UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Um estudo sobre o problema de corte de estoque

Aluno: Pedro Henrique Rivera Santiago - RA: 120022
Orientadora: Prof. Dra. Kelly Cristina Poldi

Campinas
2016

Introdução

A otimização vem ganhando relevância nas últimas décadas, sendo alvo de pesquisas devido à sua importância na melhoria de processos operacionais.

Problemas de otimização se caracterizam por dois aspectos. O possível indica a existência de um conjunto de restrições a serem consideradas, relevando assim que nem toda solução é aceitável, sugerindo um conjunto de soluções factíveis, isto é, passíveis de execução. O melhor indica a existência de um critério para qualificar as várias soluções factíveis, permitindo compará-las, relevando a melhor dentre todas, chamada solução ótima.

Neste trabalho, abordamos o problema de corte de estoque unidimensional, que consiste em cortar um conjunto de bobinas (aço ou papel) disponíveis em estoque para a produção de itens menores, tal que a demanda seja atendida e um objetivo otimizado (minimizar custos ou perdas). Esse tipo de problema é essencial para o planejamento da produção em indústrias de papel, vidro, metalúrgica, plástica e têxtil por exemplo, onde melhorias no processo de produção podem representar inúmeras vantagens econômicas e operacionais. Para estas, a redução dos custos de produção e otimização dos processos estão, frequentemente, associados à utilização de estratégias adequadas de cortes.

1 O problema de corte de estoque

Segundo Gilmore e Gomory [2] e [3] o problema de corte consiste em cortar uma unidade grande *(objeto)*, que esteja disponível em estoque, para a produção de um conjunto de unidades pequenas *(itens)* que estão sendo requisitadas. As formas e medidas do objeto e dos itens, bem como suas quantidades demandadas, são especificadas.

Os objetos a serem cortados devem obedecer algumas restrições técnicas, ou mesmo de mercado, que exigem tratos especiais ou algumas exigências a serem consideradas. Podemos ter ainda restrições geométricas sob os planos de corte que estão associadas as distâncias entre os itens, limitação quanto a combinação entre os tipos de itens, limitação do número de itens em um plano de corte e limitação no número de tipos de itens em um plano de corte.

Os objetivos são de grande importância, pois definem a meta a ser atingida, como por exemplo, minimização da perda absoluta ou relativa de material, minimização dos custos de produção, custos de material, custos de armazenamento ou devido as trocas de planos, maximização de lucros, entre outros.
Temos ainda que os problemas de corte podem ser classificados de acordo com o aspecto geométrico das peças a serem tratadas, sendo:

- *Problema Unidimensional*: quando apenas uma dimensão (comprimento) é relevante no processo de cortagem, veja Figura $1(a)$. Como casos típicos podemos citar o corte de materiais como papel, tecido, plástico e aço para semrem utilizados nos mais diversos setores.

- *Problema Bidimensional*: duas dimensões (comprimento e largura) são relevantes na obtenção da solução, enquanto a espessura é constante, veja Figura $1(b)$. As dificuldades aumentam consideravelmente para se gerar arranjos sem que ocorra sobreposição de itens nos planos de corte. Podemos citar o corte de placas de madeira na indústria de móveis, chapas de aço e placas de vidro.

- *Problema Tridimensional*: três dimensões (comprimento, largura e espessura) são relevantes para a obtenção da solução, veja Figura $1(c)$. Basicamente, trata-se de arranjar itens espaciais, sem sobrepô-los, dentro de objetos maiores. Podemos citar como exemplos o problema de Carregamento de Contêineres, cortes em indústrias de espuma, entre outros.

- *Problema Multidimensional*: além dos problemas já expostos, o problema multidimensional também pode aparecer com, por exemplo, no Problema de Alocação de tarefas, que consiste na distribuição de um número n de instalações para um número n de tarefas.

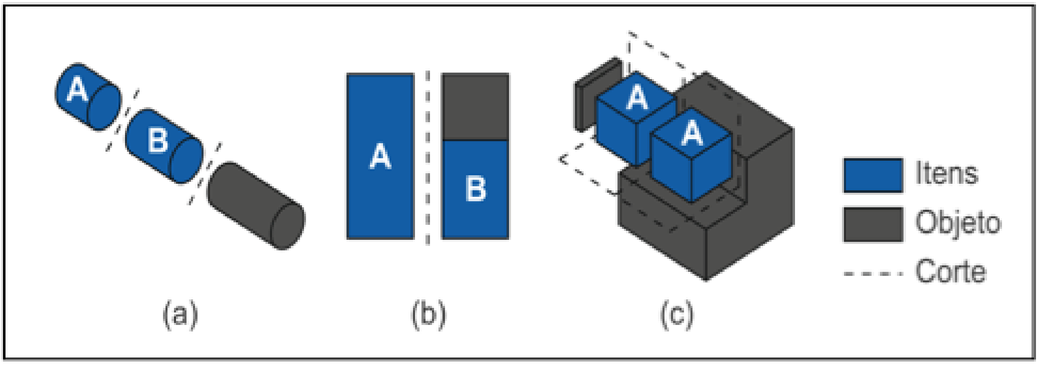

Figura 1: **(a)** Unidimensional; **(b)** Bidimensional; **(c)** Tridimensional;

1.1 Definição

O problema de corte de estoque unidimensional pode ser definido da seguinte maneira:

Considere que temos em estoque um número suficientemente grande de objetos (barras, bobinas, etc) de um determinado comprimento L e um conjunto de pedidos de barras menores de comprimentos $l_i, i = 1, ..., m$, os quais chamamos de itens. Cada item i deve ser produzido na quantidade $d_i, i = 1, ..., m$. O problema então consiste em produzir os itens a partir do corte das peças em estoque de modo a atender a demanda, otimizando uma certa função, por exemplo, minimizar o total de peças a serem cortadas ou minimizar a perda, maximizar o lucro, etc.

1.2 Formulação matemática

Por simplicidade, considere apenas um tipo de objeto em estoque.

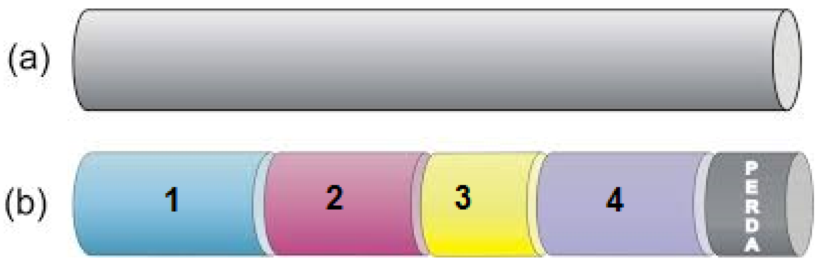

Figura 2: **(a)** Peça em estoque; **(b)** Padrão de corte, com os itens 1, 2, 3 e 4;

- *Padrão de Corte*:

  Maneira como um objeto em estoque é cortado para a produção dos itens demandados. A um padrão de corte associamos um vetor m-dimensional que contabiliza os itens produzidos:

  $$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)^T,$$

  onde α_i é a quantidade de itens do tipo i no padrão de corte. Sendo que, dois padrões corte que tenham o mesmo vetor associado são chamados equivalentes.

  Observe que um vetor $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)^T$ corresponde a um padrão de corte se e somente se satisfaz as restrições do Problema da Mochila (considerando apenas as restrições físicas):

  $$\begin{array}{c} l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + ... + l_m\alpha_m \leq L \\ \alpha_i \geq 0, i = 1, ..., m \quad e \quad inteiro. \end{array} \qquad (1)$$

  A Figura 2 ilustra um objeto e um exemplo de padrão de corte.

- *Padrão de Corte Homogêneo*:

  Um padrão de corte homogêneo é aquele que produz apenas um tipo de item, ou seja, o vetor associado tem apenas uma coordenada não-nula, $\mathbf{a} = (0, ..., \alpha_i, ..., 0), \alpha_i \neq 0$. Note que sempre teremos m padrões homogêneos, cujos vetores associados definem uma matriz diagonal. A hipótese de que $l_i \leq L, \quad \forall i$ está implícita, caso contrário, o problema seria infactível. Os valores α_i são determinados por $\alpha_i = \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor, i = 1, ..., m$.

Tendo os padrões de corte definidos, o próximo passo é determinar o número de vezes que cada padrão deve ser utilizado, ou seja, a modelagem matemática de um problema de corte de estoque é feita em duas etapas:

1. Definir todos os possíveis padrões de corte;
2. Definir quantas vezes cada padrão de corte será utilizado para atender a demanda, que deverá ser um número inteiro e não-negativo.

Todos os possíveis padrões de corte são da forma $\mathbf{a}_n = (\alpha_{1n} \quad \alpha_{2n} \quad ... \quad \alpha_{mn})^T$ onde $\mathbf{a}$ é um padrão de corte generalizado e x_j é o número de vezes que o objeto é cortado usando o padrão de corte j.

O problema de corte de estoque, considerando como objetivo minimizar o número de objetos em estoque a serem cortados, pode ser formulado como um problema de otimização linear inteiro:

$$\begin{array}{ll} minimizar & f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + ... + x_n \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + ... + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{d} \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \quad e \quad inteiro. \end{cases} \end{array} \tag{2}$$

Em notação matricial, o problema (2) é escrito como:

$$\begin{array}{ll} minimizar & f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{e inteiro,} \end{array} \tag{3}$$

onde cada coluna da matriz $\mathbf{A} \in \Re^{mXn}$ é um vetor associado a um padrão de corte.

A função objetivo em (3) minimiza o total de objetos a serem cortados. As primeiras restrições em (3) garantem que a quantidade de itens produzidos seja exatamente igual a demanda, e as últimas restrições em (3) garantem que a repetição de cada padrão de corte j seja um número inteiro não-negativo.

2 Método de solução

A condição de integralidade sobre as variáveis x_j torna os problema de corte (3) difícil de ser resolvido computacionalmente. Para contornar este problema, relaxamos a condição de integralidade sobre as variáveis x_j e resolvemos o problema de otimização linear resultante pelo método simplex. Em problemas práticos, m (que é a quantidade de tipos de itens) é da ordem de dezenas, enquanto que n (o qual depende de m, L e $l_i, i = 1, ..., m$) pode ser da ordem de milhões, o que inviabiliza a resolução direta do problema. Para contornar esta dificuldade, utilizamos o processo de Geração de Colunas na resolução da relaxação por otimização linear de (3) e também um método heurístico para arredondamento da solução, que será importante na resolução do problema de corte de estoque inteiro.

2.1 Método Simplex

Nesta seção apresentamos uma breve revisão do método simplex para resolver problemas de programação linear, mais detalhes em Perin [4]. Qualquer problema de programação linear pode ser escrito na seguinte forma, chamada forma padrão:

$$\begin{array}{ll} minimizar & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \tag{4}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz real $m \times n$ e o posto de A é m, ou seja, existem m colunas linearmente independentes, formadas pelos padrões homogêneos.

A solução geral do sistema (4) pode ser descrita como uma partição básica composta por m colunas linearmente independentes e outra não-básica, $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$.

Esta partição nas colunas da matriz A leva a uma partição nos vetores solução e custo relativo, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N]$ e $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N]$. Rescrevendo o sistema (4) obtemos:

$$
\begin{array}{rl}
\textit{minimizar} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\
\text{sujeito a:} & \begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{d} \\ \mathbf{x}_B \geq 0, \quad \mathbf{x}_N \geq 0. \end{cases}
\end{array}
\tag{5}
$$

Uma solução particular obtida por $\mathbf{x}_B^0 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$ e $\mathbf{x}_N^0 = \mathbf{0}$ é chamada solução básica. Se $\mathbf{x}_B^0 \geq 0$ dizemos que a solução básica é factível, além disso, se todas as variáveis básicas são positivas, dizemos que a solução básica factível é não-degenerada.

Reescrevendo a função objetivo restrita as soluções do sistema linear, teremos:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\
&= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N
\end{aligned}
$$

Vemos que $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^0$ é o valor da função objetivo para a solução básica. Definimos $\lambda = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ como o vetor das variáveis duais (vetor multiplicador Simplex). Se $(c_j - \lambda^T a_j) \geq 0$, $j = 1, ..., n$, então λ é uma solução básica dual-factível. Com isso, a função objetivo, em termos das variáveis não-básicas, é dada por:

$$
f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j \in \Gamma} (c_j - \lambda^T a_j) x_j,
$$

onde a_j corresponde à coluna j de $\mathbf{A}$ e Γ é o conjunto dos índices das colunas da matriz $\mathbf{N}$ (colunas não-básicas de $\mathbf{A}$).

O Método Simplex é definido como uma perturbação de apenas uma componente de $\mathbf{x}_N$ para alteração da solução básica. Como queremos minimizar $f(\mathbf{x})$ e $x_j \geq 0 \forall j \in \Gamma$, a componente x_k a ser perturbada é tal que $(c_k - \lambda^T a_k) < 0$.

Fazendo $x_k = \varepsilon \geq 0$ e $x_j = 0, \forall j \in \mathit{\Gamma} - k$, as variáveis básicas são alteradas resultando em uma nova solução dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{x}_B^0 + \varepsilon \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_N &= \varepsilon \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

E o valor da função objetivo é dado por:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + (c_k - \lambda^T a_k)\varepsilon,$$

onde $\mathbf{y} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ e $\mathbf{e}_k = (0, ..., 1, ..., 0)^T$ com 1 na k-ésima componente.

Note que a direção $s = (\mathbf{y}, \mathbf{e}_k)^t$ define uma perturbação da solução básica e é chamada de direção simplex.

Para determinar o passo, maior valor de ε, impondo apenas que $\mathbf{x} \geq 0$, pois as demais restrições são satisfeitas por ε, tem-se:

$$\varepsilon_0 = -\frac{x_{Bl}^0}{y_l} = \min\left\{ \frac{x_{Bi}^0}{y_i} \quad | \quad y_i < 0, \quad i = 1, ..., m \right\}$$

Para esta escolha de ε, a l-ésima componente de $\mathbf{x}_B$ se anula, enquanto que apenas uma variável de $\mathbf{x}_N$ tornou-se positiva. Assim, temos uma nova base onde a l-ésima coluna de $\mathbf{B}$ é substituída pela k-ésima coluna de $\mathbf{N}$. Esta nova partição é básica primal-factível, cuja solução básica associada é dada por $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \varepsilon^0 \mathbf{s}$.

Podemos escolher qualquer k tal que $(c_k - \lambda^T a_k) < 0$, ou mesmo escolher a direção simplex com o menor custo relativo, mas para isso é necessário examinar todas as n colunas da matriz $\mathbf{A}$.

Assim, a nova base é dada substituindo a l-ésima coluna da matriz básica $\mathbf{B}$ pela k-ésima coluna da matriz não-básica $\mathbf{N}$.

2.2 Simplex com geração de colunas

O método Simplex com geração de colunas foi proposto por Gilmore e Gomory [2] e [3]. O método Simplex pode ser usado na resolução de problemas de corte de estoque. Em problemas práticos, o número de variáveis (colunas) n é muito maior que o número de restrições (linhas) m. Cada coluna representa um padrão de corte. Porém, na iteração do Simplex para determinar uma nova coluna a entrar na base, ao resolver o dual, determinar essas possíveis colunas se torna algo impraticável, pois o número de candidatas (mais detalhes em Poldi [7]).

Esse procedimento, consiste em gerar uma coluna k, ou seja, um novo padrão de corte. Procurar a variável x_k com o menor custo relativo, o que é equivalente a:

$$\mathbf{c}_k - \lambda^T \mathbf{a}_k = \min\{\mathbf{c}_j - \lambda^T \mathbf{a}_j, \quad j = 1, 2, ...\},$$

onde λ é o vetor multiplicador Simplex de uma determinada iteração.

Definindo a matriz básica inicial, como a matriz $\mathbf{B}$ diagonal (de padrões de corte homogêneos), tal que a quantidade seja:

$$b_{ii} = \min\left\{\left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor, d_1\right\}, i = 1, ..., m, \tag{6}$$

onde $\lfloor w \rfloor$ é o maior inteiro menor que w. Tomamos o mínimo para garantir que o padrão de corte inicial não exceda a demanda.
Por simplicidade, tomamos como objetivo minimizar o total de objetos cortados, o que leva a um vetor de custo $\mathbf{c} = (1, 1, ..., 1)$, resultando em:

$$\min\{\mathbf{c}_j - \lambda^T \mathbf{a}_j\} = 1 - \max\{\lambda^T \mathbf{a}_j\}.$$

Assim, obter uma coluna não-básica que substituirá uma coluna básica, corresponde a resolver o problema de maximizar $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, onde o vetor $(a_1, a_2, ..., a_m)^T$ corresponde a um padrão de corte. Para que isso ocorra, basta satisfazer as restrições:

$$\begin{gathered} l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + ... + l_m\alpha_m \leq L \\ 0 \leq \alpha_i \leq d_i, i = 1, ..., m \quad e \quad inteiro. \end{gathered}$$

Resultando no modelo matemático dado por:

$$\begin{array}{rl} maximizar & g(\mathbf{a}) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} l_1 a_1 + l_2 a_2 + ... + l_m a_m \leq L \\ 0 \leq x_j \leq d_i, i = 1, ..., m \quad e \quad inteiro. \end{cases} \end{array} \tag{7}$$

que é um problema da mochila. Desta forma, se o menor dos custos relativos são não-negativos, ou seja, se $1 - g(\mathbf{a}) \geq 0$, podemos garantir que a solução do problema relaxado (contínua) é ótima.
Segue o algoritmo do Método Simplex com Geração de Colunas usado:

Algoritmo 1: Método Simplex com Geração de Colunas

Data: L o comprimento do objeto a ser cortado; l_i e d_i o comprimento e a demanda de cada item, respectivamente;

Inicialização:

Gere a matriz básica inicial conforme (4);

Faça $PARE = 0$;

while $PARE = 0$ **do**

· Determine a solução básica corrente:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

· Determine a solução dual:

$$\mathbf{B}^T\lambda = \mathbf{c}_B$$

· Resolva o Problema da Mochila:

$$\begin{array}{rl} maximizar & g(\mathbf{a}) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} l_1 a_1 + l_2 a_2 + ... + l_m a_m \leq L \\ 0 \leq x_j \leq d_i, i = 1, ..., m \quad e \quad inteiro. \end{cases} \end{array}$$

if $1 - g(\boldsymbol{a}) \geq 0$ **then**

Solução atual é ótima.

$PARE = 1$

end

else

· Determine as coordenadas básicas da direção Simplex:

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a}$$

· Determine o tamanho do passo, encontre k tal que:

$$\frac{x_k}{y_k} = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} \quad | \quad y_i > 0, \quad i = 1, ..., m \right\}$$

· Atualize a base, substituindo a k-ésima coluna da matriz B pelo vetor a, solução do Problema da Mochila;

end

end

2.3 Problema da mochila

Genericamente, o problema da mochila é definido da seguinte forma, suponha que um alpinista deva carregar sua mochila selecionando alguns itens, dentre vários disponíveis, para carregar em sua mochila em uma expedição, sempre levando em conta a capacidade da mochila. A cada item é atribuído um valor de utilidade e o alpinista deve selecioná-los buscando maximizar o valor de utilidade total.

Definimos m como o número de tipos de itens, v_i e p_i o valor utilidade e o peso, respectivamente, do item i, sendo $1 = 1, .., m$. Por fim, L a capacidade da mochila.

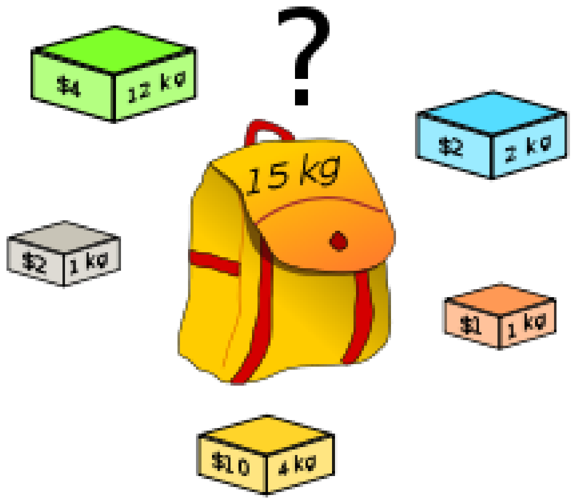

Figura 3: Mochila com sua capacidade L, itens com peso p e valor utilidade v

Para o caso do Problema da Mochila Inteiro Restrito, sendo $x_i \geq 0, i = 1, ..., m$ o número de itens do tipo i alocados na mochila e d_i a restrição de quantidade para cada item. Temos a seguinte formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \leq L \\ 0 \leq x_i \leq d_i, x_i \text{ inteiro}, i = 1, ..., n. \end{cases} \end{array} \tag{8}$$

Para resolver certos problemas combinatórios, é necessário enumerar, ou seja, fazer uma lista de todos de um determinado tipo. O número de objetos a enumerar é tipicamente muito grande, e portanto os algoritmos enumerativos consomem um tempo impraticável. O método da Enumeração Implícita foi proposto por Gilmore e Gomory [4] e [5], para o problema da mochila. Este método é implementado utilizando uma busca em profundidade primeiro e consiste em enumerar implicitamente todas as soluções do problema da mochila. Para isto, utiliza-se limitantes para o problema que permitem que soluções piores que a atual sejam descartadas, sem perder a solução ótima.

Segue o algoritmo de Enumeração Implícita usado para a resolução do Problema da Mochila Inteiro Restrito.

Algoritmo 2: Enumeração Implícita

Data: L o tamanho da mochila; p_i e v_i o peso e valor utilidade, respectivamente, de cada item; d_i a quantidade máxima de cada item.

Inicialização:

Faça: $\theta_i = \frac{v_i}{p_i}, i = 1, ..., m$, e reordene as variáveis tal que $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3 \geq \cdots \geq \theta_m$

Faça:$v_{m+1} = 0, p_{m+1} = 0$ e $g(\mathbf{a}) = 0$

Determine a solução $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ tal que:

$$\alpha_1 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{L}{p_1} \right\rfloor, d_1 \right\}$$

$$\alpha_k = \min \left\{ \left\lfloor \frac{L - \sum_{j=1}^{k-1} p_j \alpha_j}{p_k} \right\rfloor, d_k \right\}, k = 2, ..., m$$

while $PARE = 0$ **do**
- (i):
- $g(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} v_i \alpha_i$
- **if** $\underline{G} < g(\boldsymbol{a})$ **then**
  - $\underline{G} = g(\mathbf{a})$ e $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$
- **end**
- (ii):
- k maior índice tal que $a_k \neq 0$
- **if** $\boldsymbol{a} = 0$ **then**
  - $PARE = 1$
  - Solução ótima $\mathbf{a}^*$
- **end**
- **else** Calcule
  - $\overline{G}(\mathbf{a}) = v_1 a_1 + ... + v_k(a_k - 1) + \frac{v_{k+1}}{p_{k+1}}(L - p_1 a_1 - ... - p_k(a_k - 1))$
- **end**
- (iii):
- **if** $\overline{G}(\boldsymbol{a}) \leq \underline{G}$ **then**
  - $a_k = 0$ e volte ao passo (ii)
- **end**
- **if** $\overline{G}(\boldsymbol{a}) > \underline{G}$ **then**
  - $a_k = a_k - 1$ e defina a nova solução $\mathbf{a}$:

    $$\alpha_j = \min \left\{ \left\lfloor \frac{L - \sum_{i=1}^{j-1} p_i \alpha_i}{p_j} \right\rfloor, d_j \right\}, j = k + 1, ..., m$$

  - Volte ao passo (i)
- **end**

end

return $g(\mathbf{a})$ valor ótimo e a solução $\mathbf{a}$

2.4 Fatoração LU

Durante o processo de resolução do Método Simplex com Geração de Colunas há a necessidade da resolução de sistemas lineares, para esse projeto o método escolhido foi a Fatoração LU, que está descrito a seguir (mais detalhes em Ruggiero e Lopes [1]).

O processo de fatoração para resolução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ consiste em decompor a matriz $\mathbf{A}$ dos coeficientes em um produto de dois ou mais fatores e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas lineares que nos conduzirá à solução do sistema linear original.

A vantagem dos processos de fatoração é que podemos resolver qualquer sistema linear que tenha $\mathbf{A}$ como matriz dos coeficientes e não-singular. Se o vetor b for alterado, a resolução do novo sistema linear será quase que imediata.

A Fatoração LU é um dos processos de fatoração mais empregados. Nesta fatoração a matriz L é triangular inferior com diagonal unitária e a matriz U é triangular superior.

Dados o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e a fatoração LU da matriz A, temos:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (LU)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Seja $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$. A solução do sistema linear pode ser obtida da resolução dos sistemas lineares triangulares:

i) $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$

ii) $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

Para detalhes de como obter as matrizes L e U consultar Ruggiero e Lopes [1].

2.5 Heurística residual

Na resolução do problema de corte de estoque unidimensional através do Método de Geração de colunas dado pelo **Algoritmo 1**, temos subproblemas que são resolver sistemas lineares, estes foram abordados pelo método da Fatoração LU, conforme já descrito anteriormente. Esses procedimentos levam a uma solução ótima fracionária, ou seja, o vetor solução $\mathbf{x}^*$ não é inteiro. Assim, Poldi [7] apresenta heurísticas residuais para obtenção de solução inteira para o problema de corte de estoque. Tais heurísticas consistem em resolver o problema original relaxado, obter uma solução inteira aproximada, resolver o problema residual relaxado resultante, obter uma solução inteira aproximada e assim por diante.

Neste projeto a heurística residual adotada foi a Residual Nova proposta por Poldi [7], para mais detalhes sobre outras heurísticas consultar Wascher e Gau [8]. Sua estratégia é apostar na qualidade dos padrões gerados pelo modelo de otimização linear, onde toda demanda é levada em conta na construção dos padrões de corte.

A cada iteração, resolve-se um problema de corte de estoque relaxado e ordena-se o vetor solução de forma não-crescente, ou seja, $x_1^* \geq x_2^* \geq ... \geq x_m^*$. A heurística aposta que o padrão de corte 1 (o mais utilizado) mereça maior atenção. Iniciando com o padrão de corte 1, o valor de x_1^* é arredondado para o inteiro superior e testa-se a factibilidade da seguinte solução (no sentido de que excessos de itens não foram gerados).

$$\mathbf{x}^* = (\lceil x_1^* \rceil, 0, ..., 0)^T.$$

Caso não seja factível (houve excesso de itens), a solução é reduzida de uma unidade até que excessos sejam eliminados. Repete-se para o padrão de corte 2 e assim por diante, até que o último padrão de corte gerado seja examinado. Atualiza-se a demanda, gerando um problema residual. Este novo problema é resolvido relaxando-se a condição de integralidade e o procedimento anterior é repetido até que toda a demanda seja satisfeita.

Definindo $\mathbf{w}$ como o vetor inteiro gerado pela heurística residual a partir de $\mathbf{x}^*$. Observe que a cada iteração da Heurística Nova a demanda vai necessariamente diminuir, portanto $\mathbf{w}^k$, gerado na k-ésima iteração, será sempre diferente de zero, pois se um padrão de corte atende a toda a demanda teremos $\mathbf{w}^k = (1, 0, ..., 0)^T$, devido a forma como é gerada a solução inteira a partir de $\mathbf{x}^*$. Como a demanda é finita (e no caso residual é pequena) com um número finito de passos teremos $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (vetor residual), e este é o critério de parada.

Segue o algoritmo do Método Simplex com Geração de Colunas já descrito anteriormente acrescentado da Heurística Residual Nova:

Algoritmo 3: Método Simplex com Geração de Coluna + Heurística Residual Nova

---

Data: L o comprimento do objeto a ser cortado em estoque; l_i e d_i o comprimento e a demanda de cada item, respectivamente;

Inicialização:

$k = 0$; $\mathbf{r}^k = \mathbf{d}$;

Faça $PARE = 0$;

while $PARE = 0$ **do**

· Resolva o problema de otimização linear por geração de colunas restrito:

$$\begin{aligned} min \quad & f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \\ \text{sujeito a:} \quad & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}^k \\ x_j \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

obtendo a solução $\mathbf{x}^{*k}$ e a base correspondente $\mathbf{B}^k$;

· Determine $\mathbf{w}^k$ solução inteira aproximada;

· Guarde $\mathbf{B}^k$ e $\mathbf{w}^k$;

· Faça $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \mathbf{B}^k \mathbf{w}^k$ e $k = k + 1$;

if $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ **then**

$PARE = 1$;

end

end

---

3 Aplicação e resultados

Todos o resultados foram obtidos através dos algoritmos descritos anteriormente, implementados em linguagem C e executados em uma máquina com processador Intel(R) Core(TM) i3-2330M CPU @ 2.20 GHz 2.20 GHz .

Para exemplificar o método descrito, suponha que temos disponível objetos de comprimento $L = 194$ a serem cortados para a produção de três tipos de itens ($m = 3$), com comprimentos $l = (108, 13, 90)^T$ e demandas $d = (4, 8, 7)^T$.

O primeiro passo é resolver o problema relaxado pelo método simplex com geração de colunas. Obtendo a solução:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{pmatrix} 1,333... & 2,666... & 3,5 \end{pmatrix}^T.$$

Agora, ordena-se o vetor solução $\mathbf{x}$ de forma não-crescente, temos:

$$x_3 = 3,5 \geq x_2 = 2,666... \geq x_1 = 1,333...$$

Inicia-se o arredondamento da primeira componente do vetor, $w_3 = \lceil 3,5 \rceil = 4$. Testa-se a factibilidade. Com $w_3 = 4$ e $w_2 = w_1 = 0$, temos o padrão de corte $(0, 0, 2)^T$ executado 4 vezes, produzindo 8 itens do tipo 3, mas a sua demanda é de 7. Assim, temos um excesso na produção, o que não deve ocorrer. Portanto não aceitamos $w_3 = 4$. Fazemos $w_3 = 3$ e testamos a factibilidade. Com $w_3 = 3$ teremos 6 itens tipo 3 o que não excede a demanda original.

Passamos para a segunda maior componente do vetor x, realizamos o mesmo processo e assim por diante. Obtemos a solução inteira $w = (1, 3, 3)^T$ que não atende toda a demanda original. Então guardamos esta solução, atualizamos a demanda (subtraindo os itens que já foram produzidos com esta primeira solução) e resolvemos novamente um problema com a demanda residual $r = (0, 2, 1)^T$.

Resolvemos este problema (relaxado) através do método simplex com geração de colunas, a solução é dada por $x = 1$ e o padrão de corte $b_4 = (0, 2, 1)^T$. Como a solução é inteira, resolve otimamente o problema residual. Portanto, fim da heurística. A solução final é:

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Como um caso de aplicação direto na indústria, suponha que na produção de uma estrutura de gaiola, para reforçar a resistência a impactos de um carro, sejam utilizadas barras metálicas cilíndricas.

Figura 4: Estrutura com barras metálicas. Fonte: Google Imagens.

Em estoque há barras de 300 cm de comprimento. Para a confecção da estrutura utiliza-se barras de comprimento $l = (30, 50, 15, 70, 105)^T$ com uma demanda $d = (40, 15, 20, 7, 6)^T$.

Aplicando o método simplex com geração de colunas para resolver o problema relaxado e a heurística residual nova para obter uma solução inteira. Temos a matriz $\mathbf{B}$ com os parões de corte:

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E o vetor solução:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Conclusão

Neste trabalho estudamos o problema de corte de estoque unidimensional. Para resolver o problema, utilizamos o método simplex com a abordagem de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory [2] e [3]. O método simplex com geração de colunas é uma variação do método simplex onde não conhecemos todas as colunas a priori. A cada iteração do método, uma nova coluna (padrão de corte) $\mathbf{a}$ entra na base, para o simplex teríamos que identificar todos os possíveis candidatos, enquanto que utilizando a geração de colunas, resolvemos um problema da mochila e sua solução é o padrão de corte que fará parte da solução na composição da matriz $\mathbf{B}$.

A cada iteração do método simplex, devemos resolver três sistemas lineares. Escolhemos a fatoração LU como método de solução para o sistemas lineares contidos nas rotinas do algoritmo devido a ordem de grandeza dos sistemas trabalhados nesse projeto. Sendo que para sistemas mais robustos métodos iterativos de solução como o método dos gradientes conjugados, talvez fosse o mais indicado.

A dimensão da matriz solução $\mathbf{B}$, que armazena os padrões de corte, não é expressivamente maior que a dimensão inicial do problema. Isso ocorre devido ao fato dos vetores residuais terem valores pequenos comparados ao problema inicial. Então, com poucos padrões de corte a mais, o algoritmo já apresenta uma solução e utilizando a heurística de arredondamento temos uma solução inteira.

O método descrito no projeto apresenta diversas aplicações para otimização de processos operacionais nas indústrias ou mesmo em pequenas empresas, que na maioria dos casos, são resolvidos por experiência pessoal. Por exemplo, a quantidade produzida de um item é determinada pelo quanto os gerentes acreditam ser necessário. Um planejamento nos processos internos de uma empresa resulta na sua prosperidade e desenvolvimento, diferenciando esta de outras.

Bibliografia

[1] Ruggiero,M. A. G., Lopes, V. L. R., 1988,"*Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*", São Paulo, Pearson.

[2] Gilmore, P. C., Gomory, R. E., *"A Linear programming approach to the cutting stock problem"*Operations Research, 9: 848-859 (1961).

[3] Gilmore, P. C., Gomory, R. E., "*A Linear programming approach to the cutting stock problem - Part II*". Operations Research, 11: 863-888 (1963).

[4] Perin, C., Notas de aula de MS428 Programação Linear.

[5] Silveira Jr., J. A., 2004, "*Otimização das Perdas em Cortes Guilhotinados para bobinas de Aço na Indústria Metalmecânica*". XXXVI - SBPO, O impacto da Pesquisa Operacional nas Novas Tendeências Multidisciplinares.

[6] Marques,F. P., 2000, "*O Problema da Mochila Compartimentada*". Dissertação de Mestrado. ICMC-USP, São Carlos, São Paulo.

[7] Poldi, K. C., 2003, "*Algumas Extensões do Problema de Corte de Estoque*". Dissertação de Mestrado. ICMC-USP, São Carlos, São Paulo.

[8] Wascher, G., Gau, T., "*Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computation study*". OR Spektrum, 18: 131-144 (1996).

[9] Imagens retiradas de pesquisas no Google Imagens.