

Universidade Estadual de Campinas IMECC

Preditor-Corretor

Disciplina MS877 - Projeto Supervisionado II

Autor: Rubens Carvalho - ra: 122181

Orientador: Profº Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira

Campinas - SP
junho de 2015.

Resumo

Os métodos de pontos interiores têm sido amplamente utilizados para determinar a solução de problemas lineares de grande escala. O método preditor corretor se destaca dos outros por ser eficiente e ter uma taxa de convergência rápida se comparado com outros métodos de pontos interiores. Veremos como começou o estudo sobre este assunto, estudaremos o método de Newton e o método primal-dual afim escala brevemente, pois servem como base para desenvolver o método preditor-corretor. Os resultados computacionais obtidos durante a implementação serão apresentados na seção 4 juntamente com os valores do *gap* em cada iteração.

Palavra-chave: Método de Ponto Interior; Preditor-Corretor.

Abstract

The interior point methods have been widely used to determine the solution of linear scale problems. The method predictor broker stands out from others by being efficient and have a fast convergence rate compared with other interior point methods. We'll see how it started the study on this subject will study Newton's method and the primal-dual method similar scale briefly, because they serve as a basis for developing the predictor-corrector method. The computational results obtained during implementation will be presented in section 4 together with the values of textit gap in each iteration.

Keywords: Interior Point Methods; Predictor-Corrector

1 Introdução

Em 1984, Karmarkar apresentou um novo método de solução para problemas lineares chamado de Pontos Interiores (PI). Tal método se destacou pelo fato de possuir complexidade polinomial na resolução dos problemas de Programação Linear (PL), enquanto o método Simplex possui complexidade exponencial. O principal interesse em obter um método mais eficiente para a solução de problemas de PL se deve ao fato de haver diversas áreas no comércio que podem ser modeladas como equações, e estas podem ser resolvidas matematicamente com esses métodos.

Logo, um método mais eficiente se destaca rapidamente, pois os problemas reais são considerados problemas de grande porte na maioria das vezes e o método de PI tem se mostrado eficiente na solução destes problemas.

O método de pontos interiores necessita de um ponto viável interior (relativo) disponível. A partir daí, gera-se novos pontos interiores em uma vizinhança de uma trajetória central até atingir uma certa tolerância para uma solução ótima. Para se atingir uma solução ótima, deve-se realizar um procedimento de purificação de uma solução.

Karmarkar apresentou um algoritmo que se baseia apenas em desenvolver um método primal, ou seja, envolve apenas a parte primal do problema. Na época em que foi lançado, este procedimento se destacava do Simplex mas, com os avanços nas pesquisas de pontos interiores, logo desenvolveram métodos primais-duais, que possuem as melhores propriedades práticas e teóricas se mostrando superiores aos demais métodos de PI.

Entre os métodos primais-duais, destaca-se o método preditor-corretor de Mehrotra (1992), que passou a ser a base da maioria dos códigos relacionados a pontos interiores, desde sua publicação. O método utiliza aproximações de segunda ordem para a trajetória primal-dual.

2 Pontos Interiores

Segundo Lima (2004), o problema de PL deriva da construção de uma representação matemática para um problema real em que se quer minimizar, ou maximizar, uma função objetivo linear, ao mesmo tempo em que as variáveis estão sujeitas a determinadas restrições lineares. Um ponto interior é aquele em que todas as variáveis estão dentro de seus limites. Logo, o método de PI percorre um caminho dentro da região de todas as soluções até obter a solução ótima, diferentemente do Simplex que percorre as arestas do politopo.

A forma primal de um problema de programação linear padrão pode ser dado na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

enquanto sua forma dual associada é escrita como

$$\begin{aligned} \max \quad & b^t y \\ \text{s.a.} \quad & A^t y + z = c \\ & y \text{ livre, } z \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Um ponto é tido como ótimo quando satisfaz as seguintes condições de otimalidade:

- i) Primal Factível: $Ax - b = 0, x \geq 0$
- ii) Dual Factível: $A^t y - c + z = 0, z \geq 0$
- iii) Complementariedade: $XZe = 0$

onde X e Z são as matrizes diagonais de x e z respectivamente, e $e = (1, 1, 1, \dots)^t$.

Iremos ver agora alguns métodos de pontos interiores primais-duais e como funcionam.

2.1 Método de Newton

Iremos nos basear na explicação de Bertini (2012) para desenvolver este método. O método de Newton consiste na forma mais simples de desenvolver os métodos de pontos interiores do tipo primal-dual. Sob condições adequadas, este método gera uma sequência de pontos $\{x^k\}$ que convergem para o ponto ótimo x^* com taxa quadrática.

Sejam $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$. Este método iterativo procura uma solução $x^* \in \mathbb{R}^n$ onde $F(x^*) = 0$. Expandindo F em série de Taylor ao redor do ponto x iremos obter $F(x + d) \cong F(x) + J(x)d$, onde $J(x)$ é a Jacobiana de F no ponto x . Impondo a condição $F(x) + J(x)d = 0$, temos que $J(x)d = -F(x)$ e o método iterativo é dado por $x^{k+1} = x^k + d^k$.

De modo geral, o método de Newton pode ser descrito pelo pseudocódigo abaixo:

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
Para $k = 0, 1, \dots$ faça
 $d^k = -J(x^k)^{-1}F(x^k)$
 $x^{k+1} = x^k + d^k$
Ate convergir.

2.2 Método Primal-Dual Afim Escala

A principal ideia deste método é aplicar o método de Newton descrito acima na formulação dos problemas primal e dual apresentados em (1) e (2), respectivamente, tomando $F(x, y, z) = 0$ envolvendo as condições de otimalidade, ou seja,

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^t y - c + z \\ XZe \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix}$$

Calculando a Jacobiana de $F(x, y, z)$ iremos ter a matriz

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}$$

Logo, o sistema $J(x, y, z)d = -F(x, y, z)$ é dado por

$$\begin{cases} A\tilde{d}x = r_p \\ A^t\tilde{d}y + \tilde{d}z = r_d \\ Z\tilde{d}x + X\tilde{d}z = r_a \end{cases}$$

A solução $\tilde{d} = (\tilde{d}x, \tilde{d}y, \tilde{d}z)$ desse sistema pode ser obtida por eliminação de variáveis sabendo que $X = \text{diag}(x)$ e $Z = \text{diag}(z)$ são inversíveis. Abaixo é apresentado os valores de \tilde{d} após resolvido o sistema.

$$\begin{cases} \tilde{d}x = D(A^t\tilde{d}y - r_d + X^{-1}r_a) \\ \tilde{d}y = (ADA^t)^{-1}(r_p + ADr_d - ADX^{-1}r_a) \\ \tilde{d}z = X^{-1}(r_a - Z\tilde{d}x) \end{cases}$$

onde $D = Z^{-1}X$ e a matriz ADA^t é positiva definida, pois A tem posto completo e D é positiva definida.

Após obter a direção, devemos calcular o tamanho dos passos primais e duais, $\alpha_p, \alpha_d \in (0, 1]$, da iteração. Para isso, calculamos os vetores ρ_p e ρ_d da seguinte maneira:

$$\rho_p = \min\left\{-\frac{x_i}{\tilde{d}x_i}; \tilde{d}x_i < 0\right\}$$

$$\rho_d = \min\left\{-\frac{z_i}{\tilde{d}z_i}; \tilde{d}z_i < 0\right\}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Caso não existam valores negativos em $\tilde{d}x$ ou em $\tilde{d}z$, ρ_p e ρ_d não estão sendo bloqueadas por algum parâmetro e, deste modo, podemos tomar o passo de Newton completo como sendo 1. Assim, os passos α_p e α_d são calculados como $\alpha_p = \min\{1, \tau\rho_p\}$ e $\alpha_d = \min\{1, \tau\rho_d\}$, sendo $\tau \in (0, 1)$ uma constante dada.

O método Primal-Dual afim escala é resumido no pseudocódigo abaixo:

Dados $x^0 > 0, z^0 > 0, y^0, \tau \in (0, 1)$

Para $k = 1, 2, \dots$ faça

Calcule r_p, r_d, r_a

Calcule $dx, \tilde{d}y, \tilde{d}z$

Calcule α_p, α_d

Calcule os novos pontos

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p \tilde{d}x^k$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d \tilde{d}y^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d \tilde{d}z^k$$

3 Preditor-Corretor

Nos métodos descritos anteriormente, os produtos $x_i z_i$ de r_a e $s_i w_i$ de r_b podem convergir com velocidades diferentes e, assim, o método pode falhar ou convergir lentamente. Para solucionar este problema, criamos o parâmetro μ nas condições de otimalidade de forma que $x_i z_i = s_i w_i = \mu$, sendo este parâmetro atualizado a cada iteração.

A ideia do método preditor-corretor desenvolvida por Mehrotra (1992) consiste em utilizar uma direção que contenha três componentes:

- Direção de Newton.
- Direção de centragem cujo tamanho é determinado pelo parâmetro μ .
- Direção de correção que tenta compensar a aproximação linear do método de Newton dada por $(x + dx)^t (z + dz) = dx^t dz$.

A seguir apresentamos o algoritmo do método preditor-corretor com as direções ditas acima.

Entrada: $(x^0, z^0) > 0, y^0 e \tau \in (0, 1)$

para $k = 0, 1, \dots, \text{max faça}$

% Calculo dos resíduos.

% e é um vetor unitário de mesmo tamanho que x .

$$r_p = b - Ax$$

$$r_d = c - A^t y - z$$

$$r_a = -XZe$$

$$D = Z^{-1}X$$

% Calculo das direções afim escala.

$$(ADA)^t dy = r_p + AD(r_d - X^{-1}r_a)$$

$$dx = D(A^t dy - r_d + X^{-1}r_a)$$

$$dz = X^{-1}(r_a - Zdx)$$

% Calculo do passo dual e primal.

$$\alpha_p = \min\{1, \tau * \min\{\frac{-x_j}{dx_j} | dx_j < 0\}\}$$

$$\alpha_d = \min\{1, \tau * \min\{\frac{-z_j}{dz_j} | dz_j < 0\}\}$$

% Calculo do *gap* e do parâmetro de correção.

% p é uma constante cujo valor normalmente é 2 ou 3.

% n é a dimensão dos vetores.

$$\gamma = x^t z$$

$$\tilde{\gamma} = (x + \alpha_p dx)^t (z + \alpha_d dz)$$

$$\mu = \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}\right)^p \left(\frac{\gamma}{n}\right)$$

$$r_s = r_a - Dx Dze + \mu e$$

% Calculo da direção preditora corretora.

$$(ADA)^t dy = r_p + AD(r_d - X^{-1}r_s)$$

$$dx = D(A^t y - r_d + X^{-1}r_s)$$

$$dz = X^{-1}(r_s - Zdx)$$

% Calculo dos novos passos primal e dual.

$$\alpha_p = \min\{1, \tau * \min\{\frac{-x_j}{dx_j} | dx_j < 0\}\}$$

$$\alpha_d = \min\{1, \tau * \min\{\frac{-z_j}{dz_j} | dz_j < 0\}\}$$

% Atualização dos pontos.

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p dx$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d dy$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d dz$$

fim

onde $X = \text{diag}(x)$, $Z = \text{diag}(z)$, $Dx = \text{diag}(dx)$ e $Dz = \text{diag}(dz)$.

Analisando a matriz ADA , podemos concluir que se trata de uma matriz positiva definida, logo o cálculo do vetor dy pode ser realizado pela fatoração de Choleski da matriz e o resultado pode ser utilizado no próximo cálculo de dy , eliminando assim a necessidade de resolver duas vezes o mesmo sistema linear.

4 Implementação Computacional

O método proposto na seção 3 foi desenvolvido em MatLab® e executado em um notebook Intel® Core i5-3210M, 2,5 GHz 64 bits com 4 Gb de memória ddr3. Vale notar que, antes de executar o método, o problema teste passou por um reescalamto chamado "método de calibração" para reduzir os erros numéricos ao resolver o problema. Essa técnica é importante para qualquer método de resolução, mas é mais importante para os método de pontos interiores. Não é possível demonstrar que o reescalamto melhora (reduz) os erros de arredondamento, usa-se o bom senso e resultados obtidos na prática.

Vários problemas foram testados (todos retirados da internet¹), dentre eles a maioria convergiu com valores satisfatórios em pouco tempo de execução do programa. Poucos casos, como o teste "grow15.mat", não convergiram devido ao fato do problema ser mal condicionado e possuir muitos erros de arredondamento em cada iteração, após analisar os valores de γ é possível notar que o programa chega muito próximo do valor ótimo, mas devido a esses problemas ele acaba divergindo desse ponto.

Adicionamos um critério de parada ao algoritmo apresentado na seção 3 para estipular o quanto a solução obtida até aquele momento esta próxima da solução ideal. Foram estipulados três critérios para avaliar a solução e o problema converge quando todos os critério forem satisfeitos.

$$\text{cond1: } \frac{\|b-Ax\|}{1+\|b\|}$$

$$\text{cond2: } \frac{\|c-A^t y-z\|}{1+\|c\|}$$

$$\text{cond3: } \frac{|c^t x - b^t y|}{1+|c^t x|+|b^t y|}$$

A seguir temos algumas tabelas referentes aos problemas testados, apresentamos os valores de γ em cada iteração e o valor ótimo obtido ao final do experimento.

4.1 SCSD8C.MAT

Este teste se trata de uma matriz esparsa bem condicionada apenas de zeros e uns. Após executar o método, foi obtido um valor de $c^t x = 908.3333$ em 12 iterações.

Tabela 1: Dados relacionados ao teste scsd8c.mat

Iteração	γ		Iteração	γ
1	1.6814e+09		7	361.7445
2	7.8837e+07		8	89.7999
3	9.2830e+06		9	17.7728
4	2.6300e+04		10	7.2480
5	7.8436e+03		11	0.6030
6	1.2787e+03		12	1.1666e-04

¹<https://github.com/YimingYAN/LP-Test-Problems>

4.2 SHELL.MAT

Este problema teste convergiu em 34 iterações, um pouco a mais do que a maioria, com um valor $c^t x = 1.0466e - 12$. Surgiram avisos durante a fatoração de Cholesky a partir de uma determinada iteração, isso se deve ao fato da matriz ADA não ser realmente positiva definida como na teoria, gerando algumas instabilidades no processo.

Tabela 2: Dados relacionados ao teste shell.mat

Iteração	γ	Iteração	γ
1	5.7373e+40	18	1.3045e+11
2	3.3858e+40	19	1.6668e+10
3	2.3467e+40	20	1.3398e+10
4	9.5018e+39	21	5.9843e+09
5	7.1561e+38	22	3.5415e+09
6	4.3800e+36	23	1.3797e+09
7	5.9572e+34	24	7.3250e+08
8	2.9786e+30	25	5.0360e+08
9	1.4893e+26	26	3.1273e+08
10	7.4466e+21	27	1.4611e+08
11	3.7241e+17	28	8.3718e+07
12	1.0280e+14	29	4.1325e+07
13	3.9206e+13	30	1.6550e+07
14	9.1229e+12	31	1.6341e+05
15	8.5735e+12	32	8.3254
16	3.5952e+12	33	4.1868e-04
17	1.7364e+12	34	2.0934e-08

4.3 AFIRO.MAT

O último programa testado convergiu com 16 iterações e uma solução $c^t x = -464.7531$. Não houveram problemas durante a fatoração neste teste.

Tabela 3: Dados relacionados ao teste afiro.mat

Iteração	γ	Iteração	γ
1	8.5532e+34	9	1.8635e+05
2	1.3434e+34	10	2.6517e+04
3	6.7169e+29	11	2.6888e+03
4	3.3584e+25	12	496.7435
5	1.6792e+21	13	108.1844
6	8.3961e+16	14	32.5444
7	4.1981e+12	15	0.4050
8	2.1008e+08	16	2.2030e-05

5 Conclusão

O método é eficiente, possui uma base sólida que garante a convergência de um problema de PL. Podemos notar que sua convergência não é linear, basta avaliar alguns casos mostrados na seção 4 onde o γ permanece com a mesma ordem de grandeza durante 3 ou mais iterações seguidas, no entanto converge rapidamente quando próximo do valor ótimo, como no caso do teste shell.mat onde, da iteração 31 para a 32, o *gap* cai da ordem $1e + 05$ para $0.8e + 01$. Isso garante que o método seja mais eficiente se comparado aos outros métodos de pontos interiores ou de PL em geral.

Vale ressaltar que o problema grow15.mat não convergiu após 100 iterações, o *gap* começa com $\gamma = 8.3598e + 36$ e termina com $\gamma = 6.2553e - 14$ tendo como solução ótima $c^t x = -1.0687e + 08$. Isso mostra que o problema está realmente próximo de convergir, não parando devido a condição 1 do critério de parada que diminui seu valor muito lentamente. Mesmo assim, o método se mostra eficiente na maioria dos casos convergindo de forma efetiva e rápida.

Bibliografia

- L. F. Berti (2012), "Iteração Continuada Aplicada ao Método de Pontos Interiores", Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, São Paulo
- N. Karmarkar, "A new polynomial-time algorithm for linear programming", *Combinatorica*, 4 (1984), pp. 373-395
- A. M. Lima (2004), "Comparação entre diferentes abordagens do problema de fluxo de potência ótimo utilizando o método de pontos interiores", Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, São Carlos, São Paulo
- S. Mehrotra, "On the implementation of a primal-dual interior point method", *SIAM Journal on optimization*, 2 (1992), pp. 575-601