UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Problema de Corte de Estoque Unidimensional

UNICAMP

Lucas Gennari Vassalo

Campinas 2018

SUMÁRIO

1 Introdução

Com o aumento da demanda de produtos industrializados, uma nova questão surge entre as grandes fábricas: como aperfeiçoar os processos a fim de se minimizar os custos de produção. Neste contexto surgem os primeiros modelos matemáticos de dimensionamento de lotes de produção, que buscam determinar o tamanho dos lotes a serem produzidos em uma ou mais máquinas dentro de um período de tempo de planejamento finito. Surgem também os problemas de corte unidimensional, como uma extensão do problema de dimensionamento de estoques, que consiste em determinar a melhor forma de cortar peças maiores, que comumente chamamos de objetos, em itens menores de modo que as perdas desses objetos sejam mínimas buscando, desta forma, a melhor maneira de realizar cortes de tamanhos diferentes em um mesmo objeto.

Problemas que integram esses dois modelos estão presentes em indústrias de móveis, papel, metalúrgicas, estruturas, entre outros, em que o processo de corte está presente.

2 O problema de corte de estoque

Quando se resolve um problema de corte de estoque espera-se determinar a melhor maneira de se cortar itens menores, a partir de objetos maiores. Esses itens possuem dimensões bem especificadas e precisam atender a uma certa demanda.

Desta forma nosso objetivo pode ser minimizar os custos de produção ou custos com material, minimizar a quantidade de material descartado ou, por exemplo, maximizar os lucros.

O primeiro trabalho nesta área é de Kantorovich, que veio ao conhecimento do Ocidente somente depois de sua publicação em inglês em 1960. A partir de então, muitos trabalhos foram publicados, como os trabalhos de Gilmore e Gomory [1] e [2] provavelmente os mais repercutidos até os dias de hoje.

Ainda, podemos dividir os problemas (de corte de estoque) em:

- *<u>Problema Unidimensional</u>*: quando se realiza cortes em tubos de aço, tubos de plástico, bobinas de papel ou tecido, onde somente o comprimento é a medida relevante no processo; itens que possuem somente o comprimento menor que o objeto.
- *<u>Problema Bidimensional</u>*: quando se realiza cortes em chapas de metal ou MDF, por exemplo, espera-se obter itens de comprimento e largura diferentes do objeto. Logo

ambas dimensões são relevantes para o problema, pois esses itens possuem comprimento e largura menores do que o objeto.

- *Problema Tridimensional*: quando se realiza cortes nas três dimensões do objeto, gerando itens com o comprimento, largura e altura menores que o mesmo. Pode-se utilizar a mesma ideia para o problema de alocar objetos dentro de um contêiner, por exemplo. Neste caso obtém-se a melhor maneira de se encaixar esses itens dentro do objeto de forma a ocupar o maior espaço disponível.

É evidente que se trata de um problema de grande importância, presente constantemente no setor industrial e realmente interessante, devido à sua complexidade computacional.

2.1 O modelo de Gilmore e Gomory

Nesta seção apresenta-se o modelo de Gilmore e Gomory [1] e [2] que é amplamente utilizado até os dias atuais.

Definição: A maneira como os objetos em estoque é cortada para a produção de itens menores é chamado de padrão de corte. Está associado a um padrão de corte o vetor m-dimensional que contabiliza os itens produzidos:

$$\alpha_i = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

Onde α_i é a quantidade de itens do tipo i produzidos no padrão de corte.

Se um padrão de corte possui somente itens de um certo tipo, chamamos o mesmo de padrão de corte homogêneo.

Gilmore e Gomory [1] e [2] formularam o problema por programação inteira, de forma que as colunas do problema representam os padrões de corte. Desta forma, existem basicamente duas etapas para a modelagem do problema de corte de estoque:

- Definir todos os padrões de corte possíveis
- Definir quantas vezes cada padrão de corte será utilizado de forma a atender a demanda

Modelo GG

$$minimizar \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\begin{aligned} &\textit{sujeito a} \\ &\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = d_i && i = 1, \ldots, m \\ &x_j \in \mathbb{Z}+ && j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

A função objetivo minimiza a quantidade de objetos cortados. As restrições garantem o atendimento da demanda e definem o domínio das variáveis de decisão x_j , $j = 1, \ldots, n$ que é o número de objetos cortados segundo o padrão *j*.

Para o problema de corte unidimensional, encontramos os possíveis padrões de corte resolvendo todas as inequações abaixo:

$$\begin{aligned} &l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_m\alpha_m \leq L \\ &\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m \quad e \quad inteiro. \end{aligned} \tag{1}$$

Onde α_i é a quantidade de itens do tipo i utilizados no padrão de corte, l_i é o tamanho do item i e L o tamanho do objeto.

Como será apresentado a seguir, um padrão de corte é a solução do conhecido problema da mochila (Martello e Toth, 1990), e assim espera-se encontrar todos as soluções desse problema associado.

Portanto, o problema de corte unidimensional resume-se em encontrar todos os padrões de corte, que são soluções do problema da mochila associado, e então resolver o problema inteiro que consiste em encontrar entre todos os padrões de corte possíveis, aqueles que minimizam a quantidade de objetos utilizados.

2.2 Problema da Mochila

Esse problema clássico da literatura surgiu da seguinte ideia: imagine que você irá realizar uma certa viagem e precisa preparar sua mochila a partir de uma lista de itens com valores de utilidade diferentes. Sua mochila é limitada (em capacidade de carga ou volume) e você deseja escolher os itens utilizando da melhor forma o espaço disponível em sua mochila, maximizando seu valor de utilidade.

Esta é a ideia abordada pelo Problema da Mochila. Existem algumas maneiras de formulá-lo matematicamente; para o problema de corte de estoque unidimensional utiliza-se a formulação do Problema da Mochila Inteiro e Restrito; busca-se soluções inteiras que, por sua vez, estão restritas às quantidades de cada item disponíveis.
Define-se: m como o número de tipos de itens, v_i e p_i o valor de utilidade e o peso (ou tamanho), respectivamente do item i, sendo $i = 1, 2, \ldots, m$. Seja L a capacidade da mochila; obtém-se a seguinte formulação:

$$\textit{maximizar} \qquad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i$$

$$\text{sujeito a:} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i x_i \leq L \\ 0 \leq x_i \leq d_i, x_i \text{ inteiro}, i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Onde x_i e d_i são, respectivamente, a quantidade de itens do tipo i inseridos na mochila e a quantidade de cada item i disponível.

2.3 Heurística Residual

Quando resolvemos um problema de corte de estoque buscamos soluções inteiras, porem essa condição de integralidade torna sua solução computacional difícil. Uma boa maneira de se contornar esse problema é relaxar a condição de x_j permitindo que o modelo linear encontre uma solução fracionaria. Isso torna o problema muito mais fácil de se resolver computacionalmente. Então utiliza-se de um método heurístico para obter a solução inteira a partir da solução fracionaria obtida.

Será implementada a heurística Residual Nova proposta por Poldi [5], onde confia-se na solução obtida pelo modelo de otimização linear, onde toda demanda é levada em conta na construção dos padrões de corte e à partir dessa solução encontramos uma solução inteira aproximada.

3 Métodos de Resolução

Como realizamos a relaxação do modelo linear proposto por Gilmore e Gomory [1] e [2], podemos utilizar o método simplex para a resolução do problema de corte de estoque. Para isso basta conhecer todos os padrões de corte possíveis. Isto é muito difícil uma vez que o número de padrões de corte para um problema prático pode passar das dezenas de milhares e então determinar todos à *priori* é uma tarefa inviável. Assim Gilmore e Gomory [1] e [2] propuseram o método de geração de colunas para o simplex que consiste em resolver problemas da mochila associado obtendo novos padrões de corte a serem utilizados pelo problema. A seguir será apresentado um breve resumo sobre o método simplex para a introdução do método de geração de colunas.

3.1 Método Simplex

Um problema de programação linear é definido na forma:

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

Onde A é uma matriz real $m \times n$ e o posto de A é m, ou seja, existem n colunas linearmente independentes, formadas pelos padrões de corte homogêneos.

A solução geral do sistema pode ser descrita como uma partição básica composta por m colunas linearmente independentes e outra não-básica, $\mathrm{A} = [\mathrm{B}, \mathrm{N}]$.

Esta partição nas colunas da matriz A leva a uma partição nos vetores solução e custo relativo, $\mathrm{x} = [\mathrm{x}_B, \mathrm{x}_N]$ e $\mathrm{c} = [\mathrm{c}_B, \mathrm{c}_N]$. Rescrevendo o sistema obtemos:

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{d} \\ \mathbf{x}_B \geq 0, \quad \mathbf{x}_N \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Uma solução particular obtida por $\mathbf{x}_B^0 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$ e $\mathbf{x}_N^0 = \mathbf{0}$ é chamada solução básica. Se $\mathbf{x}_B^0 \geq 0$ dizemos que a solução é básica factível, além disso, se todas as variáveis básicas são positivas, dizemos que a solução é básica factível não-degenerada.
Reescrevendo a função objetivo obtemos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N \end{aligned}$$

Vemos que $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B^0$ é o valor da função objetivo para a solução básica. Definimos $\lambda = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ como o vetor das variáveis duais (vetor multiplicador simplex). Se $(c_j - \lambda^T a_j) \geq 0,\ j = 1, ..., n,$ então λ é uma solução básica dual-factível. Com isso a função objetivo em função das variáveis não-básicas é:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j \in \Gamma}(c_j - \lambda^T a_j)x_j,$$

Onde a_j corresponde a coluna j de A e T é o conjunto dos índices da matriz N (colunas não básicas de A).
O Método Simplex é definido como uma perturbação de apenas uma componente de $\mathrm{X_N}$ para alteração da solução básica. Como queremos minimizar $f(\mathbf{x})$ e $x_j \geq 0 \forall j \in \Gamma$, a componente x_k a ser perturbada é tal que $(c_k - \lambda^T a_k) < 0.$

Fazendo $x_k = \varepsilon \geq 0$ e $x_j = 0, \forall j \in \Gamma - k$, as variáveis básicas são alteradas resultando em uma nova solução dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{x}_B^0 + \varepsilon\mathbf{y} \\ \mathbf{x}_N &= \varepsilon\mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

E o valor da função objetivo é dado por :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + (c_k - \lambda^T a_k)\varepsilon,$$

Onde $\mathbf{y} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ e $\mathbf{e}_k = (0, ..., 1, ..., 0)^T$ com 1 na k-ésima componente.

Note que a direção $s = (\mathbf{y}, \mathbf{e}_k)^t$ define uma perturbação da solução básica e é chamada de direção simplex.

Para determinar o passo, o maior valor de ε, a l-ésima coluna de B é substituída pela k-ésima coluna de N. Esta nova partição é básica primal-factível, cuja solução básica associada é dada por $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \varepsilon^0\mathbf{s}.$

Podemos escolher qualquer k tal que $(c_k - \lambda^T a_k) < 0.$ Ou ainda podemos escolher a direção simplex com o menor custo relativo, mas para isso é necessário analisar todas as n colunas de A.

Assim, a nova base é dada substituindo a l-ésima coluna da matriz B pela k-ésima coluna da matriz não básica N.

3.2 Método Simplex com geração de Colunas

Como visto esse método foi proposto por Gilmore e Gomory [1] e [2] e consiste em gerar um nova coluna k, ou seja, um novo padrão de corte.

Procurar a variável x_k com o menor custo relativo, que é o mesmo que:

$$\mathbf{c}_k - \lambda^T\mathbf{a}_k = \min\{\mathbf{c}_j - \lambda^T\mathbf{a}_j, \quad j = 1, 2, ...\},$$

Onde λ é o vetor multiplicador simplex de uma determinada iteração.

Definimos a matriz básica inicial, como a matriz diagonal B (de padrões de corte homogêneos), tal que a quantidade seja:

$$b_{ii} = \min\left\{\left\lfloor\frac{L}{l_i}\right\rfloor, d_1\right\}, i = 1, ..., m,$$

Onde $\lfloor w \rfloor$ é o maior valor inteiro menor que w. Tomamos o mínimo para garantir que o padrão de corte inicial não exceda a demanda.

Por simplicidade, tomamos como objetivo a minimização de objetos cortados, o que leva a um vetor de custo $\mathbf{c} = (1, 1, 1, ..., 1)$, resultando em :

$$\min\{\mathbf{c}_j - \lambda^T \mathbf{a}_j\} = 1 - \max\{\lambda^T \mathbf{a}_j\}.$$

Assim obter, uma coluna não-básica que substituirá uma coluna básica, corresponde a resolver o problema de maximizar $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, onde o vetor $(a_1, a_2, ..., a_m)^T$ corresponde a um padrão de corte. Para que isso ocorra, basta satisfazer as restrições:

$$\begin{gathered} l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + ... + l_m\alpha_m \leq L \\ 0 \leq \alpha_i \leq d_i, i = 1, ..., m \quad e \quad inteiro. \end{gathered}$$

Resultando no modelo matemático:

$$\begin{array}{ll} maximizar & g(\mathbf{a}) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} \quad l_1 a_1 + l_2 a_2 + ... + l_m a_m \leq L \\ 0 \leq x_j \leq d_i, i = 1, ..., m \quad e \quad inteiro. \end{cases} \end{array}$$

Que como já visto é o problema da mochila. Desta forma, se o menor dos custos relativos não-negativos, ou seja, se $1 - g(\mathbf{a}) \geq 0$, podemos garantir que a solução do problema relaxado é ótima.

<u>Algoritmo:</u>

Dados: $\boldsymbol{L}$ tamanho do objeto, $\boldsymbol{l_i}$ e $\boldsymbol{d_i}$ o comprimento e a demanda de cada item, respectivamente.

<u>1° Passo:</u> *(Inicializar as variáveis)*

Gerar a matriz Básica **B**, diagonal, tal que suas colunas são padrões de corte homogêneos.

Faça PARE = 0

$2^{°}$ Passo: *(inicializa o método simplex)*

Enquanto PARE $== 0$

Faça

Determinar a solução básica: $\mathbf{Bx} = \mathbf{d}$

Determinar a solução dual: $\mathbf{B}^{t}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c_B}$

Resolver o Problema da Mochila:

$$\begin{array}{ll} maximizar & g(\mathbf{a}) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} l_1 a_1 + l_2 a_2 + \ldots + l_m a_m \leq L \\ 0 \leq x_j \leq d_i, i = 1, \ldots, m \quad e \quad inteiro. \end{cases} \end{array}$$

Se $1 - g(\alpha) \geq 0$ ***então***

A solução é ótima PARE == 1

Senão

Determinar as coordenadas básicas da direção Simplex:

$$\mathbf{By} = \boldsymbol{\alpha}$$

Determinar o tamanho do passo, para isso encontre k tal que:

$$\frac{\boldsymbol{x_k}}{\boldsymbol{y_k}} = \min\left\{\frac{\boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{y_i}} \;\middle|\; y_i > 0,\ i = 1{:}m\right\}$$

Atualize a base, substituindo a k-ésima coluna de $\mathbf{B}$ pelo vetor $\boldsymbol{\alpha}$, solução do Problema da Mochila.

FIM

FIM

3.3 Enumeração Implícita para o Problema da Mochila

O problema da mochila, como visto, é um problema combinatório e para sua solução tipicamente são propostos métodos enumerativos. Esses métodos consistem em enumerar todas as possíveis soluções e buscar dentre elas a desejada, dependendo do objetivo de seu modelo. Porém, isto é inviável para problemas reais. Assim foi proposto, também por Gilmore e Gomory [1] e [2], o método de resolução por enumeração implícita. Utilizando-se de busca em profundidade, enumera-se as possíveis soluções implicitamente a partir de limitantes inferiores, eliminando dessa forma, as que possuem os piores valores objetivos.

Algoritmo:

Dados: $\boldsymbol{L}$ tamanho da mochila, $\boldsymbol{p_i}$ e $\boldsymbol{v_i}$ o peso e o valor de utilidade de cada item i (lembrando que $\boldsymbol{v_i}$ equivale a $\boldsymbol{\lambda_i}$ obtido pela solução dual do método simplex com geração de colunas como já demonstrado e $\boldsymbol{p_i}$ que nesse caso equivale ao tamanho do item i) e por fim $\boldsymbol{d_i}$ a quantidade disponível de cada item, que no problema equivale a demanda de cada item.

1° Passo: *(Inicializar as variáveis e definir as mais valiosas)*

Faça $\theta_i = \frac{v_i}{p_i}$, $i = 1{:}\,m$, e reordene as variáveis de modo que $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_m$

Faça $v_{m+1} = 0,\ p_{m+1} = 1,$ G = 0, $g(\alpha) = 0$

2° Passo: *(definir a solução inicial do problema)*

Determine $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ de modo que:

$$\alpha_1 = min\left\{\left\lfloor\frac{L}{p_1}\right\rfloor, d_1\right\} \Rightarrow resta\ L - p_1\alpha_1$$

$$\alpha_2 = min\left\{\left\lfloor\frac{L - p_1\alpha_1}{p_2}\right\rfloor, d_2\right\} \Rightarrow resta\ L - p_1\alpha_1 - p_2\alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_m = min\left\{\left\lfloor\frac{L - \sum_{j=1}^{m-1} p_j\alpha_j}{p_m}\right\rfloor, d_m\right\}$$

3° Passo: *(Avaliar a solução obtida)*

Faça $g(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} v_i \alpha_i$

Se $\underline{G} \leq g(\alpha)$ então $\underline{G} = g(\alpha)$ e $\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}$

4° Passo: *(Teste de otimalidade e limitante superior)*

Determine o maior índice k tal que $\alpha_k \neq 0$

Se $\boldsymbol{\alpha} = 0$ então PARE e $\boldsymbol{\alpha}^*$ é a melhor solução

Caso contrário, calcule:

$$\overline{G} = v_1\alpha_1 + \ldots + v_k(\alpha_k - 1) + \frac{v_{k+1}}{p_{k+1}}(L - p_1\alpha_1 - \cdots - p_k(\alpha_k - 1))$$

5° Passo: *(Backtracking)*

Se $\overline{G} \leq \underline{G}$ então faça $\alpha_k = 0$ e volte ao **4° Passo**

Caso contrário, faça $\alpha_k = \alpha_k - 1$ e defina $\boldsymbol{\alpha}$ tal que:

$$\alpha_j = min\left\{\left\lfloor \frac{L - \sum_{i=1}^{j-1} p_i\alpha_i}{p_j}, d_j \right\rfloor\right\}, j = k+1, \ldots, m$$

E volte ao **3° Passo**.

FIM

Ao final do método temos então em $\boldsymbol{\alpha}^*$ a solução ótima para o problema e em $g(\alpha)$ o valor ótimo associado a essa solução.

3.4 Heurística Nova e Algorítmo Final

A heurística Nova, proposta por Poldi [5], é uma heurística residual que confia na solução do modelo de otimização linear, mais do que isso, confia na qualidade dos padrões de corte gerados, uma vez que toda a demanda é utilizada para obter a solução.

O modelo consiste em ordenar a solução x_i, $i = 1{:}\, m$, tal que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m$ e apostar que o padrão de corte associado ao x_1 (o mais utilizado) mereça uma maior atenção. Desta forma arredonda-se o valor de x_1 para cima, construindo uma nova solução $\mathbf{w}$ tal que $\mathbf{w} = (x_1, 0, 0, \dots, 0)$, lembrando que x_1 agora é um valor inteiro arredondado para cima e então testa-se a factibilidade do problema, ou seja, se a demanda não foi excedida.

Logo, se a solução for infactível, subtraímos x_1 em uma unidade e testamos novamente. Esse processo é realizado até que a demanda não seja mais ultrapassada.

Feito isso, repete-se o processo para a segunda componente de $\mathbf{x}$, ou seja x_2, obtendo agora uma outra solução $\mathbf{w} = (x_1, x_2, 0, \dots, 0)$, lembrando novamente que x_1 e x_2 são números inteiros. Este passo é repetido até que toda demanda seja atendida ou até que todas as componentes de $\mathbf{x}$ sejam analisadas.

Assim, é obtida uma nova solução $\mathbf{w}$ inteira calculada a partir da solução relaxada $\mathbf{x}$ resultante do método simplex com geração de coluna. Agora é retirada da demanda total a parte já atendida pela solução inteira. Desta forma, a demanda diminui, mas não necessariamente foi completamente atendida. Desta forma, seja $\mathbf{r}^0 = \mathbf{d}$ e $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \mathbf{w}^k\mathbf{B}^k$.

Onde $\mathbf{r}^k$ é o vetor chamado de resíduo, que na primeira iteração possui o mesmo valor da demanda e a cada iteração é diminuído na quantidade da demanda atendida. Desta forma, depois de j iterações o resíduo é anulado, ou seja $\mathbf{r} = 0$ e assim toda a demanda $\mathbf{d}$ é suprida e o problema acaba. Uma vez que a demanda é sempre finita, em algumas iterações obtém-se a resposta desejadas.

Logo, o método completo resume-se em j iterações e a cada iteração:

- Resolve-se o Método Simplex com Geração de Colunas e obtém-se a solução relaxada do problema
- Aplica-se a Heurística Nova e encontra-se a solução inteira associada
- Atualiza-se a demanda e testa se ainda há demanda a ser atendida. Quando for suprida o problema termina

Algoritmo:

Dados: L tamanho do objeto, l_i e d_i o comprimento e a demanda de cada item, respectivamente.

1° Passo: *(Inicializar as variáveis)*

Gerar a matriz Básica $\mathbf{B}$, diagonal, tal que suas colunas são padrões de corte homogêneos.

Faça PARE simplex = 0, PARE heurística = 0

2° Passo: *(inicializa o método simplex)*

Enquanto PARE heurística $==0$

Faça

Enquanto PARE simplex $==0$

Determinar a solução básica: $\mathbf{Bx} = \mathbf{d}$

Determinar a solução dual: $\mathbf{B}^t\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c_B}$

Resolver o Problema da Mochila: *(método de enumeração implícita)*

$$\begin{array}{ll} maximizar & g(\mathbf{a}) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} l_1 a_1 + l_2 a_2 + \ldots + l_m a_m \leq L \\ 0 \leq x_j \leq d_i, i = 1, \ldots, m \quad e \quad inteiro. \end{cases} \end{array}$$

Se $1 - g(\alpha) \geq 0$ ***então***

A solução é ótima PARE simplex == 1

Senão

Determinar as coordenadas básicas da direção Simplex:

$$\mathbf{By} = \boldsymbol{\alpha}$$

Determinar o tamanho do passo, para isso encontre k tal que:

$$\frac{x_k}{y_k} = \min\left\{\frac{x_i}{y_i} \;\middle|\; y_i > 0,\ i = 1{:}m\right\}$$

Atualize a base, substituindo a k-ésima coluna de $\mathbf{B}$ pelo vetor $\boldsymbol{\alpha}$, solução do Problema da Mochila.

FIM

FIM

4º Passo: *(método heurístico)*

Determine a solução $\mathbf{w}^k$ inteira aproximada

Determine $\mathbf{r}^{k+1}$ tal que $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \mathbf{w}^k\mathbf{B}^k$ e $k = k + 1$

Guarde $\mathbf{B}^k$ e $\mathbf{w}^k$ associado a cada coluna de $\mathbf{B}^k$

SE $\mathbf{r} = 0$ **Então**

PARE heurística = 0

FIM

É importante que a cada iteração, as colunas de $\mathbf{B}$, que são os padrões de corte utilizados naquela iteração, e a quantidade de vezes que cada um foi utilizado w_i devem ser salvos. A solução final do problema é constituída por todos os padrões de corte e suas quantidades associadas de cada iteração.

4 Resultados e Exemplificações

Para exemplificar o método completo descrito, o caso de objetos de tamanho $L = 194$, para a produção de três tipos de item, $m = 3$, com comprimentos $l = (108, 13, 90)$ e $d =$ (4, 8, 7).
Assim na primeira iteração, resolvendo o simplex com geração de colunas

$\mathbf{B} = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$ e $\mathbf{x} = (1.\overline{333},\ \ 2.\overline{666},\ \ 3.5)$, agora ordena-se o vetor solução e constrói-se $\boldsymbol{W}$, obtendo-se $\boldsymbol{W}$ = (1, 3, 3), porém não é toda a demanda que é atendida, resultando em um resíduo $\mathbf{r}$ = (0, 2, 1).

Agora, realiza-se uma nova iteração com o resíduo $\mathbf{r}$, encontrando-se uma nova solução relaxada e uma nova base tal que a matriz solução $\mathbf{A}$, e a solução $\mathbf{x}$:

$\mathbf{A} = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{matrix}$ e $\mathbf{x}^* =$ (1, 3, 3, 1).

Um outro exemplo, em estoque há barras de 300 cm de comprimento. Para a confecção de certa estrutura metálica utiliza-se barras de comprimento l = (15, 30, 50, 70, 105), $d =$ (6, 7, 15, 20, 40). Aplicando-se o método simplex com geração de colunas com a heurística Nova, obtemos:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}^*$ = (3, 2, 1, 3, 1, 1, 1).

5 Conclusão

O problema de corte de estoque, que é comum em vários setores da indústria e negócios, é de grande importância e possui certa complexidade. Por mais que sua formulação e modelagem muitas vezes pareçam algo fácil e viável, sua resolução computacional exige um pouco mais de atenção como visto.

Como se trata de um problema inteiro e combinatório, métodos são utilizados para assim reduzir a análise dos padrões de corte e tornar a solução ótima possível de ser encontrada computacionalmente.

A combinação de métodos de programação linear, como o simplex de Dantzig [7], com o método de geração de colunas de Gilmore e Gomory [1] e [2] e métodos heurísticos nos trazem melhores soluções em tempos menores de processamento computacional.

Assim, um problema muito presente no dia-a-dia com grande complexidade pode ser resolvido de maneira rápida e inteligente.

6 Bibliografia

- [1] Gilmore, P. C., Gomory, R. E., "A Linear programming approach to the cutting stock problem" Operations Research, 9: 848-859 (1961).

- [2] Gilmore, P. C., Gomory, R. E. "A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II ". Operations Research, 11: 863-888 (1963).

- [3] Robert W. Haessler and Paul E. Sweeney. “Cutting stock problems and solution procedures”.
- [4] Aneliza Leandro Longhi “Modelos Matemáticos para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque Unidimensional”

- [5] Poldi, K. C., 2003, "Algumas Extensões do Problema de Corte de Estoque ". Dissertação de Mestrado. ICMC-USP, São Carlos, São Paulo

- [6] Wascher, G., Gau, T., "Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computation study ". OR Spektrum, 18: 131-144 (1996).

- [7] Bazaraa, M. S., “Linear Programming and Network Flows” fourth Edition, Wiley.