).

Declaramos no plano original de trabalho que utilizaríamos majoritariamente o *software* GNU Octave [13]; no entanto, este não atendeu bem nossas expectativas (particularmente nos experimentos apresentados no Relatório Parcial) em quesitos de velocidade e disponibilidade de funções pertinentes para o experimento (referentes à visualização dos dados obtidos). No geral – a menos que a seção referente à algum experimento descreva o contrário – utilizamos o *Matlab* R2010a, e ficamos satisfeitos com o controle experimental disponibilizado por este *software*.

Também declaramos, no relatório parcial, que trabalharíamos com 6 diferentes classes de experimentos neste segundo semestre, mas não seguimos este planejamento à risca. Em suma, decidimos dar valor à qualidade e profundidade do estudo sobre algumas poucas classes.

1.1 Primeira classe de experimentos

No decorrer do desenvolvimento destes experimentos, nos interessamos pelas distribuições de valores reais associadas às matrizes geradas: valores singulares, no caso de matrizes não simétricas, e autovalores, para matrizes simétricas.

Alguns resultados já são muito bem estudados como a Lei Semi-Circular de Wigner [28] ou a distribuição de Tracy-Widom [27, 20], e nosso intuito não foi conduzir uma análise teórica pura como fora feito nas referências originais, mas acompanhar experimentos numéricos, comprovar alguns resultados experimentalmente e criar algumas conjecturas e conclusões acerca dos resultados.

1.2 Segunda classe de experimentos

No decorrer do desenvolvimento destes experimentos, nos interessamos na replicação dos resultados numéricos do experimento presente na seção 4.6 de [8]. Decidimos prover os resultados teóricos que explicassem esse comportamento de maneira adequada.

1.3 Terceira classe de experimentos

No decorrer do desenvolvimento destes experimentos, nos interessamos pela qualidade do estimador *SGECO*¹ da *Norma-1* matricial, nos embasando em [25]. Decidimos prover resultados numéricos mais completos, sob as construções teóricas presentes nesta referência, e sob capacidades computacionais mais vantajadas.

As três próximas seções são correspondentes às diferentes classes de experimentos feitas no decorrer do projeto. A última seção consiste em um compilado final de interpretações que julgamos importantes, no contexto da Análise Numérica.

2 Análise de valores associados a conjuntos clássicos de Matrizes Aleatórias

2.1 Introdução

Inicialmente, desenvolvemos experimentos com matrizes quadradas densas geradas aleatoriamente, analisando como algumas características (valores singulares e autovalores) variam conforme variamos as distribuições de seus elementos e seus parâmetros. Os elementos aleatoriamente gerados das matrizes são independentes e identicamente distribuídos (*i.i.d.*) em todos os experimentos.

Dividimos os experimentos em duas famílias principais: matrizes simétricas e não-simétricas. Para os experimentos simétricos, nosso interesse consiste em analisar as distribuições dos autovalores de tais matrizes. No caso de experimentos não-simétricos, nossa análise é feita para as distribuições dos valores singulares das matrizes.

Todos estes experimentos, para uma dada dimensão, constituem da mesma estrutura:

Protocolo dos experimentos

Dado uma distribuição e parâmetros fixos:

for $i=1$ até k

 Gerar a matriz aleatória de dimensão n ;

 Calcular espectro ou os valores singulares da matriz e armazenar.

end

¹Rotina do LINPACK, programada por C. B Moler

Adotamos $k = 10000$. Julgamos que tal valor nos produz valores estatisticamente significativos nos experimentos. Para cada experimento, fizemos testes para os seguintes valores de n : 20, 50, 100, 200.

Após a geração dos dados relativos ao experimento, tendo variado os valores de n , exibimos os resultados na seguinte estrutura:

- *Boxplot* dos maiores valores singulares/autovalores para cada valor distinto de n em um mesmo gráfico.
- *Boxplot* dos menores valores singulares/autovalores para cada valor distinto de n em um mesmo gráfico.
- *Boxplot* individual do maior valor singular/autovalor para $n = 200$.
- Histograma referente ao conjunto amostral de todos os valores singulares/autovalores para $n = 200$.
- Histograma referente ao conjunto amostral dos menores valores singulares/autovalores para $n = 200$.
- Histograma referente ao conjunto amostral dos maiores valores singulares/autovalores para $n = 200$.
- Tabela com dados adicionais referentes ao menor e ao maior valor singular/autovalor que nos auxiliam a inferir conjecturas. Tais dados adicionais são:

- ★ $\mu(\cdot)$ Média calculada do parâmetro;
- ★ $\sigma^2(\cdot)$ Variância calculada do parâmetro;
- ★ $p(\cdot)$ Valor-p/*p-value* do teste Chi-quadrado de Pearson.

Os parâmetros estudados nesses dados adicionais foram:

- ★ O conjunto de maiores valores singulares/autovalores para $n = 200$;
- ★ O conjunto de menores valores singulares/autovalores para $n = 200$.

Cada um destes experimentos foi feito no *software* Matlab R2010a [15]. Seus respectivos gráficos, tabelas e detalhes metodológicos não estão contidos neste relatório *per se*, mas estão elaborados no texto ampliado presente em <https://www.ime.unicamp.br/~ra164505/IC/Relat%20de%20Desenvolvimento.pdf>. Nos referimos a este texto como o relatório de desenvolvimento.

Seguem, na próxima seção, nossas conjecturas e conclusões sobre os experimentos.

2.2 Considerações sobre os resultados obtidos

Em prol de facilitar a leitura e formatação das conclusões aqui apresentadas, segue uma tabela referenciando uma sigla a cada experimento realizado:

Sigla	Experimento
Família 1	Matrizes não-simétricas
<i>nSU11</i>	Elementos $\in \mathcal{U}(-1, 1)$
<i>nSU01</i>	Elementos $\in \mathcal{U}(0, 1)$
<i>nSN01</i>	Elementos $\in \mathcal{N}(0, 1)$
<i>nSN010</i>	Elementos $\in \mathcal{N}(0, 10)$
Família 2	Matrizes simétricas
<i>SU11</i>	Elementos $\in \mathcal{U}(-1, 1)$
<i>SU01</i>	Elementos $\in \mathcal{U}(0, 1)$
GOE	Conjunto GOE

Também nos referimos aos autovalores e valores singulares de forma ordenada decrescente i.e. $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ e $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, de modo que λ_1 e λ_n são o maior e o menor autovalores, respectivamente, por exemplo.

Elaboramos observações que sumarizam a presença de certos fenômenos, estes divididos em duas espécies, os recorrentes (fenômenos que surgem na maioria, ou em todos, os experimentos daquela classe) e singulares (que surgem em poucos, ou apenas um, experimento daquela classe):

▷ No que se refere à família de experimentos com matrizes não-simétricas:

★ Fenômenos recorrentes:

(1): Em todos os experimentos, há um crescimento – que visualmente parece ser linear no experimento *nSU01*, e $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ no restante – da mediana (e dos outros quartis e *outliers* correspondentes) dos maiores valores singulares, conforme n cresce. O mesmo fenômeno ocorre – de forma similar entre todos os experimentos – mas de forma decrescente, para os menores valores singulares; para este decréscimo, não conjecturamos sua ordem.

(2): Ainda sobre o decréscimo de σ_n , nota-se que os *outliers* superiores tendem a se agrupar mais na vizinhança do extremo superior do *boxplot*, conforme o crescimento dimensional.

(3): Nos experimentos *nSU11*, *nSN01* e *nSN010*, conjecturamos que a distribuição de σ_1 é a distribuição de Tracy-Widom[27] (a menos de fatores de escala e translação), visto o *p-value* próximo de zero (indicando que não é da família de distribuições normais) e pela assimetria de *outliers* favorecendo o lado direito.

(4): Em todos os experimentos, houve um acúmulo de valores singulares muito próximos de zero. Conjecturamos que tal fenômeno desaparece conforme $n \rightarrow \infty$.

(5): Em todos os experimentos, a distribuição empírica de todo o conjunto de valores singulares (com exceção de σ_1 do experimento $nSU01$) se assemelha à seção positiva de um semi-círculo. Sugerimos uma ligação (que pode ser induzida pela distribuição de Marchenko-Pastur [14]) entre os experimentos $nSU11$ e $nSN01$, análogo ao referenciado em **(10)**, já bem estudado [9].

(6): A distribuição dos menores valores singulares se comportou da mesma maneira – salvo fatores de escala – em todos os experimentos.

★ Fenômenos singulares:

(7): No experimento $nSU01$, σ_1 é totalmente disjunto do conjunto restante, e possui distribuição única (visto $p(\sigma_1)$ estatisticamente significativa), distinta da distribuição de Tracy-Widom.

Sabemos da dificuldade na interpretação dos testes de hipótese, e não podemos afirmar que esta distribuição pertence à família de distribuições normais. Nos cabe apenas conjecturar a veracidade de tal afirmação. Também cremos que a média desta distribuição é sempre próxima de $\frac{n}{2}$, e os resultados para $n = 20, 50, 100$, visualmente explicitados no Relatório de Desenvolvimento, corroboram para tal conjectura.

▷ No que se refere ao conjunto de experimentos com matrizes simétricas:

★ Fenômenos recorrentes:

(8): O crescimento dos conjuntos de dados (nos experimentos $SU11$ e **GOE**) para λ_1 , de ordem $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ – conforme descrito em **(1)** – para valores singulares, também acontece aqui; contudo, é evidenciado (agora para os três experimentos) um decréscimo de mesma ordem para o conjunto de dados de λ_n , diferentemente de como acontecia com os valores singulares – afinal, as distribuições dos autovalores destes dois experimentos são simétricas (sabemos isso para o experimento **GOE** e conjecturamos o mesmo para o outro, conforme **(10)**).

(9): O crescimento do conjunto de dados (no experimento $SU01$) para o maior autovalor aparenta ter ordem linear $\mathcal{O}(n)$, como acontece em seu correspondente não-simétrico (experimento $nSU01$) na primeira família de experimentos.

(10): Como pode ser acompanhado na seção de desenvolvimento, as matrizes do experimento $SU11$ e **GOE** são matrizes de Wigner [28] (a menos de fatores de escala), e portanto a densidade empírica de seus autovalores segue a Lei Semi-Circular de Wigner. A densidade empírica dos autovalores $\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ do experimento $SU01$ também segue tal padrão, como referenciado em [9]

(11): As distribuições empíricas de λ_n (menor autovalor) dos três experimentos aparentam ter um comportamento simétrico (a menos de fatores de escala) à distribuição de Tracy-Widom – devido à assimetria dos *outliers*. Não encontramos nenhuma referência na literatura

aferindo esta conclusão; tal reflexão pode ser induzida – novamente como conjectura de nossa parte – pela simetria do conjunto de autovalores presentes nestes experimentos, em especial nos experimentos *SU11* e *GOE*.

★ Fenômenos singulares:

(12): Nos embasando na literatura pesquisada e descoberta [9, 12], sabemos que a distribuição de λ_1 (em matrizes do experimento *SU01*) é disjunta das demais, e segue – quando $n \rightarrow \infty$ – a distribuição normal com média $\mu = \frac{n}{2} + \frac{1}{24}$ e variância $\sigma^2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

(13): Temos, de [27], que a distribuição empírica de λ_1 do experimento *GOE* segue a distribuição de Tracy-Widom, e a distribuição empírica de todos os autovalores segue, como já mencionado, a Lei Semi-Circular de Wigner [8].

▷ Conclusões comparativas entre os resultados experimentais dos diferentes conjuntos:

(14): O crescimento do conjunto de dados (visualizados pelo *boxplot*) do maior elemento de análise (seja ele λ_1 ou σ_1) se comportou de maneira similar em todos os experimentos correspondentes entre si (*nSU11* : *SU11*, e *nSU01* : *SU01*).

Achamos importante deixar claro que os experimentos *nSN01* e *nSN010* não possuem correspondentes simétricos i.e. *GOE* não é o correspondente simétrico destes experimentos, visto que sua distribuição distingue os elementos diagonais dos não-diagonais.

(15): Como citado anteriormente, conjecturamos que a distribuição de σ_1 em *nSU11*, *nSN01* e *nSN010* é a distribuição de Tracy-Widom, como sabemos [27] que acontece em *SU11* e *GOE*.

(16): Nota-se uma semelhança no comportamento dos valores singulares em *nSU01* e dos autovalores em *SU01*. Em ambos, o maior elemento de análise se separa do restante. Novamente, sabemos [9] que o maior autovalor em *SU01* possui comportamento assintótico de uma distribuição normal; visto o *p-value* estatisticamente significativo de σ_1 em *nSU01*, conjecturamos que este também possui comportamento assintótico pertencente à família das distribuições normais.

Deixamos como observação o fato de que o relatório de desenvolvimento contém verbatim as mesmas conclusões aqui apresentadas.

3 Resultados Teóricos e Experimentais para Matrizes Ortogonais Haar-distribuídas

3.1 Introdução

Replicamos o experimento encontrado na seção 4.6 de [8] – embora trabalhemos com o caso real (que é menos usual, na literatura). Essencialmente,

comparamos as fases dos autovalores de matrizes ortogonais, geradas com distribuição de Haar, e as fases dos autovalores de matrizes ortogonais geradas sem este cuidado.

No artigo de interesse original, as matrizes Haar-distribuídas foram geradas através da fatoração QR única de matrizes aleatórias com elementos pertencentes à $\mathcal{N}(0, 1)$; aqui, geramos tais matrizes de forma mais eficiente, como desenvolvido em [25]. Note que esta diferença na construção matricial deve influenciar, de forma significativa, apenas na velocidade de processamento – ou seja, o único fator que poderia influenciar em alguma diferença nos resultados seria a diferença na estabilidade numérica entre a geração de Householder e a geração por QR.

Acreditamos na importância das seguintes perguntas (e suas respectivas respostas), em prol de um melhor entendimento a respeito do âmago do experimento :

1. O que é, essencialmente, a distribuição de Haar?
2. Por que a fatoração QR **única** supracitada gera matrizes ortogonais Haar-distribuídas? Por qual motivo precisamos desta unicidade?
3. Como a medida de Haar influencia na distribuição dos autovalores das matrizes em questão?

Esperamos responder a estas perguntas de maneira satisfatória, antes da apresentação dos resultados experimentais.

Antes de continuarmos, deixamos claro que, para este experimento, **não** estamos trabalhando com o Matlab R2010a, pois esta versão (e a versão Matlab R2010b) faz a fatoração QR única (fixando diagonais positivas) por padrão. Em todas as outras versões, e no *software* GNU Octave, a fatoração feita **NÃO** é única. Portanto, estamos utilizando o GNU Octave para os cálculos, e o Matlab R2010a para a visualização, após uma exportação dos dados calculados.

3.2 Teoria

3.2.1 Primeira Pergunta

Começamos definindo nosso grupo matricial de interesse $\mathbb{O}(n)$, referente às matrizes ortogonais de dimensão n . Um elemento uniforme aleatório deste grupo deve ser uma matriz $Q \in \mathbb{O}(n)$ aleatória tal que sua distribuição é invariante conforme translações, ou seja, tendo $M \in \mathbb{O}(n)$ como uma matriz fixa, devemos ter a seguinte igualdade de distribuições :

$$MQ \stackrel{d}{=} QM \stackrel{d}{=} Q.$$

A distribuição dos elementos uniformes aleatórios de $\mathbb{O}(n)$ deve ser uma medida probabilística μ em $\mathbb{O}(n)$, invariante sob translações, i.e. $\forall A \subseteq \mathbb{O}(n)$ e tendo $M \in \mathbb{O}(n)$ como matriz fixa,

$$\mu(MA) = \mu(AM) = \mu(A).$$

De acordo com o Teorema 1.7 em [16], existe uma única medida probabilística invariante sob translações, denominada de Medida de Haar. Como descrito no texto, este teorema pode ser expandido para quaisquer Grupos de Lie, mas não nos preocupamos com esta generalização, nem com a prova deste teorema.

Em realidade, a medida de Haar pode ser generalizada para quaisquer grupos topológicos localmente compactos de Hausdorff, e usualmente é dividida entre μ (invariante sob translações pela esquerda) e ν (invariante sob translações pela direita), que podem ser distintas. Como $\mathbb{O}(n)$ é, essencialmente, um Grupo de Lie, e portanto unimodular, estas medidas são equivalentes entre si.

3.2.2 Segunda Pergunta

Recordamos [8] que a função densidade conjunta dos elementos de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que seus elementos são todos *i.i.d.* e pertencentes à distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$, é dada por

$$f_G(A) = \frac{1}{(2\pi)^{n^2/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|A\|_F^2\right),$$

recordando que a norma de Frobenius $\|A\|_F$ é equivalente a $\sqrt{\text{tr}(A^t A)}$, e portanto

$$f_G(A) = \frac{1}{(2\pi)^{n^2/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}(A^t A)\right).$$

A fim de facilitar a visualização das contas seguintes, notacionalmente, definimos $\mathcal{C} := \frac{1}{(2\pi)^{n^2/2}}$.

Temos também que $\text{tr}(A^t A) = \text{tr}(V\Sigma^t U^t U \Sigma V^t) = \text{tr}(V\Sigma^2 V^t)$, pela decomposição SVD de A ; note que, para qualquer $Q \in \mathbb{O}(n)$,

$$f_G(QA) = \mathcal{C} * \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}(A^t Q^t QA)\right) = \mathcal{C} * \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}(A^t A)\right) = f_G(A).$$

Utilizando o resultado de que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma dimensão, temos que $\text{tr}((AQ)^t AQ) = \text{tr}(AQQ^t A^t) = \text{tr}(AA^t) = \text{tr}(A^t A)$, e portanto, para quaisquer $Q \in \mathbb{O}(n)$, $f_G(AQ) = f_G(QA) = f_G(A)$.

Visto isso, temos que a função distribuição f_G é invariante sob multiplicações por matrizes ortogonais. Ao fazermos a fatoração QR de A , estamos essencialmente fazendo o processo de Gram-Schmidt em A , que consiste apenas em operações elementares – estas que não interferem nos elementos gaussianos de A . Em outras palavras, a "versão" de A após o Gram-Schmidt também é invariante sob multiplicações por matrizes ortogonais. Considere o produto interno de Zappa-Szép [21] :

$$GL(n, \mathbb{R}) = \mathbb{O}(n) \bowtie T(n),$$

sendo $T(n)$ o conjunto de matrizes triangulares superiores. Este produto é uma extensão do produto interno direto, no qual nenhum dos dois grupos precisam ser subgrupos normais de $GL(n, \mathbb{R})$.

O produto de Zappa-Szép simplesmente nos diz que $\forall g \in GL(n, \mathbb{R}), \exists! Q \in \mathbb{O}(n)$ e $R \in T(n)$ tais que $g = QR$, e que $\mathbb{O}(n) \cap T(n) = \{I_n\}$, a matriz identidade de dimensão n . Lembramos que $GL(n, \mathbb{R})$ é o grupo linear geral, que consiste em matrizes inversíveis de dimensão n .

As matrizes que geramos aleatoriamente (elementos *i.i.d.* pertencentes à $\mathcal{N}(0, 1)$) pertencem ao conjunto $GL(n, \mathbb{R})$, pois o conjunto de matrizes singulares tem medida nula dentro do conjunto de todas as matrizes. Desconsideramos erros de precisão numérica (que podem interferir, e gerar, por exemplo, duas colunas literalmente iguais em uma matriz, o que faria com que a matriz fosse singular).

Vamos definir $T_2(n)$ o conjunto de matrizes triangulares superiores com diagonais positivas.

Notemos que a fatoração QR (que não necessariamente é única) define um mapa $QR : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{O}(n) \times T(n)$.

Vamos definir a fatoração QR única (fixando diagonais positivas em R) pelo mapa $\overline{QR} : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{O}(n) \times T_2(n)$.

Há uma medida invariante, em $GL(n, \mathbb{R})$, sob multiplicações por matrizes ortogonais. Definimos esta medida como μ_G , tal que, $\forall A \in GL(n, \mathbb{R})$:

$$d\mu_G(A) := f_G(A)dA,$$

sendo dA uma "perturbação diferencial" na matriz A . Note que temos então que $d\mu_G(A) = d\mu_G(QA) = d\mu_G(AQ)$, $\forall Q \in \mathbb{O}(n)$.

Finalmente, precisamos que o mapa \overline{QR} induza, sob a condição de existência de μ_G em $GL(n, \mathbb{R})$, uma medida de Haar μ em $\mathbb{O}(n)$; para isso, precisamos que este mapa tenha a condição um-a-um :

$$A \mapsto (Q, R) \Rightarrow UA \mapsto (UQ, R),$$

para o mesmo $R \in T_2(n)$, com U e Q pertencentes a $\mathbb{O}(n)$. Esta condição é necessária para a indução da medida μ_G de A para Q , ou seja, para que possamos estender a invariância sob multiplicações por matrizes ortogonais, de A para Q . Em [18] vemos que a medida μ_G é um produto entre a medida de Haar μ e uma determinada medida em $T_2(n)$, sob as condições corretas, para matrizes pertencentes ao conjunto unitário. Conjecturamos que o mesmo resultado seja válido para nosso conjunto ortogonal.

Este resultado segue apenas para o mapa \overline{QR} ; para a fatoração QR comum, isto não necessariamente acontece. O pequeno experimento cujos resultados apresentamos a seguir, feito no GNU Octave, comprova este comportamento para matrizes de dimensão 3 (mas frisamos que este é um comportamento independente da dimensão trabalhada).

```

>> miniexperimento
U =
-2.222965763352684e-001 -8.924240622232815e-001 -3.926366326700999e-001
 9.739789669382134e-001 -2.215011635610311e-001 -4.798131410330403e-002
-4.414979175023051e-002 -3.930859037233543e-001  9.184412165089311e-001

A =
-7.417593348587506e-001 -2.098414542058513e-001 -9.487409011295260e-003
-1.524470161191648e+000 -1.871581470044710e+000  2.200781083699740e-001
-1.557363954394311e-001 -2.254476433568915e+000  3.056234706516471e-001

Q1 =
-4.356910262869857e-001  2.987280656122083e-001  8.490788375813998e-001
-8.954359424407591e-001 -4.798198108103280e-002 -4.425971107867390e-001
-9.147569402973872e-002 -9.531312985665342e-001  2.883971655454505e-001

R1 =
 1.702489356230533e+000  1.973537152459053e+000 -2.208893884995485e-001
 0.000000000000000e+000  2.175928705702319e+000 -3.046932344283891e-001
 0.000000000000000e+000  0.000000000000000e+000 -1.732055046683306e-002

Q2 =
-9.318779131723078e-001 -3.506483117906480e-001  9.300170095214742e-002
 2.216246685341930e-001 -3.473154095980523e-001  9.111830291181054e-001
-2.872038670330419e-001  8.697228108392384e-001  4.013678749814951e-001

R2 =
-1.702489356230533e+000 -1.973537152459054e+000  2.208893884995485e-001
 0.000000000000000e+000 -2.175928705702318e+000  3.046932344283891e-001
 0.000000000000000e+000  0.000000000000000e+000 -1.732055046683306e-002

UQ1 =
 9.318779131723081e-001  3.506483117906482e-001  9.300170095214771e-002
-2.216246685341931e-001  3.473154095980525e-001  9.111830291181053e-001
 2.872038670330419e-001 -8.697228108392384e-001  4.013678749814955e-001

```

(1) $U \in \mathbb{O}(n)$, $A \in GL(n, \mathbb{R})$, temos $[Q_1, R_1] = qr(A)$, $[Q_2, R_2] = qr(UA)$, $Q_2 \neq UQ_1$ e $R_2 \neq R_1$.

Ressaltamos que este experimento teria falhado no Matlab R2010a, visto sua implementação do QR único. É curioso notar que a diferença nas matrizes (para esta implementação QR do GNU Octave) consiste apenas nos sinais. Note que não precisamos que U seja Haar-distribuída em $\mathbb{O}(n)$.

3.2.3 Terceira Pergunta

Essencialmente, estamos questionando a relação entre a distribuição empírica dos autovalores das matrizes de um determinado grupo, e da medida de Haar associada a este grupo.

Seja o grupo ortogonal $\mathbb{O}(n)$. Os autovalores das matrizes pertencentes a este conjunto podem ser definidos como $[e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}]$. O conjunto $[\theta_1, \dots, \theta_n]$ é referente às fases destes autovalores. Seja a distribuição uniforme ψ no círculo unitário S^1 , cuja função densidade é dada por $f_\psi(\theta) = \frac{1}{2\pi}$. Vamos calcular os

momentos circulares desta distribuição :

$$E[e^{i\theta t}] = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f_\psi(\theta) e^{i\theta t} dS = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\psi(\theta) e^{i\theta t} d\theta = \frac{-ie^{i\theta t}}{2\pi t} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}_*.$$

Note que o momento-zero desta distribuição ($t = 0$) é 1. Temos então que todos os outros momentos circulares desta distribuição são nulos.

Definimos a medida empírica dos autovalores de Q , sendo $Q \in \mathbb{O}(n)$:

$$\mu_Q = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\exp(i\theta_j)},$$

onde $\delta_{\exp(i\theta_j)}$ é a medida de Dirac em $e^{(i\theta_j)}$. Vamos aplicar a transformada de Fourier desta medida empírica :

$$\tilde{\mu}_Q(x) := \frac{1}{n} \int_{S^1} e^{ix\theta} \sum_{j=1}^n \delta_{\exp(i\theta_j)}(d\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} z^x \delta_{\exp(i\theta_j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{ix\theta_j}.$$

Vamos definir a função auxiliar $g_j(a)$, como em [4] :

$$se \ j \ \acute{e} \ \acute{i}mpar \quad g_j(a) = \begin{cases} 0 & se \ a \ \acute{e} \ \acute{i}mpar \\ j^{a/2}(a-1)(a-3)\dots 1 & se \ a \ \acute{e} \ par \end{cases}$$

$$se \ j \ \acute{e} \ par \quad g_j(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a}{2i} j^i (2i-1)(2i-3)\dots 1 = \sum_{i=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} \binom{a}{2i} j^i (2i-1)(2i-3)\dots 1.$$

Usaremos dois resultados presentes em [4] para matrizes ortogonais Haar-distribuidas. Seja Q uma matriz Haar-distribuida em $\mathbb{O}(n)$. Seja k um inteiro positivo. Seja o vetor de inteiros não negativos $[a_1, a_2, \dots, a_k]$. Então, para todo $n \geq \sum_{i=1}^k a_i$:

1.

$$E \left\{ \prod_{j=1}^k Tr(Q^j)^{a_j} \right\} = \prod_{j=1}^k g_j(a_j).$$

2. Para um valor fixo de k ,

$$\prod_{j=1}^k Tr(Q^j)^{a_j} = \sum_{i=1}^n e^{i\lambda\theta_i},$$

sendo que $\lambda = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots k^{a_k}$.

Com estes resultados em mãos, provaremos que $\mu_Q \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \delta_\psi$ i.e. conforme aumentamos a dimensão das matrizes ortogonais geradas, a distribuição de seus autovalores tende cada vez mais para a uniformidade circular.

Tendo em vista os momentos de ψ , basta provarmos a nulidade (conforme $n \rightarrow \infty$) do primeiro e segundo momentos (média e variância) de $\tilde{\mu}_Q$ para termos a convergência desejada.

▷ Primeiro momento :

$$E(\tilde{\mu}_Q(x)) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{j=1}^n e^{ix\theta_j}\right) = \frac{1}{n} E\left(\prod_{j=1}^x \text{Tr}(Q^j)^{a_j}\right) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^x g_j(a_j),$$

tendo fixado $[a_1, \dots, a_{x-1}]$ todos como zero, $a_x = 1$ e x um inteiro positivo qualquer.

Note que, para todo $j \leq x$, $g_j(0) = 1$, independentemente da paridade de j . Dada nossa escolha de $[a_1, \dots, a_{x-1}]$, isso significa que precisamos nos preocupar apenas com o valor de $g_x(1)$ no produtório.

Por ora, fixemos x como um ímpar qualquer. Então :

$$E(\tilde{\mu}_Q(x)) = \frac{1}{n} g_x(1) = 0, \text{ caso } x \text{ seja ímpar.}$$

Se refixarmos x como um par qualquer, temos :

$$E(\tilde{\mu}_Q(x)) = \frac{1}{n} g_x(1) = \frac{1}{n} \binom{1}{0} x^0 = \frac{1}{n}, \text{ caso } x \text{ par.}$$

▷ Segundo momento :

$$E(|\tilde{\mu}_Q(x)|^2) = \frac{1}{n^2} E\left(\left(\sum_{j=1}^n e^{ix\theta_j}\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} E\left(\prod_{j=1}^x \text{Tr}(Q^j)^{2a_j}\right) = \frac{1}{n^2} \prod_{j=1}^x g_j(2a_j),$$

tendo fixado $[a_1, \dots, a_{2x-1}]$ todos como zero, $a_{2x} = 1$ e x um inteiro positivo qualquer.

Novamente, temos que para todo $j \leq x$, $g_j(0) = 1$. Precisamos nos preocupar apenas com o valor de $g_x(2)$ no produtório.

Fixemos x como um ímpar qualquer. Então :

$$E(|\tilde{\mu}_Q(x)|^2) = \frac{1}{n^2} g_x(2) = \frac{x^{2/2}(2-1)}{n^2} = \frac{x}{n^2}.$$

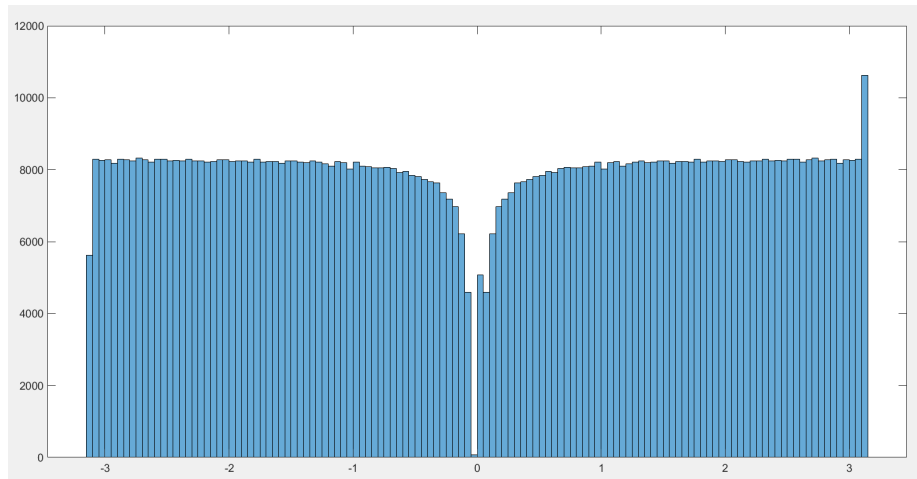
Fixando agora agora x como um par qualquer, temos :

$$E(|\tilde{\mu}_Q(x)|^2) = \frac{1}{n^2} g_x(2) = \frac{1}{n^2} \left[\binom{2}{0} x^0 + \binom{2}{2} x^1(2-1) \right] = \frac{1+x}{n^2}.$$

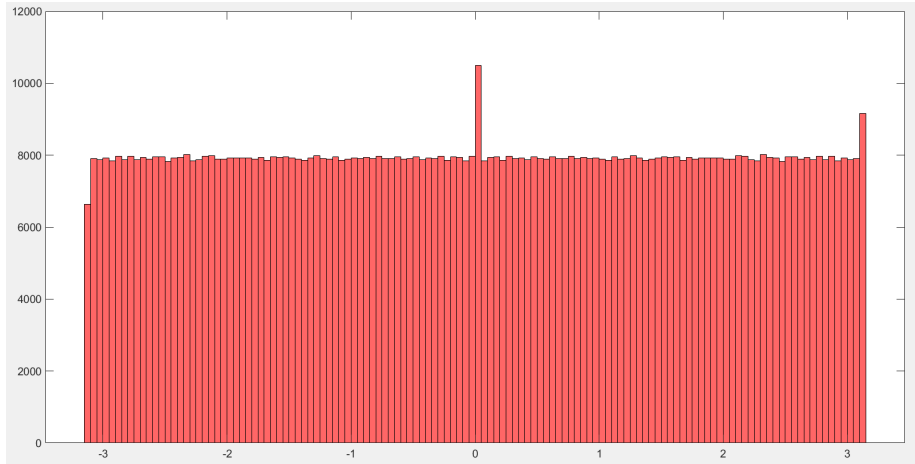
Temos enfim que a média e a variância de $\tilde{\mu}_Q$ tendem a zero conforme aumentamos a dimensão. Portanto, $\tilde{\mu}$ converge para a distribuição nula, ou seja, todos os seus momentos tendem a zero. Tendo em mente a unicidade da inversa da transformada de Fourier (e portanto o isomorfismo do "Espaço de Fourier") e a descrição univalente de distribuições através de seus momentos (desde que sejam finitos), podemos concluir que $\mu_Q \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \delta_\psi$.

3.3 Resultados Experimentais

Para o seguinte experimento, geramos 5000 matrizes aleatórias ortogonais Haar-distribuídas em $\mathbb{O}(n)$, com $n = 200$, calculamos seus autovalores e suas respectivas fases, e fizemos um histograma destas. Também geramos outras 5000 matrizes aleatórias ortogonais através da fatoração QR comum do GNU Octave, calculamos seus autovalores e suas respectivas fases, e fizemos um histograma destas.



(2) Distribuição das fases dos autovalores de matrizes geradas sem distribuição de Haar, através do QR do GNU Octave.

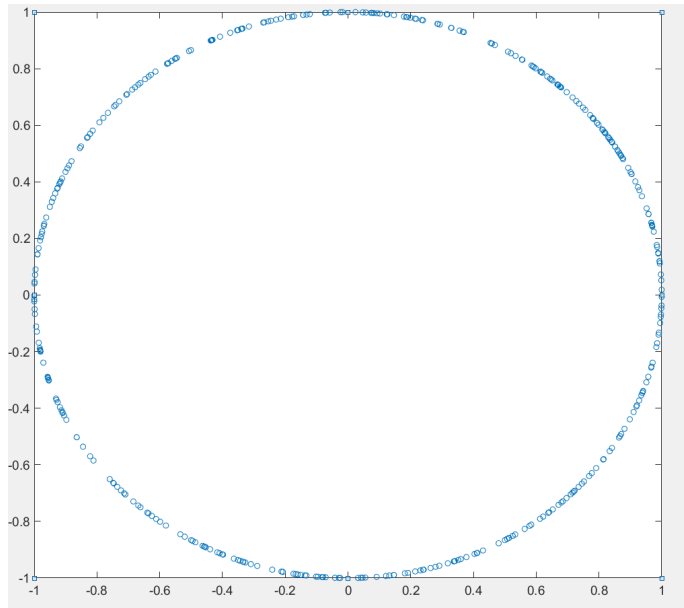


(3) Distribuição das fases dos autovalores de matrizes geradas com distribuição de Haar.

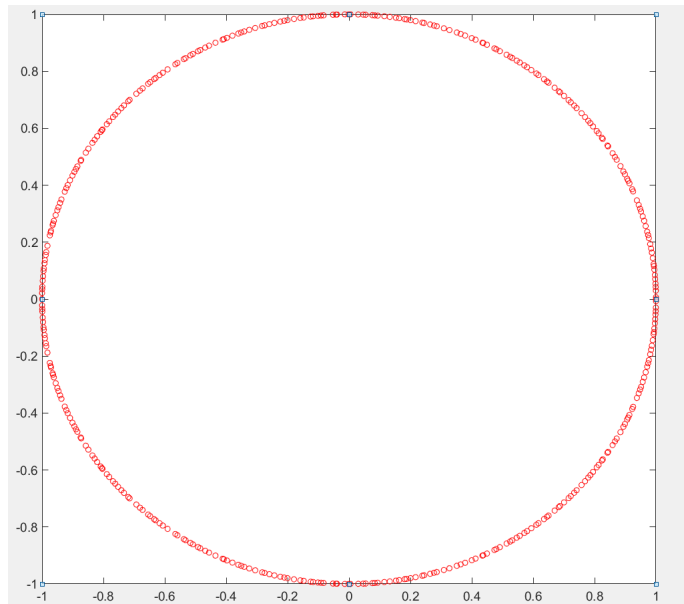
Fazendo uma breve comparação entre nossos resultados e o original de [8] (que trabalha com matrizes unitárias Haar-distribuídas em $\mathbb{U}(n)$), a única diferença que notamos é que, para pequenas dimensões, o caso ortogonal tende a ter uma concentração um pouco maior de autovalores com fase zero (autovalores iguais a 1), em comparação com o caso unitário, para matrizes Haar-distribuídas. Conforme aumentamos a dimensão das matrizes geradas, este fenômeno se enfraquece.

Como afirmado em [16] e [3], a convergência da distribuição dos autovalores no círculo uniforme (para o caso unitário) é rápida, e evidenciada pelo fenômeno da “separação natural” dos autovalores, que rarifica as ocasiões de autovalores condensados em uma só região. Conjecturamos que isso se dá devido ao fator referente ao determinante da matriz de Vandermonde, na densidade conjunta dos autovalores de matrizes aleatórias unitárias; também acreditamos que o mesmo fenômeno ocorra no caso de matrizes aleatórias ortogonais. Infelizmente, não encontramos, na literatura, uma função referente à distribuição conjunta dos autovalores em $\mathbb{O}(n)$ (como a Fórmula de Weyl para $\mathbb{U}(n)$ [1]).

A seguir, temos o resultado de um pequeno experimento comparando os autovalores de uma matriz Q Haar-distribuída em $O(400)$ com 400 pontos uniformemente distribuídos no círculo unitário.



(4) Conjunto de 400 pontos uniformemente distribuídos no círculo unitário.



(5) Conjunto dos autovalores de uma matriz Haar-distribuída em $O(400)$.

Como podemos ver, o efeito supracitado também ocorre no caso ortogonal.

4 Análise da qualidade do estimador SGECO, para a Norma-1

4.1 Introdução e construção

Fundamentalmente, estamos reproduzindo o experimento presente em [25] no qual inicialmente construímos matrizes a partir de uma determinada norma fixa – ou seja, temos controle inicial sobre a norma destas matrizes; calculamos estimativas de suas normas, utilizando um determinado estimador (neste caso, estaremos trabalhando com o estimador SGECO², apenas), e suas respectivas razões com as normas verdadeiras das matrizes.

Construímos os modelos matriciais do método a partir da *Norma-2* e utilizando o fato de que $\|A\|_2 = \|R\|_2$, sendo que $A = QR$. Portanto, $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$. Além disso, frisamos que estamos construindo as matrizes da mesma maneira que a descrita no artigo, ou seja, gerando uma matriz Σ de valores singulares que condensarão as informações da *Norma-2* pré-fixada (conforme as diferentes construções matriciais *Sharp Break* e *Exponential Decay*), e fazendo a multiplicação $U\Sigma V^t$, sendo U e V duas matrizes ortogonais Haar-distribuídas em $\mathbb{O}(n)$. Também geramos estas matrizes conforme descrito no artigo – utilizando transformações de Householder.

4.2 Relação entre normas

Usaremos a notação $\tilde{\kappa}_1$ e $\tilde{\kappa}_2$ para nos referirmos às estimativas de κ_1 e κ_2 , respectivamente. Note que o estimador SGECO é construído teoricamente para estimar $\kappa_2(A)$, mas na prática é utilizado para estimar $\kappa_1(A)$. Temos que essa aplicação é consistente visto que, $\forall x \in \mathcal{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} = \sqrt{n} \|x\|_2,$$

Note que a desigualdade acima decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Também temos que, para todo vetor $x \in \mathcal{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2,$$

e portanto $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Então, para toda matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$:

$$\|Ax\|_2 \leq \|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_1 \|x\|_2$$

e portanto $\|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$, pela consistência da *Norma-1*. Utilizando argumentações parecidas, temos que $\|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_2$, e portanto

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1.$$

²Rotina do LINPACK, programada por C. B Moler

Desta maneira, finalmente temos que, sob inversibilidade de A ,

$$\frac{1}{n}\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq n\kappa_1, \text{ e } \frac{1}{n}\tilde{\kappa}_2 \leq \tilde{\kappa}_1 \leq n\tilde{\kappa}_2;$$

temos também que as estimativas obedecem as relações $\frac{1}{n}\tilde{\kappa}_2 \leq \tilde{\kappa}_1 \leq n\tilde{\kappa}_2$, utilizando as desigualdades supracitadas das normas.

4.3 Funcionamento do estimador

Tendo um vetor inicial $d \in \mathcal{R}^n$, e tendo a decomposição em valores singulares de $A = U\Sigma V^t$, temos que d pode ser escrito como combinação linear dos vetores singulares que compõem as colunas de V :

$$d = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = V\alpha.$$

O próximo passo é calcular $A^t x = d$: $A^t x = V\Sigma U^t x = V\alpha$, tendo portanto que $x = U\Sigma^{-1}\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma_i} u_i$.

Após isso, calculamos $Ay = x$, e utilizando a mesma linha argumentativa, temos que $y = V\Sigma^{-2}\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2} v_i$.

Finalmente, temos que

$$\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\sum (\alpha_i/\sigma_i^2)^2 / \sum (\alpha_i/\sigma_i)^2},$$

que nos fornece uma boa estimativa para $\sigma_n^{-1} = \|A^{-1}\|_2$, especialmente quando α_n possui boa representatividade (ou seja, $\cos(v_n, d) \approx 1$). Note que esta é uma estimativa por baixo da *Norma-2* de A^{-1} , visto que σ_n é o menor valor singular, e portanto $\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} \leq (\alpha_n/\sigma_n^2)/(\alpha_n/\sigma_n) = \sigma_n = \|A^{-1}\|_2$.

Tendo esta estimativa, estimamos o número de condição da matriz $\tilde{\kappa}_2 := \|A\|_2 \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2}$.

Note que a estimativa $\tilde{\kappa}_1 := \|A\|_1 \frac{\|y\|_1}{\|x\|_1}$, como a rotina SGECCO do LINPACK faz, é sempre majorada por κ_1 , pela definição da norma-1 matricial induzida.

Além disso, temos que essa estimativa é consistente (no sentido de que conforme a_n se torna mais significativa, melhor $\tilde{\kappa}_1$ tende a estimar κ_1 , dentro de um certo intervalo), pois conforme $\tilde{\kappa}_2$ é mais próximo de κ_2 , melhor $\tilde{\kappa}_1$ fica dentro do intervalo $[\frac{\kappa_2}{n} \dots n\kappa_2]$.

4.4 Modelos e resultados

Todos os modelos a seguir trabalham com diferentes metodologias na geração do vetor inicial d . Para cada um dos modelos, geramos duas tabelas – uma para o caso de matrizes construídas de modo que seus valores singulares são todos iguais entre si (a menos do último, que decai abruptamente, por isso o nome *Sharp Break*), e outra para o caso de matrizes construídas de forma que seus valores

singulares decaem uniformemente, de maneira exponencial (Exponential Decay) – reproduzindo os experimentos descritos em [25]. Essencialmente os valores das tabelas correspondem à razão (numéricamente estimada, com 5000 gerações) entre o número de condição estimado e o número de condição verdadeiro.

4.4.1 Geração aleatória – Construção “zero”

Geramos d aleatoriamente : $d = \text{randn}(n)$;

Tabela 1 *Sharp Break* com d aleatório

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.6786	0.7233	0.7294	0.7279
10	0.5616	0.6375	0.6447	0.6461
25	0.4264	0.5450	0.5555	0.5528
50	0.3301	0.4902	0.5040	0.5028

Tabela 2 *Exponential Decay* com d aleatório

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.5514	0.6601	0.7100	0.7251
10	0.4044	0.4750	0.5610	0.6008
25	0.2766	0.3294	0.3817	0.4245
50	0.2081	0.2534	0.3001	0.3308

Este modelo apresenta bons resultados (acima do valor arbitrariamente escolhido de 0.2) em ambos os experimentos; comparando as tabelas geradas com as referentes aos experimentos originais [25], pode-se notar que a primeira coluna, em especial, apresenta resultados significativamente piores ($\kappa_2 = 10$) que os originais.

Isso se dá pelo fato de que, com $\kappa_2 = 10$, temos que a matriz não é mal-condicionada, e portanto, mesmo no caso ótimo de $\|x\|_2$ ser grande (que a geração aleatória de d nem sempre nos proporciona), temos que σ_n é muito similar aos demais valores singulares, e portanto tendemos a não ter grande representatividade de a_n em x (e portanto em y).

4.4.2 Primeira Construção

Como temos que $\|A\|_2 = \|R\|_2$, podemos desenvolver um método de construir d de maneira ótima para a estimativa do número de condição de A utili-

zando apenas R em nossas contas. Visto isso, chamamos atenção para o fato de que conforme $\|x\|_2$ cresce, maior o peso de α_n na construção de x , e portanto, maior será o peso do último vetor singular de U na construção de d , já que $\frac{1}{\sigma_n}$ é o maior dos fatores de x , e portanto, tendo um x grande, provavelmente teremos que a_n será também grande.

Portanto, queremos escolher d_i que maximize x_i , $\forall i$. Na resolução do sistema $R^t x = d$, temos que

$$r_{ss}x_s = d_s - (r_{1s}x_1 + \dots + r_{s-1,s}x_{s-1}).$$

Podemos fixar $d_i = \pm 1$, escolhendo o sinal para maximizar o valor de x_i , ou seja, $d_s = -\text{sign}(r_{1s}x_1 + \dots + r_{s-1,s}x_{s-1})$. Note que fazemos esta análise para todo $i > 1$ natural. Para $i = 1$, podemos assumir $d_1 = 1$ ou -1 sem perda de generalidade.

Contudo, na prática não trabalhamos com R , e sim com A (e a construção acima só vale para R , ainda que o resultado teórico sirva para A também, visto a igualdade das normas-2 de A e R). Para contornarmos isso, fazemos a decomposição LU de A : $A = LU$, e resolvemos o sistema $A^t x = d = U^t L^t x = d$, onde acabamos resolvendo dois sistemas triangulares: $U^t w = d$ e $L^t x = w$.

Para o primeiro sistema, fazemos a escolha de d a fim de maximizar a norma de w . Temos certa segurança que conforme a norma de w cresce, a norma de x também cresce, visto que usualmente o pivoteamento da fatoração LU nos assegura que o mau-condicionamento de A seja refletido em um mau-condicionamento de U .

Tabela 3 *Sharp Break*, 1ª construção

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.7215	0.7275	0.7316	0.7286
10	0.6222	0.6444	0.6438	0.6452
25	0.5028	0.5555	0.5552	0.5560
50	0.4146	0.4997	0.5044	0.5037

Tabela 4 *Exponential Decay*, 1ª construção

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.6352	0.6929	0.7249	0.7286
10	0.4559	0.5186	0.5863	0.6166
25	0.3061	0.3506	0.4071	0.4416
50	0.2279	0.2681	0.3132	0.3424

Como podemos ver, os resultados obtidos – em ambas as tabelas – são significativamente melhores que os obtidos quando escolhemos d de uma forma mais ingênua, especialmente na primeira coluna ($k_2 = 10$).

4.4.3 Segunda Construção

A primeira estratégia está propensa a falhar em certos exemplos específicos [2]. Contornamos tais dificuldades ao também analisar como nossa escolha de d_i afetaria os elementos seguintes; utilizando a primeira construção, podemos ter o caso em que, por exemplo, $d_2 = 1$ maximiza o valor de x_2 , mas uma outra escolha ($d_2 = -1$) maximizaria os valores seguintes de x . Visto isso, podemos remanejar nossa construção anterior :

$$r_{ss}x_s = (-r_{1s}x_1 - \dots - r_{k-1,s}x_{k-1}) + (-r_{ks}x_k - \dots - r_{s-1,s}x_{s-1} + b_s).$$

Denotamos a parte esquerda por p_s^{k-1} . Note então que $r_{ss}x_s = -p_s^{s-1} \pm 1$, ainda na estratégia anterior. Denotamos x_s^+ o valor de x_s tal que $d_s = 1$ e x_s^- o valor de x_s tal que $d_s = -1$.

Então, $p_s^k = p_s^{k-1} + r_{ks}x_k$, e denotamos então $p_s^{k+} = p_s^{k-1} + r_{ks}x_k^+$ e $p_s^{k-} = p_s^{k-1} + r_{ks}x_k^-$. Temos então uma maneira de analisar como x_s se comporta – para $s \in \{k+1, \dots, n\}$, conforme definimos o resultado de d_k ; nos é interessante então maximizar cada um desses p_s^k (em valor absoluto), de forma a maximizarmos os x_s à frente de x_k . Desta forma, temos o seguinte critério :

- Se $|-p_k^{k-1} + 1| + \sum_{i=k+1}^n |p_i^{k+}| \geq |-p_k^{k-1} - 1| + \sum_{i=k+1}^n |p_i^{k-}|$, então $d_k = 1$;
- Caso contrário, $d_k = -1$.

Tabela 5 *Sharp Break*, 2ª construção

$n \backslash k_2$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.7228	0.7275	0.7290	0.7259
10	0.6268	0.6440	0.6429	0.6428
25	0.5114	0.5568	0.5550	0.5549
50	0.4227	0.5007	0.5035	0.5024

Tabela 6 *Exponential Decay*, 2^a construção

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.6543	0.7007	0.7264	0.7315
10	0.4670	0.5305	0.5922	0.6226
25	0.3135	0.3580	0.4097	0.4487
50	0.2305	0.2712	0.3178	0.3440

Temos, para esta construção, resultados um pouco melhores que os da primeira construção. Como o artigo original [25], também geramos histogramas referentes à estas tabelas (mas com mais gerações – 5000, ao invés de 25; não geramos histogramas para todos os pontos destas tabelas), apresentados no Apêndice.

4.4.4 Adendo na construção

Podemos gerar o vetor inicial $d_i = \pm\theta$, sendo que o sinal é determinado por alguma das construções acima, e $\theta \in \mathcal{U}(\frac{1}{2}, 1)$. Esta construção, citada em [2], está propensa a apresentar menos falhas de cancelamentos de valores (por utilizar valores aleatórios não-inteiros), até mesmo quando escolhemos o sinal utilizando a primeira construção supracitada.

Tabela 7 *Sharp Break*, 1^a construção com θ introduzido

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.7209	0.7310	0.7288	0.7275
10	0.6222	0.6474	0.6437	0.6433
25	0.5020	0.5525	0.5555	0.5561
50	0.4159	0.5004	0.5039	0.5038

Tabela 8 *Exponential Decay*, 1^a construção com θ introduzido

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.6345	0.6897	0.7225	0.7258
10	0.4558	0.5171	0.5866	0.6165
25	0.3057	0.3522	0.4053	0.4409
50	0.2273	0.2687	0.3139	0.3431

Tabela 9 *Sharp Break*, 2ª construção com θ introduzido

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.7243	0.7289	0.7280	0.7280
10	0.6237	0.6427	0.6423	0.6462
25	0.5106	0.5537	0.5554	0.5571
50	0.4272	0.5007	0.5044	0.5016

Tabela 10 *Exponential Decay*, 2ª construção com θ introduzido

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.6352	0.6929	0.7249	0.7286
10	0.4558	0.5186	0.5828	0.6166
25	0.3061	0.3506	0.4071	0.4416
50	0.2272	0.2681	0.3153	0.3424

4.4.5 Importância da distribuição de Haar de U e V

Finalmente, investigamos com certo afino o grau de importância da distribuição de Haar das matrizes U e V , na geração das matrizes de teste, i.e. averiguamos os resultados estatísticos do estimador para matrizes $U\Sigma V^t$, sem termos que U e V são Haar-distribuídos. Geramos U e V através da fatoração QR comum do GNU Octave. Neste experimento, trabalhamos com o estimador SGECO com a segunda construção.

Tabela 11 *Sharp Break*, 2ª construção sem distribuição de Haar nas construções matriciais

$\begin{matrix} \kappa_2 \\ n \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.7246	0.7284	0.7280	0.7283
10	0.6272	0.6453	0.6438	0.6440
25	0.5107	0.5538	0.5536	0.5559
50	0.4262	0.5012	0.5053	0.5034

Tabela 12 *Exponential Decay*, 2^a construção sem distribuição de Haar nas construções matriciais

$\begin{matrix} \backslash & \kappa_2 \\ n & \end{matrix}$	10	10^2	10^4	10^6
5	0.6550	0.7011	0.7249	0.7293
10	0.4687	0.5299	0.5933	0.6204
25	0.3128	0.3583	0.4081	0.4447
50	0.2299	0.2703	0.3175	0.3468

4.5 Notas

- Pelo que testamos, os dados calculados em praticamente todos os experimentos apresentam uma considerável variância (especialmente a partir da terceira casa decimal), mesmo quando trabalhamos com 10000 gerações. Visto isso, julgamos que uma análise comparativa entre os experimentos deve considerar (com alta significância) apenas as duas primeiras casas decimais, com ênfase na primeira. Uma análise mais detalhada (mas sem fortes inferências numéricas) acerca do comportamento da média e variância, sob variações de valores pré-determinados (e.g a dimensão n , ou κ_2 fixo) pode ser encontrada no Apêndice.
- Note que o adendo aos métodos construtivos (com o fator θ envolvido) não nos trouxe muitos benefícios, pelos resultados apresentados. Contudo, note que esta construção adicional serve para nos auxiliar em problemas que não são bem representados em nossos experimentos; como discutido em [2], este adendo nos traz benefícios em alguns casos particulares, com experimentos com matrizes de estruturas específicas – as quais usualmente possuem elementos distribuídos de forma mais discreta que os elementos presentes nas matrizes de teste de nossos experimentos.

5 Conclusões Finais

Deixamos aqui algumas possíveis conclusões acerca da importância que o campo de Matrizes Aleatórias pode possuir, para um analista numérico :

- Os resultados associados à primeira classe de experimento nos faz alusão a uma taxonomia de distribuições de autovalores/valores singulares, associadas diretamente às distribuições das matrizes em si – em continência a conjuntos específicos de matrizes aleatórias. Estas distribuições podem possuir certa pertinência, sob análises algorítmicas numéricas (e.g. algum método que estima o maior autovalor de uma matriz quadrada), ou soluções numéricas para certos problemas que utilizam diretamente esses valores associados;

- Os resultados associados à segunda classe de experimentos nos revela o cuidado que devemos ter em relação à geração de certas estruturas de dados (convenientes para o problema numérico em questão) utilizando os algoritmos comuns disponíveis;
- Os resultados associados à terceira classe de experimentos sinalizam a importância da ciência do analista numérico, em relação a resultados e construções pertencentes ao campo das matrizes aleatórias, para a qualidade – e capacidade de inferência para um certo grupo de testes geral – de seu método numérico. Ainda que não tenhamos chegado em fortes conclusões estatísticas numericamente, consideramos a plausibilidade de sua existência, visto a não-uniformidade dos conjuntos de matrizes de teste.

Estas conclusões nos revelam duas importantes peculiaridades gerais a respeito do campo de Matrizes Aleatórias :

- Sua qualidade : a capacidade de prever, sob condições iniciais adequadas, variados comportamentos referentes às matrizes do problema numérico em questão. Consideramos a plausibilidade da existência de sortidos algoritmos numéricos que se beneficiem destas previsões, de alguma forma.
- Seu “defeito” : a capacidade de influenciar resultados cujas origens podem parecer elusivas para analistas numéricos ingênuos – em relação à importância da aleatoriedade das matrizes do problema numérico em questão. Tais influências podem obstruir inferências que este analista numérico poderia fazer para seu algoritmo.

É importante ressaltar que muitos outros experimentos referentes a diversos tópicos de interesse do campo de matrizes aleatórias poderiam imbuir conclusões similares. Destacamos pesquisas referentes às distribuições convergentes de autovalores de potências de matrizes unitárias Haar-distribuídas, para dimensões finitas [23], às possíveis aplicações de projeções aleatórias no contexto de redução de dimensionalidade, em aprendizado de máquina [16], a algoritmos de geração uniforme de elementos pertencentes a grupos compactos [5] e à distribuição de autovalores de matrizes cujos elementos são *i.i.d.* com média nula e variância finita [10].

Referências

- [1] BUMP D. *Lie Groups 2e* Springer, New York 2004
- [2] CLINE A. K., MOLER C. B., STEWART G. W. and WILKINSON J. H. *An Estimate for the Condition Number of a Matrix* SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 16, No. 2, 1979
- [3] DIACONIS, P. *Patterns in Eigenvalues : The 70th Josiah Willard Gibbs Lecture* Bulletin of the American Mathematical Society Vol. 40(2) 155-178 2003

- [4] DIACONIS, P. e SHAHSHAHANI, M. *On the Eigenvalues of Random Matrices* SIAP Journal of Applied Probability Vol. 31, Studies in Applied Probability 49-62 1994
- [5] DIACONIS, P. e SHAHSHAHANI, M. *The Subgroup Algorithm for Generating Uniform Random Variables* Probability in the Engineering and Informational Sciences Vol. 1(1) 15-32 1987
- [6] DRAPER, N. R. e SMITH, H. *Applied Regression Analysis 3e* Wiley, Nova Jersey 1998
- [7] EDELMAN, A. *Eigenvalues and Condition Numbers of Random Matrices* Massachusetts Institute of Technology, 1989
- [8] EDELMAN, A. e RAO, N. *Random Matrix Theory* Acta Numerica 1-65 2005
- [9] FÜREDI, Z. e KOMLÓS J. *The Eigenvalues of Random Symmetric Matrices* Combinatorica 1(3) 233-241 1981
- [10] GIRKO, V.L. *The Circular Law* Teor. Veroyatnost. i Primenen Vol. 29(4) 669-679 1984
- [11] HIGHAM, N.J *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms 2ed* SIAM Philadelphia 2002
- [12] JUHASZ, F. *On the Spectrum of a Random Graph* Algebraic Methods in Graph Theory Vol. 25 313-316 1978
- [13] <https://www.gnu.org/software/octave/>
- [14] MARCENKO, V. A. e PASTUR, L. A. *Distribution of Eigenvalues for some sets of Random Matrices* Math. USSR Sb Vol. 1(4) 457-483 1967
- [15] <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
- [16] MECKES, E. *Concentration of Measure and the Compact Classical Matrix Groups* Encontrado em https://case.edu/artsci/math/esmeckes/Haar_notes.pdf
- [17] MEHTA, M.L. *Random Matrices 3ed* Elsevier, San Diego 2004
- [18] MEZZADRI, F. *How to Generate Random Matrices from the Classical Compact Groups* Notices of the AMS Vol. 54(5) 592-604 2007
- [19] MUIRHEAD, J.R *Aspects of Multivariate Statistical Theory* Wiley, Nova Jersey 1982
- [20] NADAL, C. e MAJUMDAR, S.N *A simple derivation of the Tracy–Widom distribution of the maximal eigenvalue of a Gaussian unitary random matrix* University of Paris 2011

- [21] OZOLS, M. *How to generate a random unitary matrix* Encontrado em [http://home.lu.lv/~sd20008/papers/essays/Random%20unitary%20\[paper\].pdf](http://home.lu.lv/~sd20008/papers/essays/Random%20unitary%20[paper].pdf) 2009
- [22] <https://www.r-project.org/>
- [23] RAINS, E. M. *High powers of random elements of compact Lie groups* Probability Theory Related Fields 107 219-241 1997
- [24] RAO, C. R. *Matrix Derivatives: Applications in Statistics* Encyclopedia of Statistical Sciences Vol. 5 320-323 2005
- [25] STEWART, G.W. *The Efficient Generation of Random Orthogonal Matrices with an Application to Condition Estimators* SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 17(3) 403-409 1980
- [26] TAO, T. *Topics in random matrix theory* American Mathematical Society 2012
- [27] TRACY, C.A e WIDOM, H. *The Distributions of Random Matrix Theory and their Applications* Springer, Dordrecht 2009
- [28] WIGNER, E.P. *On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices.* Ann. of Math. 67 325-327 1958

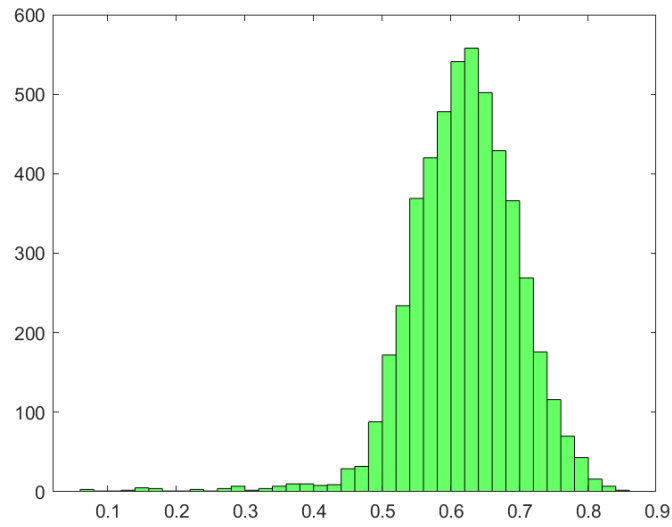
A Análise de métricas estatísticas para diferentes modelos estimadores de $\tilde{\kappa}_1$

Apresentamos alguns histogramas, acompanhados de métricas estatísticas para os valores calculados referentes à diferentes modelos de estimativa, variando certos valores pré-determinados (dimensão n das matrizes geradas, e valor fixado de κ_2), em prol de analisar as consequências decorrentes de variações destes valores, para os diferentes modelos.

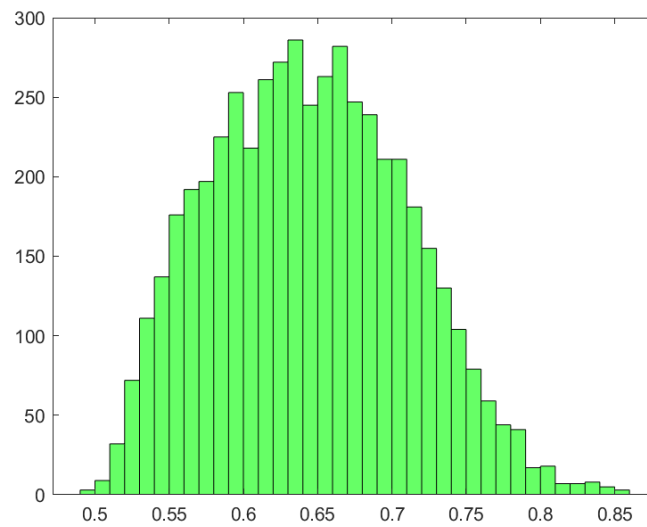
Os experimentos foram construídos aos moldes estruturais declarados neste relatório. Devido à quantidade de imagens, decidimos não incluir os resultados destes experimentos no relatório em si, preferindo a apresentação destes neste Apêndice.

A.1 1ª Construção

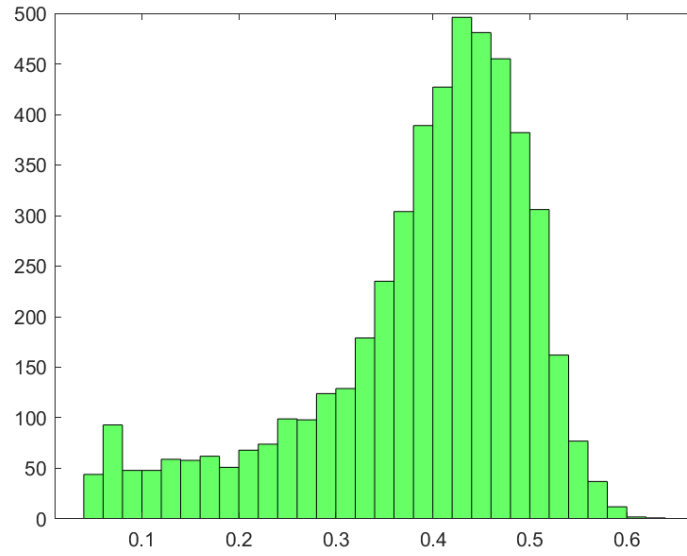
A.1.1 *Sharp Break*



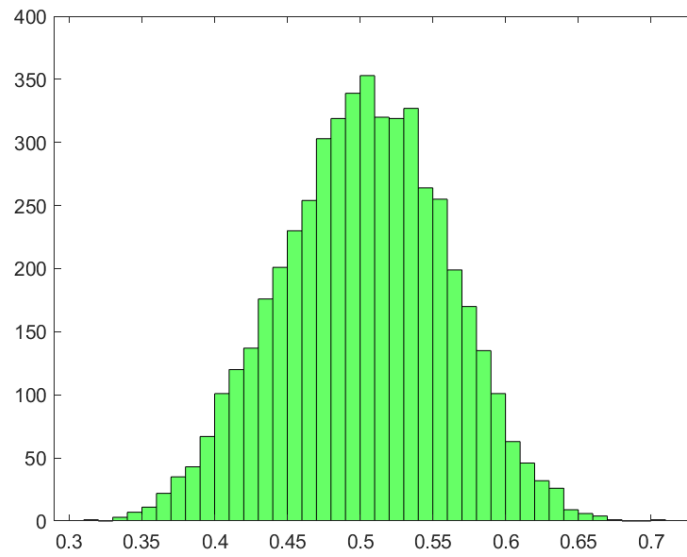
(1) Histograma para a 1ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10$



(2) Histograma para a 1ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10^4$



(3) Histograma para a 1ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10$



(4) Histograma para a 1ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10^4$

Tabela 13 1ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.622230513899694
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.006023148883973

Tabela 14 1ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10^4$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.643889922486238
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.004316626159772

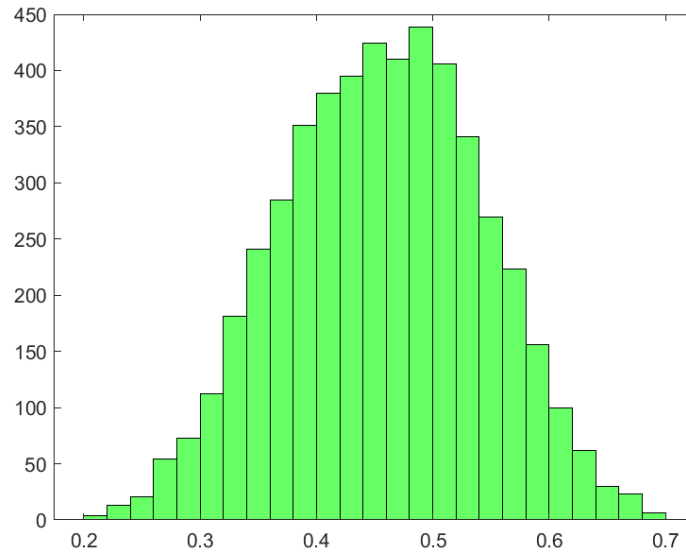
Tabela 15 1ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.414616614340074
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.013303072092935

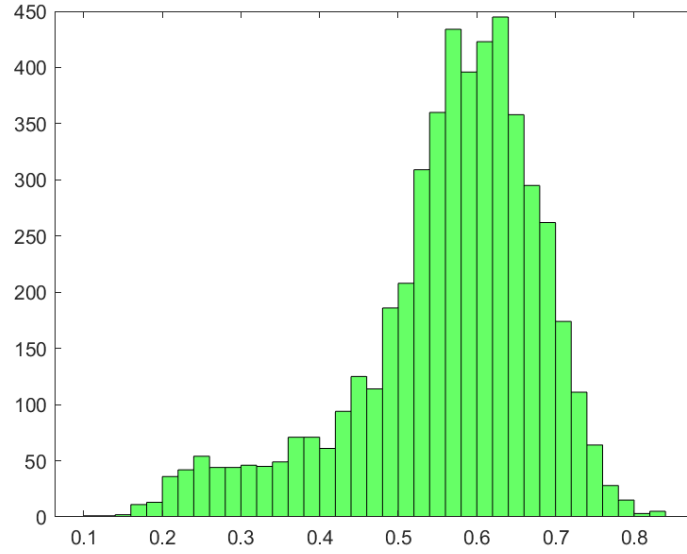
Tabela 16 1ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10^4$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.504435759663710
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.003223532218982

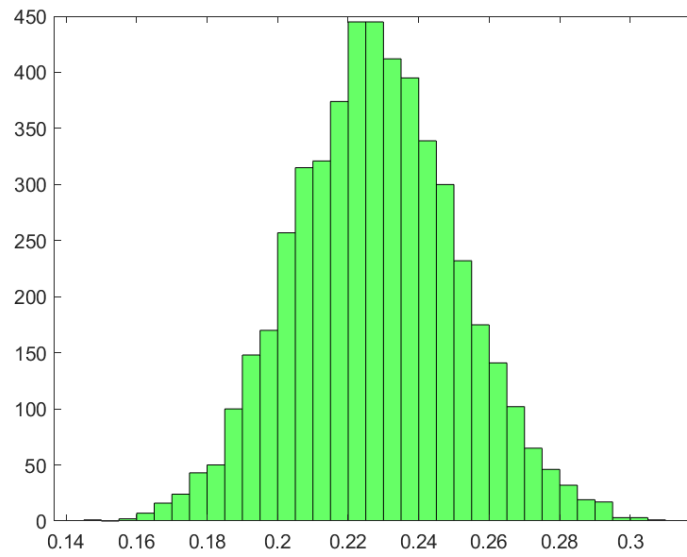
A.1.2 Exponential Decay



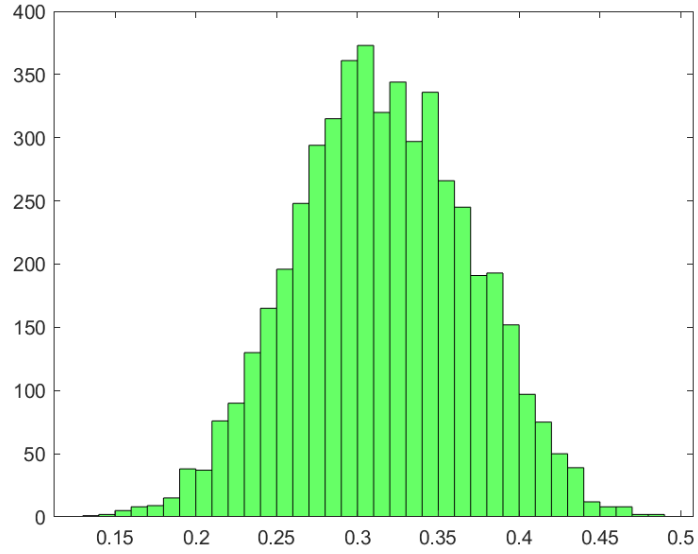
(5) Histograma para a 1ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10$



(6) Histograma para a 1ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10^4$



(7) Histograma para a 1ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10$



(8) Histograma para a 1ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10^4$

Tabela 17 1ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.455948152241144
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.006910438138477

Tabela 18 1ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10^4$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.585371725594647
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.013605932015569

Tabela 19 1ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10$

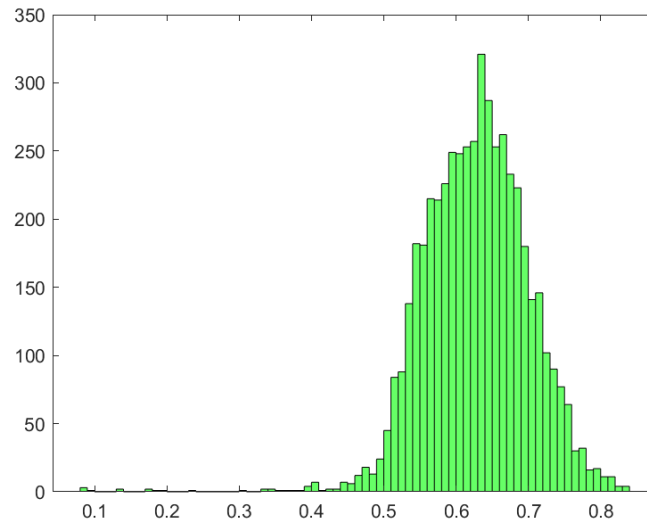
$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.227963192104588
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	5.312889245364600e-04

Tabela 20 1ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10^4$

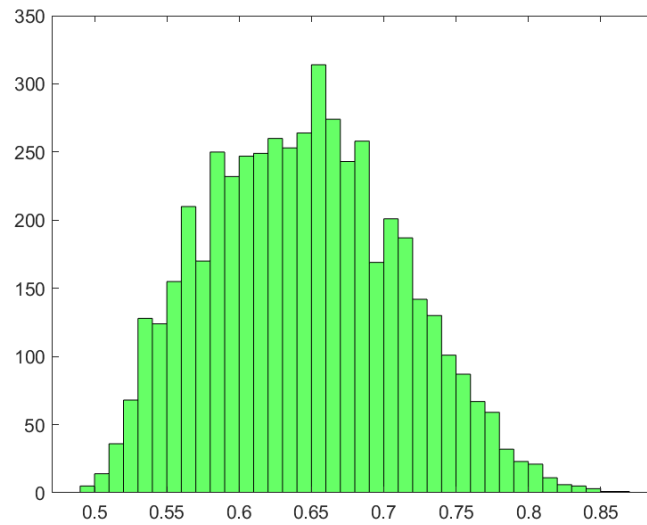
$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.313211396733515
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.003024493682851

A.2 2ª Construção

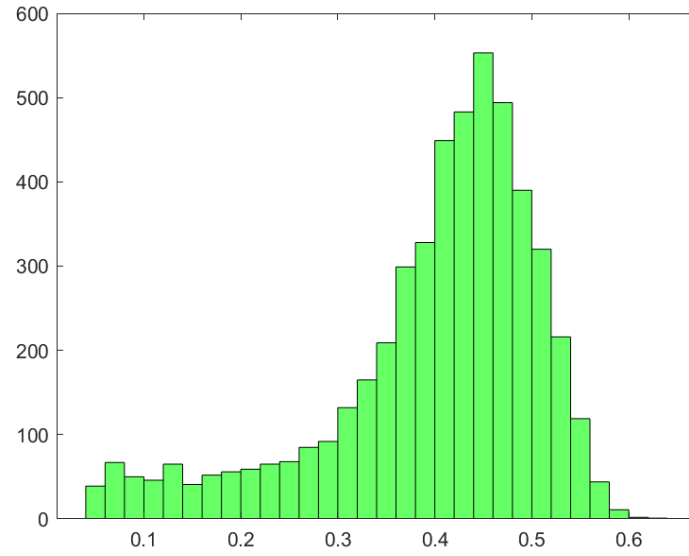
A.2.1 *Sharp Break*



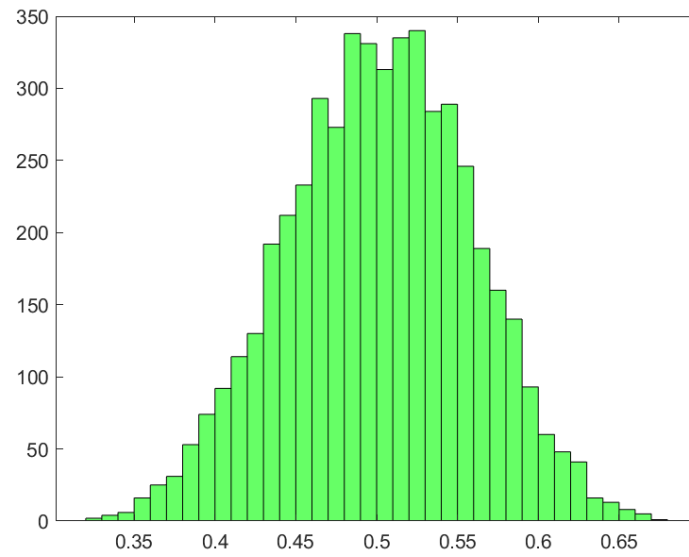
(9) Histograma para a 2ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10$



(10) Histograma para a 2ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10^4$



(11) Histograma para a 2ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10$



(12) Histograma para a 2ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10^4$

Tabela 21 2ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.626872719869447
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.005141154380046

Tabela 22 2ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10^4$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.642967415084766
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.004449246938476

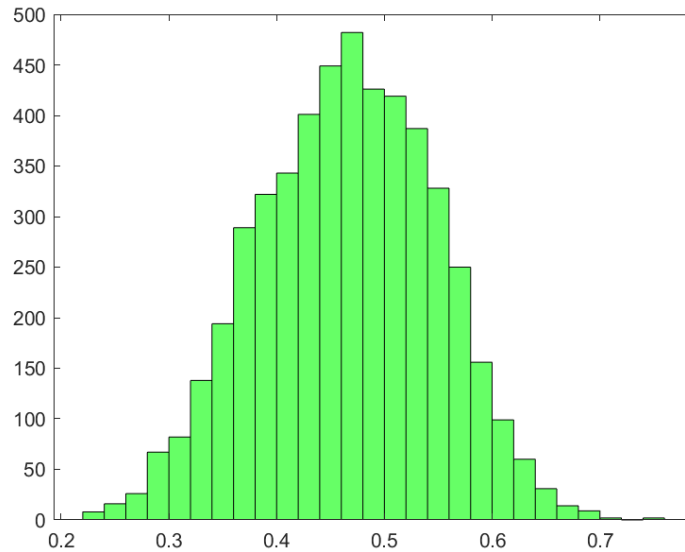
Tabela 23 2ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.422740967632164
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.012556226558311

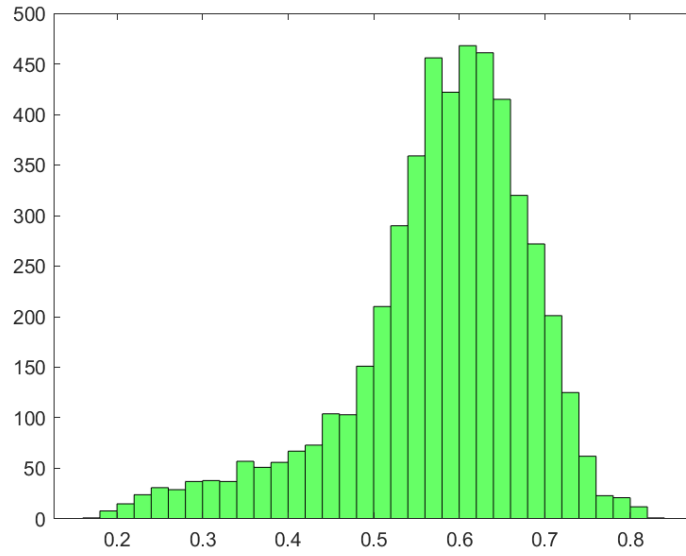
Tabela 24 2ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10^4$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.503589379693551
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.003295657688717

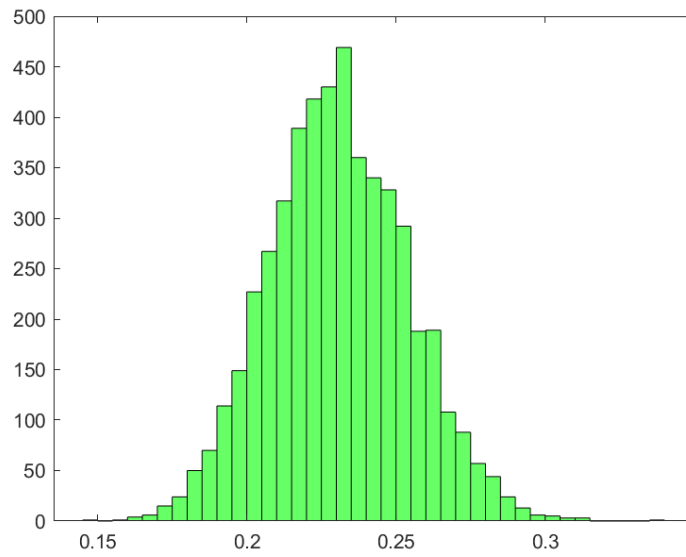
A.2.2 Exponential Decay



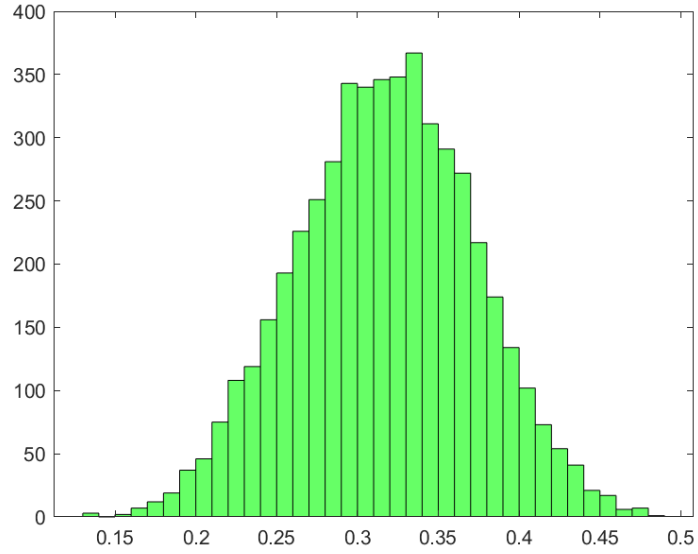
(13) Histograma para a 2ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10$



(14) Histograma para a 2ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10^4$



(15) Histograma para a 2ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10$



(16) Histograma para a 2ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10^4$

Tabela 25 2ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.467051568930024
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.006688469531355

Tabela 26 2ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10^4$

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.592293452315319
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.012457236269444

Tabela 27 2ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10$

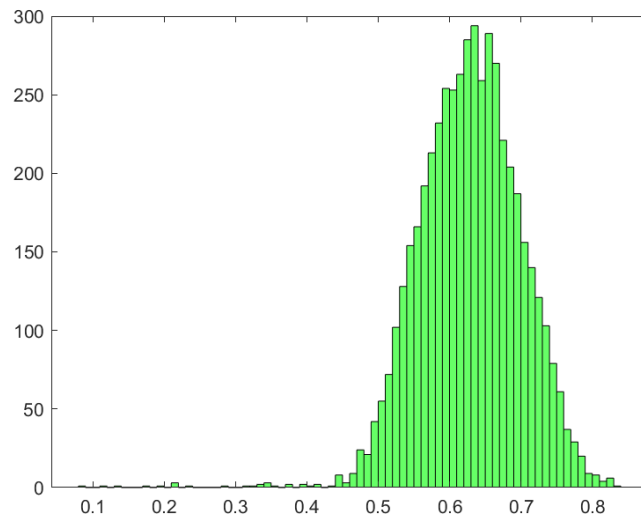
$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.230532656175301
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	5.540703186515201e-04

Tabela 28 2ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10^4$

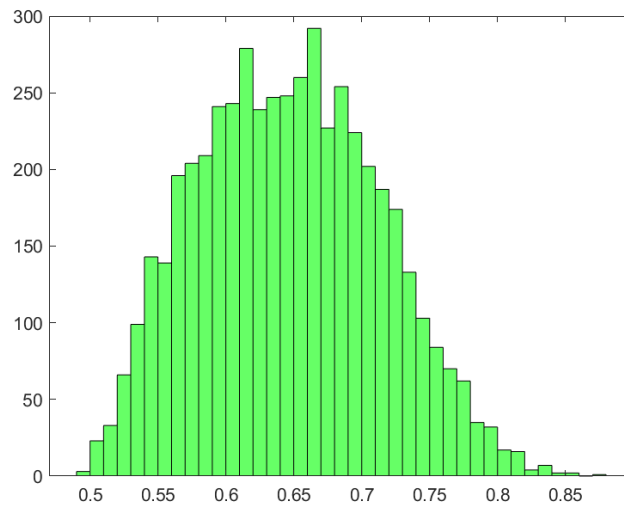
$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.317847532593647
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.002950986489196

A.3 2ª Construção, sem matrizes Haar-distribuídas

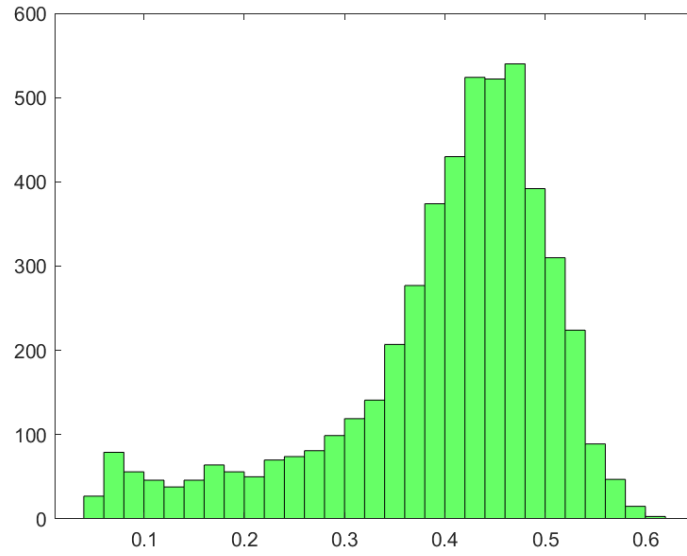
A.3.1 *Sharp Break*



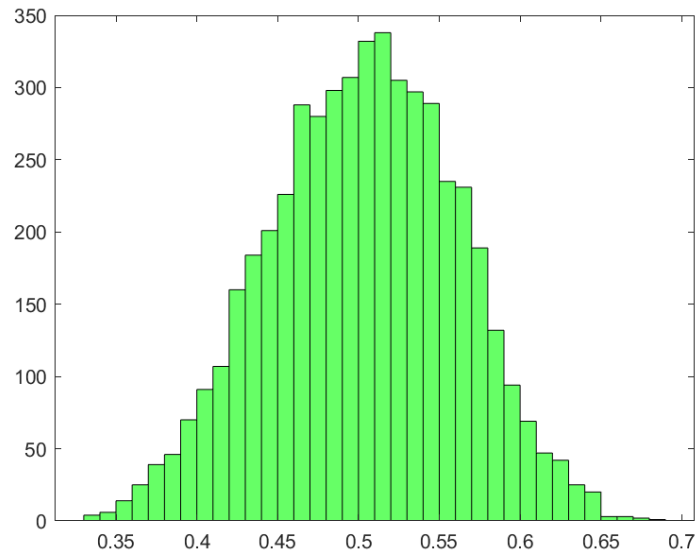
(9) Histograma para a 2ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10$, sem distribuição de Haar



(10) Histograma para a 2ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10^4$, sem distribuição de Haar



(11) Histograma para a 2ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10$, sem distribuição de Haar



(12) Histograma para a 2ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10^4$, sem distribuição de Haar

Tabela 29 2ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10$, sem distribuição de Haar

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.627257400057583
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.004875496057586

Tabela 30 2ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10^4$, sem distribuição de Haar

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.643843473452889
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.004234676823831

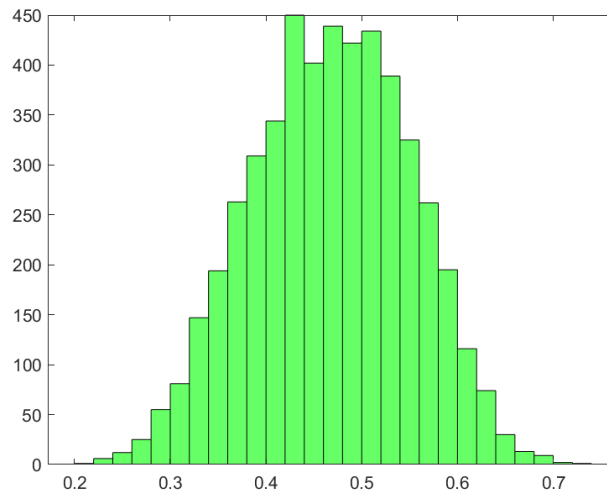
Tabela 31 2ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10$, sem distribuição de Haar

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.426252794328702
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.012312124125191

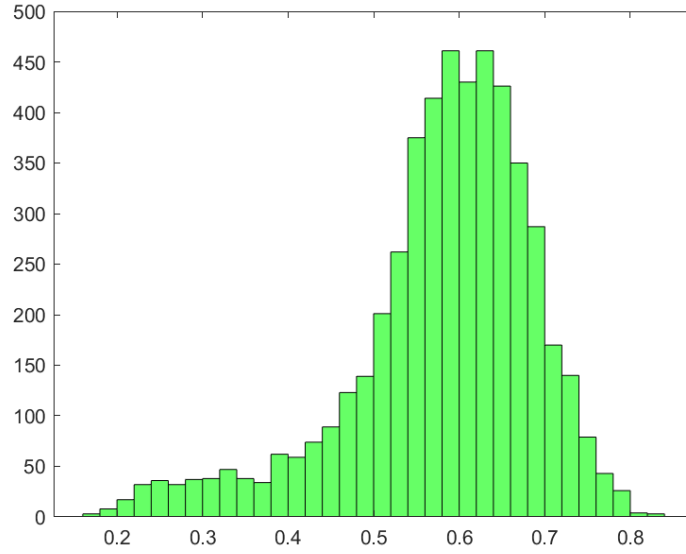
Tabela 32 2ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10^4$, sem distribuição de Haar

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.505341243149970
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.003247789220425

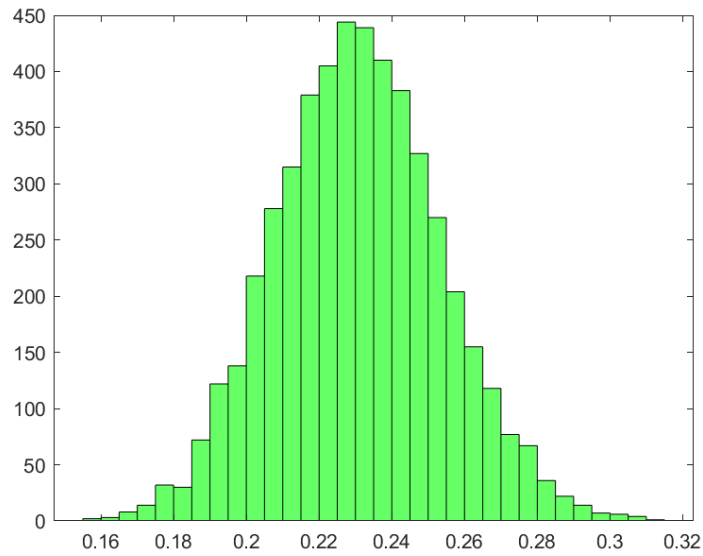
A.3.2 Exponential Decay



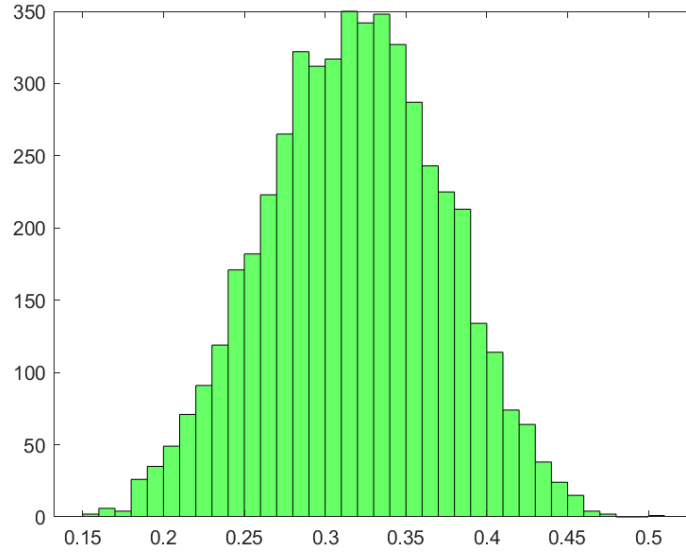
(13) Histograma para a 2ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10$, sem distribuição de Haar



(14) Histograma para a 2ª construção, com $n = 10$ e $\kappa_2 = 10^4$, sem distribuição de Haar



(15) Histograma para a 2ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10$, sem distribuição de Haar



(16) Histograma para a 2ª construção, com $n = 50$ e $\kappa_2 = 10^4$, sem distribuição de Haar

Tabela 33 2ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10$, sem distribuição de Haar

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.468775062200278
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.007000220260965

Tabela 34 2ª construção, $n = 10$, $\kappa_2 = 10^4$, sem distribuição de Haar

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.593333034849308
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.012377371445676

Tabela 35 2ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10$, sem distribuição de Haar

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.229974934773920
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	5.259905488571673e-04

Tabela 36 2ª construção, $n = 50$, $\kappa_2 = 10^4$, sem distribuição de Haar

$\mu(\tilde{\kappa}_1)$	0.317531984783971
$\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$	0.002957017585541

A.4 Discussão

Inspecionando os resultados apresentados, podemos formular algumas conjecturas referentes aos comportamentos estatísticos (sob análises variacionais individuais de cada métrica) dos estimadores em questão.

- Em ambas as construções algorítmicas, e para ambas construções matriciais (*Sharp Break* e *Exponential Decay*), a média calculada $\mu(\tilde{\kappa}_1)$ aumentou, conforme aumentamos o valor fixo de κ_2 nas matrizes de geração, e diminuiu conforme aumentamos a dimensão n das matrizes geradas.
- Em ambas as construções algorítmicas, e para a construção matricial *Sharp Break*, com $\kappa_2 = 10$, temos que o aumento de n (de 10 para 50) nos trouxe um crescimento da variância $\sigma^2(\tilde{\kappa}_1)$ dos dados gerados; o fenômeno não se repete para $\kappa_2 = 10^4$, sendo que neste caso a variância diminuiu, conforme aumentamos a dimensão.

Em relação à construção matricial *Exponential Decay*, temos que o aumento de n sempre nos traz uma redução no valor da variância, independente do valor fixado para κ_2 .

- No geral, as duas construções algorítmicas possuíram comportamentos (em relação à variância das métricas e da estrutura dos histogramas) similares (com resultados relativamente melhores para a segunda construção – maiores médias e menor variância).
- Em relação às estruturas dos histogramas gerados, para a construção matricial *Sharp Break* :

Para $n = 10$ e $\kappa_2 = 10$, vemos que o histograma é, em maior parte, simétrico (com comportamento visual que remete a uma gaussiana), mas possui alguns *outliers* à esquerda;

– Para $n = 10$ e $\kappa_2 = 10^4$, vemos que o histograma possui um comportamento visual similar à distribuição χ^2 com cerca de 10 ou mais graus de liberdade, devido à cauda direita alongada;

– Para $n = 50$ e $\kappa_2 = 10$, é possível ver que o histograma possui comportamento similar ao caso de $n = 10$ e $\kappa_2 = 10$, mas com a cauda esquerda mais proeminente e perceptível;

– Para $n = 50$ e $\kappa_2 = 10$, podemos ver que o histograma possui um comportamento visual que remete a uma gaussiana, assim como o caso similar de dimensão menor (mas com baixa presença de *outliers*).

- Em relação às estruturas dos histogramas gerados, para a construção matricial *Exponential Decay* :

– Para $n = 10$ e $\kappa_2 = 10^4$, temos que o comportamento visual do histograma se assemelha a uma gaussiana com cauda esquerda alongada;

– Para o restante dos experimentos, os comportamentos visuais dos histogramas todos se assemelham a distribuições normais.

- Perante os resultados referentes à 2ª construção sem a distribuição de Haar em U e V na geração das matrizes de teste, não podemos atestar nenhuma forte conclusão acerca da ausência desta distribuição, para nenhuma das diferentes construções matriciais. Consideramos a plausibilidade da existência de uma diferença estatística gerada por esta ausência, como resultado inferido pela não-uniformidade dos conjuntos de matrizes de teste.