

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**GEOMETRIA DEL MOVIMIENTO DE CUERPOS  
DEFORMABLES EN SUPERFICIES CURVAS**

**Campinas - São Paulo**

**Semestre B de 2014**

**Dairo Antonio Cuellar Mateus**

**GEOMETRIA DEL MOVIMIENTO DE CUERPOS  
DEFORMABLES EN SUPERFICIES CURVAS**

Monografia presentada a la disciplina de Projeto  
Supervisionado MS777 de la Universidade Estadual  
de Campinas, en la area de Fisica Matematica

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna

**Campinas - São Paulo**

**Semestre B 2014**

# Agradecimientos

Agradezco a mi hermano Alexander por su apoyo incondicional en toda mi vida, especialmente en mi carrera universitaria, agradezco al orientador de este trabajo el Dr. Ricardo A. Mosna por su humildad al enseñar sus conocimientos de la Física Matemática y principalmente la paciencia que me reflejo durante los meses de trabajo.

Agradezco al Dr. Carlos Vera por su tiempo al enseñarme cosas fundamentales de la Física y también al Dr. Herman Muñoz Ñungo por sus consejos y motivación para hacer llegar la ciencia a todos aquellos que desean aprender de esta.

Y por último agradezco a todas esas personas que ayudaron de alguna forma a realizar este trabajo, las cuales son: Marduck Montoya, Patricia Hernandez, Olga Gutierrez y Rusbel Cuellar

# Resumen

Es un hecho bien conocido que, en el contexto de la mecánica clásica en espacios planos, no es posible tener un movimiento de traslación de un cuerpo sin la aplicación de una fuerza externa. Uno de los hechos notables de las geometrías no euclidianas es que esto se torna posible en espacios curvos. El propósito de este trabajo es analizar este fenómeno. Para eso, estudiaremos el movimiento de cuerpos cuasi-rígidos en espacios curvos, especialmente sobre superficies de revolución. En este contexto, re-obtendremos el fenómeno conocido como efecto *swimming* en mecánica clásica, en donde movimientos cíclicos de un cuerpo deformable se traducen en un movimiento de traslación, sin la acción de fuerzas externas.

# Resumo

É um fato bem conhecido que, no contexto da mecânica clássica em espaços chatos, não é possível haver movimento translacional de um corpo sem a aplicação de uma força externa. Um dos fatos notáveis de geometrias não euclidianas é que isto se torna possível em espaços curvos. O propósito deste trabalho é analisar tal fenômeno. Para isso estudaremos o movimento de corpos quase rígidos em espaços curvos, especialmente sobre superfícies de revolução. Neste contexto, reobteremos o fenômeno conhecido como efeito *swimming* em mecânica clássica, onde movimentos cíclicos de um corpo deformável se traduzem em um movimento translacional, mesmo sem a ação de forças externas.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Formalismo lagrangeano de la mecánica clásica</b>	<b>9</b>
2.1. Coordenadas generalizadas . . . . .	9
2.2. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	10
<b>3. Conceptos básicos de la geometría diferencial</b>	<b>12</b>
3.1. Curvas en el espacio . . . . .	12
3.2. Superficies . . . . .	13
3.2.1. Plano tangente y curvatura . . . . .	13
3.2.2. Curvatura Gaussiana de una superficie de revolución . . . . .	14
3.3. Geodésicas en una superficie . . . . .	15
3.3.1. Primera forma fundamental . . . . .	15
3.3.2. Curvatura de una curva en una superficie . . . . .	16
3.3.3. Geodésica . . . . .	17
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>18</b>
4.1. Sobre una esfera . . . . .	19
4.2. Sobre una superficie de revolución general . . . . .	22

# Capítulo 1

## Introducción

La aparición de la obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de Isaac Newton en el siglo XVII, generó un cambio (no inmediato), en la concepción del universo que paso de ser un universo animista a ser un universo mecánico. Al ser una máquina, su estado de configuración podría ser predicho sin dar cabida a incertezas.

El universo concebido bajo el concepto mencionado, esta enmarcado en una teoría que describe fenómenos tan complejos como la posición de los astros celestes en el sistema solar, hasta la descripción de un movimiento tan familiar para nosotros como lo es: la caída de un gato desde una altura razonable tal que el felino caiga sobre sus patas sin que haya aplicación de fuerzas externas. El gato realiza una serie de movimientos cíclicos con su cuerpo sin violar la ley de conservación del momento angular, por esto, sin importar su posición inicial en la altura, el felino consigue girar su cuerpo para caer sobre sus patas y así continuar con vida [3].

En el siglo mencionado, la geometría que mejor representaba el mundo físico era la geometría plana axiomatizada por Euclides de Alejandría y expuesta en *Los Elementos*. La geometría del espacio ha sido objeto de discusión filosófica, ya que esta pretende ser una representación fiel del universo, pero, para algunos filósofos, esta empresa es imposible de llevar a cabo [4]. En el siglo XX se modificó el método para abordar la geometría, la Geometría paso a ser un sistema que da importancia a la relación entre los objetos de esta sin dar énfasis en la definición de los objetos primitivos de estudio [5]. Con el desarrollo de las geometrías no euclidianas enmarcadas en la Geometría Diferencial, se plantearon nuevos retos para los Físicos, ya que los fenómenos estudiados anteriormente se podrían proponer en los nuevos espacios-cuervos.

A final del siglo XVIII, la Mecánica Clásica era estudiada a partir de su descripción vectorial, debido a esto, en el estudio de casos particulares como el movimiento de un péndulo en una esfera, se necesitaba realizar cálculos de bastante cuidado [6]. En el año de 1788 surgió una nueva forma de obtener las ecuaciones de movimiento de una partícula en el espacio, esta nueva forma fue introducida por Joseph Louis Lagrange, y la nueva formulación fue completamente compatible con las ecuaciones de Newton [7].

El análisis del movimiento de cuerpos en el espacio esta sujeto a la geometría del espacio y las fuerzas que actuan sobre el objeto. En el presente trabajo, el capítulo dos tratará sobre la teoría física que describe el movimiento de los cuerpos, para el caso de interés será: la formulación lagrangiana de la Mecánica Clásica. En el capítulo tres se abordará de forma somera los conceptos y definiciones de la geometría que describe el espacio en el cual estará inmerso el objeto de estudio, que al estar en una superficie de revolución, la Geometría diferencial de superficies es la que mejor se adapta. El capítulo cuatro envolverá los dos capítulos anteriores en aplicaciones, respondiendo a la pregunta que motivo este estudio: ¿un cuerpo podrá trasladarse sobre una superficie curvada, con solo realizar movimientos cíclicos de las partes que los componen?.



# Capítulo 2

## Formalismo lagrangeano de la mecánica clásica

### 2.1. Coordenadas generalizadas

Un sistema de  $n$  partículas en el espacio, requiere de  $3n$  coordenadas para realizar una descripción total de este sistema en un tiempo dado. Supongamos que existe la familia de funciones  $q_k$  tal que

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_{3n}; t) \quad k = 1, 2, \dots, 3n,$$

$$q_k = q_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}; t) \quad k = 1, 2, \dots, 3n,$$

es decir, todas las funciones  $q_k$  son dadas como función de  $x_k$  y posiblemente como función explícita del tiempo y de forma recíproca, las coordenadas  $x_k$  como función de  $q_k$  y del tiempo. A las  $q_k$  las llamamos coordenadas generalizadas. Si  $\det(\frac{\partial x_k}{\partial q_k}) \neq 0$ , entonces la inversibilidad del sistema de ecuaciones existe localmente y  $q_k = q_k(x_k; t)$  estará localmente bien definida[6]. Las velocidades de las partículas en un sistema de coordenadas cartesianas están dadas por

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k(q_j, \dot{q}_j; t) = \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t},$$

y de forma analoga se obtienen las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$ .

Para un sistema de partículas que esté sometido a un número  $s$  de restricciones del tipo cinemático, su configuración se puede describir por un número  $m$  de coordenadas generalizadas independientes tal que  $m = 3n - s$ ,  $m$  es el número de grados de libertad del sistema.

## 2.2. Ecuaciones de Lagrange

Existe una forma para llegar a las ecuaciones de movimiento que no utiliza la formulación vectorial de la mecánica Newtoniana. Desde los albores de la ciencia en Grecia, se especuló acerca de la posible trayectoria que sigue una partícula en el espacio, llegándose a formular en el siglo XVII: la luz sigue una trayectoria tal que minimiza el tiempo necesario para ir de un punto A a un punto B. Las herramientas proporcionadas por el Cálculo Diferencial ayudó a resolver problemas como el de la Braquistocrona [8], y posteriormente condujeron a lo que se conoce como el Principio de Hamilton o Principio de mínima acción

$$S(x_k(t)) = \int_{t_i}^{t_f} L(x_k(t), \dot{x}_k(t)) dt.$$

La ecuación de L llamada el Lagrangeano del sistema de partículas tiene la forma funcional

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{k=1}^{3n} \dot{x}_k^2 - V(x_k; t) = \sum_{i=1}^n (T - V),$$

en donde T y V son la energía cinética y potencial de una partícula respectivamente.

La cantidad de movimiento generalizado P de una partícula está dado por

$$P = m\dot{x}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}.$$

Para una partícula sometida a un potencial que depende solo de la posición de la partícula, entonces la fuerza generalizada viene dada por

$$F = \frac{\partial V}{\partial x_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k}.$$

Sabemos por la formulación de la segunda ley de Newton que  $F = \frac{dP}{dt}$ , así

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_k}{\partial \dot{x}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_k},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0.$$

Una de las ventajas del formalismo lagrangeano es su invarianza funcional cuando usamos coordenadas generalizadas, realizando algunos cálculos obtenemos [9]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial x_k}{\partial q_k} = 0.$$

La ecuación anterior es uno de los resultados importantes de esta formulación de la mecánica, ya que comparando las dos últimas ecuaciones, difieren por el término  $\frac{\partial x_k}{\partial q_k}$  que es diferente de cero lo cual nos queda que el término entre llaves sea nulo, así las coordenadas generalizadas nos conducen al sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuya solución, nos muestra las ecuaciones del movimiento de las partículas en el nuevo sistema de coordenadas.

Una característica bastante útil de el formalismo lagrangeano es que él nos muestra de manera particularmente simple ciertas leyes de conservación del sistema físico. Un ejemplo de esto es el caso en que el lagrangeano no depende explícitamente de una de las coordenadas que describen el sistema, digamos de  $q_1$ . En este caso decimos que tal coordenada es cíclica y ya única forma en que ella se presenta en el lagrangeano es a través de la velocidad generalizada  $\dot{q}_1$ . Cuando eso ocurre se sigue inmediatamente de las ecuaciones anteriores que el momento asociado a esta coordenada,  $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}$  es constante en el tiempo. Así, en este caso, tenemos

$$P = \text{cantidad conservada.}$$

Esto lo usaremos repetidamente en el capítulo 4.

# Capítulo 3

## Conceptos básicos de la geometría diferencial

### 3.1. Curvas en el espacio

Una curva en el espacio  $R^3$  puede ser considerada como una función vectorial diferenciable de un parámetro  $\tau$  en un intervalo  $I$ , es decir

$$\begin{aligned}\gamma &: I \rightarrow R^3, \\ \gamma(\tau) &\rightarrow (x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau)).\end{aligned}$$

El vector que expresa la velocidad de cambio de rapidez o de dirección de la curva, viene dado por

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \left( \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau} \right),$$

De forma análoga, el vector aceleración es dado por

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} = \left( \frac{d^2x_1}{d\tau^2}, \frac{d^2x_2}{d\tau^2}, \frac{d^2x_3}{d\tau^2} \right).$$

Si la curva en cuestión está parametrizada por su longitud de arco  $s$ , entonces, la magnitud de la fuerza para mantener la partícula sobre la trayectoria de  $\gamma$  la definimos como: la curvatura de la curva, y es dada por  $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$  [10]. De lo contrario puede ser obtenida por

$$\kappa = \frac{\|\gamma'' \times \gamma'\|}{\|\gamma'\|^3}.$$

## 3.2. Superficies

Tomar pedazos del plano, deformarlos y colocarlos de tal modo que la figura resultante no presente puntas, aristas o autointersecciones y que exista un plano tangente en cualquier punto de esta figura, la llamamos *superficie regular* en  $R^3$  [11], pero, demos la definición formal.

Definición: Un subconjunto  $S \subset R^3$  es una superficie regular si, para cada  $p \in S$  existe una vecindad  $W$  en  $R^3$  y una aplicación  $f: U \rightarrow W \cap S$ ,  $U \subset R^2$  tal que:

1)  $f$  es diferenciable, esto significa que  $f(\mu, \nu) = (x_1(\mu, \nu), x_2(\mu, \nu), x_3(\mu, \nu))$ , las funciones  $x_i(\mu, \nu)$   $i = 1, 2, 3$  tienen derivadas parciales continuas de todos los ordenes.

2)  $f$  es un *homeomorfismo*, como  $f$  es continua por la condición 1, esto significa que  $f$  tiene inversa  $x^{-1}: W \cap S \rightarrow U$  que es continua.

3) para todo  $w \in U$ , la diferencial  $df_w: R^2 \rightarrow R^3$  es inyectiva [11].

Existen infinitos ejemplos de superficies, pero entre las mas comunes podemos citar: la esfera, paraboloides, elipsoides y el toro. En las secciones siguientes vamos a tratar solo las superficies regulares.

### 3.2.1. Plano tangente y curvatura

Si la superficie es parametrizada por  $(\mu, \nu)$ , el vector perpendicular a la superficie en  $p_0$  es dado por  $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \mu} \times \frac{\partial f}{\partial \nu}$  evaluado en  $(\mu_0, \nu_0)$ . Note que debemos imponer la siguiente condición:  $\frac{\partial f}{\partial \mu} \times \frac{\partial f}{\partial \nu} \neq 0$ , en todos los puntos de la superficie para garantizar la existencia del plano tangente.

Al igual que en una curva, podemos hablar de la *curvatura* de una superficie en punto y lo haremos de manera informal. Para un  $p_0$  cualquiera en  $S$ , la curvatura de la superficie en este punto se puede determinar en los siguientes pasos:

a) Tomamos un vector  $\vec{v}$  unitario tangente a  $S$  en  $p_0$ .

b) El plano que se forma a partir de  $\vec{v}$  y el vector  $\mathbf{n}$  perpendicular al plano tangente en  $p_0$ , resulta ser un plano que contiene a  $p_0$  y es perpendicular a  $S$  cuya intersección con la superficie es una curva  $\gamma$  llamada sección normal en  $p_0$  en la dirección de  $\vec{v}$ .

c) Calculamos la *curvatura*  $\kappa$  de  $\gamma$  en  $p_0$ .

La curvatura normal en la dirección de  $\vec{v}$  es denotada por  $\kappa_n(\vec{v})$ . Conforme variamos  $\vec{v}$  en todas las direcciones posibles sobre una superficie, la curvatura normal tomara un valor maximo e uno minimo, que denotaremos  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  respectivamente. Tales cantidades son llamadas Curvaturas Principales en el punto considerado. Es posible mostrar[12] que las direcciones correspondientes, llamadas direcciones principales, son siempre ortogonales.

Una cantidad de suma importancia en la teoria de superficies es la Curvatura Gaussiana, construida a partir de las curvaturas principales por el producto

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

(a) Si  $K > 0$ , vemos que  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  tienen el mismo signo y la superficie localmente es similar a un domo. Un ejemplo de este caso es una esfera o un elipsoide.

(b) Si  $K < 0$ , vemos que  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  tienen signos opuestos y en tal punto  $p$  la superficie localmente tiene forma de silla. Un ejemplo de este caso es un catenoide.

(c) Si  $K = 0$  vemos que almenos una de las curvaturas principales es cero. En este caso la superficie puede ser desarrollada en u plano. Un ejemplo d este caso es un cilindro.

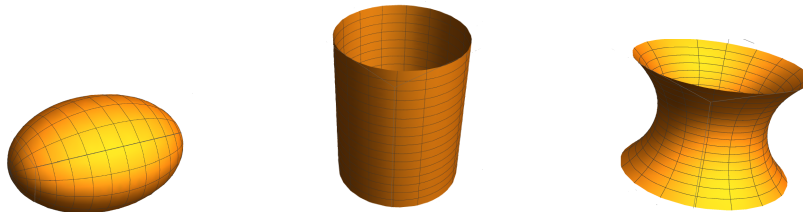


Figura 3.1: Elipsoide ( $\kappa > 0$ ), cilindro ( $\kappa = 0$ ) e catenoide ( $\kappa < 0$ )

### 3.2.2. Curvatura Gaussiana de una superficie de revolución

Los conceptos antes mencionados son suficientes para el proposito de esta sección, ya que nuestro interes esta en superficies de revolución. Sea  $\gamma(\tau) =$

$(r(\tau), z(\tau))$  una curva en  $R^2$ . Obtenemos la superficie de revolución S por medio de  $F(\tau, \theta) = (r(\tau) \cos(\theta), r(\tau) \sin(\theta), z(\tau))$ ;  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Si  $\tau$  es la longitud de arco de un meridiano dado, de la curva  $\tau \mapsto F(\tau, \theta_0)$ , entonces no es difícil mostrar que la curvatura gaussiana de S es dada por

$$K = -\frac{r''(\tau)}{r(\tau)}.$$

Volveremos a encontrar tal expresión más adelante.

En general, se  $\gamma_1$  no está parametrizada por su longitud de arco, entonces la curvatura gaussiana de S es

$$K = \frac{\|\gamma_1'' \times \gamma_1'\|}{\|\gamma_1'\|^3} \frac{1}{r(\tau)}.$$

### 3.3. Geodésicas en una superficie

#### 3.3.1. Primera forma fundamental

Para una superficie S parametrizada por  $(\mu, \nu)$ , la primera forma fundamental es una herramienta para realizar medidas como: longitud de curvas y ángulos entre dos curvas en S. Continuando con la notación del ejemplo anterior y definiendo

$$\gamma_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} \quad y \quad \gamma_2 = \frac{\partial \gamma}{\partial \nu},$$

tenemos

$$\|\gamma'(\tau)\|^2 = \left\| \frac{d\mu}{d\tau} \gamma_1 + \frac{d\nu}{d\tau} \gamma_2 \right\|^2 = \left( \frac{d\mu}{d\tau} \right)^2 \gamma_1 \cdot \gamma_1 + 2 \frac{d\mu}{d\tau} \frac{d\nu}{d\tau} \gamma_1 \cdot \gamma_2 + \left( \frac{d\nu}{d\tau} \right)^2 \gamma_2 \cdot \gamma_2.$$

Lo anterior puede ser expuesto en un arreglo matricial llamado tensor métrico,

$$g = \begin{bmatrix} \gamma_1 \cdot \gamma_1 & \gamma_1 \cdot \gamma_2 \\ \gamma_2 \cdot \gamma_1 & \gamma_2 \cdot \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces la longitud de arco de  $\gamma$  se puede escribir en términos de las componentes del tensor métrico

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b (g_{11} d\mu^2 + 2g_{12} d\mu d\nu + g_{22} d\nu^2)^{\frac{1}{2}}.$$

El término que se encuentra bajo la raíz cuadrada se conoce como la Primera Forma Fundamental [13]

### 3.3.2. Curvatura de una curva en una superficie

La curvatura de una curva sobre una superficie se obtiene de la misma forma que una curva en el espacio, así, continuando con la notación anterior, denotaremos  $\gamma_{11} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu^2}$ ,  $\gamma_{22} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \nu^2}$ ,  $\gamma_{12} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu \partial \nu}$  y  $\gamma_{21} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \nu \partial \mu}$ . De esta forma pasamos a simplificar en notación la siguiente expresión

$$\gamma'' = \mu'' \gamma_1 + \nu'' \gamma_2 + \mu'^2 \gamma_{11} + \mu' \nu' \gamma_{12} + \nu' \mu' \gamma_{21} + \nu'^2 \gamma_{22}.$$

Es posible construir un nuevo sistema de referencia cuyo origen sea un punto  $p$  en  $\gamma$ , y los vectores de la base serán:  $\frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial \mu}$ ,  $\frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial \nu}$  y  $\mathbf{n}$ . Los dos primeros vectores corresponden a la base del plano tangencial en  $p$ . Los vectores  $\gamma_{ij}$   $i, j = 1, 2$  tienen componentes en el plano tangencial y en el plano normal a la superficie, es decir

$$\gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \gamma_1 + \Gamma_{ij}^2 \gamma_2 + L_{ij} \mathbf{n},$$

El término  $L_{ij}$  corresponde a la componente de  $\gamma_{ij}$  ortogonal al espacio tangente. Usando la convención de Einstein para la suma sobre índices repetidos, la igualdad anterior nos queda

$$\gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^k \gamma_k + L_{ij} \mathbf{n}.$$

Los términos  $\Gamma_{ij}^k$  son llamados símbolos de Christoffel, los obtenemos proyectando  $\gamma_{ij}$  sobre  $\gamma_l$ , así

$$\gamma_{ij} \cdot \gamma_l = \Gamma_{ij}^k g_{kl},$$

de forma que

$$\Gamma_{ij}^k = (\gamma_{ij} \gamma_l) g^{lk},$$

en donde  $g^{lk}$  es la matriz inversa de  $g$ . Esta comprobado que [14]

$$\Gamma_{ij}^k = (\gamma_{ij} \gamma_l) g^{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial \mu^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \mu^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \mu^l} \right) g^{lk},$$

lo cual muestra que los símbolos de Christoffel pueden ser obtenidos a partir del tensor métrico correspondiente de la superficie.

Ahora podemos escribir  $\gamma''$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (\mu^i)'' \gamma_i + (\mu^i)' (\mu^j)' \gamma_{ij} = (\mu^i)'' \gamma_i + (\mu^i)' (\mu^j)' (\Gamma_{ij}^k \gamma_k + L_{ij} \mathbf{n}) \\ &= ((\mu^k)'' + (\mu^i)' (\mu^j)' \Gamma_{ij}^k) \gamma_k + (\mu^i)' (\mu^j)' L_{ij} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Los términos  $(\mu^k)'' + \Gamma_{ij}^k (\mu^i)' (\mu^j)'$  se encuentran en el plano tangencial a la superficie y el término  $(\mu^i)' (\mu^j)' L_{ij}$  está en el plano normal a  $S$  y es llamado la Segunda Forma Fundamental.



### 3.3.3. Geodésica

Una *geodésica* es la curva de mínima longitud entre dos puntos y que está totalmente contenida en la superficie a la cual pertenecen los puntos. En el plano, la curva más corta entre dos puntos es la línea recta y es carente de curvatura, de forma análoga en superficies con curvatura no nula, la geodésica no posee curvatura con respecto a la superficie, es decir, la componente tangencial de  $\gamma''$  es cero,

$$(\mu^k)'' + (\mu^i)'(\mu^j)'\Gamma_{ij}^k = 0.$$

El sistema de ecuaciones anterior nos muestra la forma final en las que aparecen las componentes de  $\gamma''$  en el plano tangencial. Si una *geodésica* debe cumplir con lo anterior, entonces se esperaría que la solución a este sistema de ecuaciones nos resulte en las componentes de  $\gamma$  sobre la superficie, así esta curva  $\gamma$  no posee curvatura con respecto a la superficie.

Es interesante notar que los símbolos de Christoffel pueden hallarse a partir de la Primera Forma Fundamental, entonces podemos afirmar que la curvatura de una geodésica es una propiedad intrínseca a la superficie, por que se obtiene a partir de medidas hechas con elementos de la superficie.

Lo expuesto hasta aquí, nos da las herramientas suficientes para resolver nuestro problema. Los cálculos que se encuentran en las aplicaciones siguientes fueron realizados en Wolfram Mathematica.

# Capítulo 4

## Aplicaciones

Consideraremos aquí un cuerpo cuasi-rigido que puede ser pensado como un robot de dos brazos que forma un trípede similar a la figura siguiente.

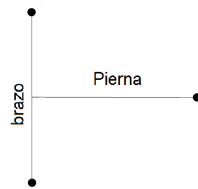


Figura 4.1: Robot.

El robot estará posicionado sobre una superficie de revolución tal que los brazos permanezcan sobre geodésicas de la superficie, las posiciones de las tres partículas. El tamaño de la pierna del robot puede variar con el tiempo y su longitud será denotada por  $a(t)$ . El brazo también puede variar de tamaño con el tiempo y la longitud en el instante  $t$  será denotada por  $b(t)$  (Figura 4.2). Consideraremos simple que el brazo tiene un movimiento simétrico con respecto al punto de intersección, que llamaremos el corazón del robot. Vamos suponer que las únicas fuerzas que actúan sobre el robot son fuerzas internas, es decir, el robot puede aumentar o disminuir  $a(t)$  y  $b(t)$  (usando para esto alguna reserva interna de energía), pero nada externo actúa sobre él.

Describiendo esta situación, planteamos la siguiente pregunta ¿Si la fuerza externa sobre el robot es nula, podrá obtener un desplazamiento con respecto a la superficie con solo ejecutar el movimiento oscilatorio de sus brazos en

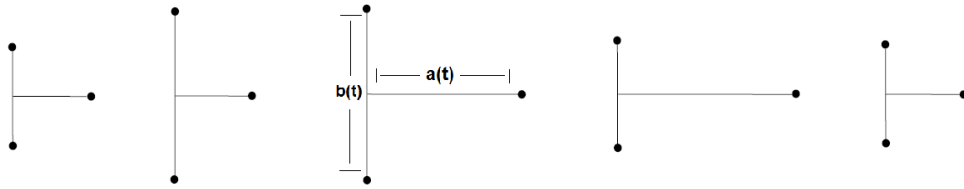


Figura 4.2: Movimiento oscilario del robot.

un ciclo de este?

## 4.1. Sobre una esfera

Comenzaremos analizando el caso mas simple, en que la superficie en la que está el robot tiene curvatura constante, una esfera de radio  $R$ . Por la simetria del problema y ya que las geodésicas en una esfera son sus circulos maximos, podemos suponer que nuestro robot posicionara la pierna sobre el ecuador y su brazo sobre un meridiano de la esfera.

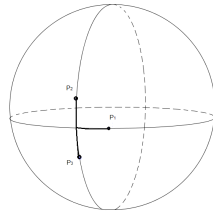


Figura 4.3:

Sea  $P_0 = (R \cos(\alpha), R \sin(\alpha), 0)$  las coordenadas del corazon del robot (punto de intersección entre su brazo y su pierna), el cual sera utilizado como marco de referencia en los calculos siguientes. Con eso las posiciones de las tres particulas vienen dadas por:

- (1)  $P_1 = (R \cos(\alpha + \frac{a}{R}), R \sin(\alpha + \frac{a}{R}), 0)$ : posición de la masa en la pierna.

(2)  $P_2 = (R \cos(\frac{b}{2R}) \cos(\alpha), R \cos(\frac{b}{2R}) \sin(\alpha), R \sin(\frac{b}{2R}))$ : posición de la masa en la parte superior del brazo.

(3)  $P_3 = (R \cos(\frac{b}{2R}) \cos(\alpha), R \cos(\frac{b}{2R}) \sin(\alpha), -R \sin(\frac{b}{2R}))$ : posición de la masa en la parte inferior del brazo.

Note que denotamos el ángulo azimutal del corazón del robot ( $P_0$ ) por  $\alpha$ . Para saber si el robot obtiene un desplazamiento neto al final de los movimientos internos, necesitamos saber como evoluciona la posición de  $P_0$  con el tiempo, y para eso usaremos el formalismo lagrangeano expuesto en el capítulo 2. Asumiremos que las tres partículas tienen masas de igual valor, así el Lagrangiano del sistema será

$$L = \frac{m}{4} (\dot{b}^2 + 2R^2(1 + \cos(\frac{b}{R}))\dot{\alpha}^2 + 2(\dot{a} + R\dot{\alpha})^2).$$

Notemos inicialmente que  $L$  no depende de  $\alpha$  (apenas de  $\dot{\alpha}$ ) y por tanto el momento generalizado  $P$  de esta coordenada será conservado, como vimos en 2.2. Luego

$$P = \frac{m}{4} [4R^2(1 + \cos(\frac{b}{R}))\dot{\alpha} + 4(\dot{a} + R\dot{\alpha})] = cte.$$

Suponiendo que el robot se encuentra inicialmente en reposo tenemos que el momento angular generalizado de  $\alpha$  es cero. Luego

$$\dot{\alpha} = -\frac{\dot{a}}{R(2 + \cos(\frac{b(t)}{R}))}.$$

Esto representa como se da la variación de la velocidad generalizada  $\dot{\alpha}$  que esta directamente relacionada con  $a$  y  $b$ . Si nos remitimos al espacio de forma de  $ab$  señalando una región cerrada que indique un ciclo del movimiento de los dos brazos, entonces estaremos próximos a responder la pregunta que nos plantemos.

En este punto debemos hacer unos comentarios acerca de los movimientos de la pierna y el brazo del robot. Las longitudes de la pierna y el brazo son descritas por  $a(t)$  y  $b(t)$  en cada instante  $t$ . Des esta forma, estos valores los podemos entender como parejas ordenadas de un plano cuyos ejes de referencia son  $a$  y  $b$  como se muestra en la figura siguiente

Podemos entonces escribir el desplazamiento total  $\Delta\alpha$  del cuerpo a través de la ecuación anterior como a integral de línea

$$\Delta\alpha = \oint_C A_a da + A_b db$$

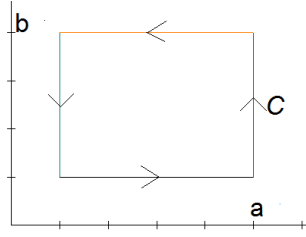


Figura 4.4:

donde  $C$  es el camino que el cuerpo describe en el espacio  $ab$ . Note que  $C$  es una curva cerrada ya que el movimiento del cuerpo es cíclico. En este caso, vimos arriba que  $A_a$  y  $A_b$  pueden ser escritos como

$$\vec{A} = (A_a, A_b) = \left( -\frac{1}{R(2 + \cos(\frac{b}{R}))}, 0 \right).$$

Se sigue entonces del teorema de Stokes que

$$\Delta\alpha = \iint_{\Sigma} \nabla \times A \, dadb$$

donde  $\Sigma$  es la region del plano  $ab$  cuyo contorno es la curva cerrada  $C$ .

Para nuestro ejemplo, donde  $\vec{A}$  es dado arriba, tenemos entonces

$$\Delta\alpha = \iint_{\Sigma} \frac{\sin(\frac{b}{r})}{r^2(2 + \cos(\frac{b}{r}))^2} \, dadb.$$

Como el integrando es estrictamente positivo, concluimos que el punto de intersección  $P_0$  obtiene un desplazamiento neto sobre la superficie de la esfera despues de un ciclo de movimientos como el de la figura 4.2. Luego, el robot puede desplazarse sobre la esfera realizando solamente movimientos internos, sin aplicacion de fuerzas externas.

## 4.2. Sobre una superficie de revolución general

Siendo la esfera un caso particular de una superficie de revolución, nos proponemos generalizar el resultado anterior. En esta sección la superficie

$$F(\tau, \theta) = (r(\tau) \cos(\theta), r(\tau) \sin(\theta), z(\tau))$$

sobre la cual analizaremos los movimientos del robot, en general no posee curvatura constante (ya que  $r(\tau)$  no es constante), como se mostro en 3.2.3.

Supongamos que la pierna del robot se encuentra en el paralelo en el cual  $r(\tau)$  toma su valor maximo  $R$  y seleccionemos el origen de tau sobre tal paralelo. De esta forma el brazo del robot estará sobre un meridiano de  $S$ .

De esta forma, la posición 1 es facilmente obtenida en estas coordenadas,

$$P_1 = \left( R \cos\left(\alpha + \frac{a}{R}\right), R \sin\left(\alpha + \frac{a}{R}\right), z_0 \right),$$

donde  $\alpha$  es el angulo azimutal del corazon del robot. Para obtener las posiciones de las partículas 2 y 3 debemos tener en cuenta que el perfil de  $r = r(\tau)$  es desconocido en este caso. No entanto, veremos que cuando  $a$  y  $b$  son suficientemente pequeños, podemos obtener expresiones para el movimiento de traslación del robot en terminos de una expansión en serie.

Vamos entonces a considerar que la superficie de revolución en cuestion es obtenida tomando el parametro  $\tau$  en la ecuación de arriba como siendo la longitud de arco de un meridiano. Vamos a escoger el origen de  $\tau$  como siendo el punto donde  $r = R$  y  $z = z_0$  como descrito arriba. Con eso tenemos que la posición de la particula 2 es dada, segun la parametrización  $F$  arriba, por  $P_2 = F(b/2, \alpha)$ . Analogamente,  $P_3 = F(-b/2, \alpha)$ . Aun en esas coordenadas tenemos  $P_0 = F(0, \alpha)$  y  $P_1 = F(0, \alpha + \frac{a}{R})$  El lagrangeano de una particula libre se escribe en estas coordenadas como

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{\tau}^2 + r(\tau)^2 \dot{\theta}^2 \right).$$

Suponiendo que todas las masas de las particulas que componen el robot sean iguales tenemos entonces que el lagrangeano para este caso es dado por

$$L = \frac{m}{4} \left[ \dot{b}^2 + 4r\left(\frac{b}{2}\right)^2 \dot{\alpha}^2 + 2R^2 \left( \frac{\dot{a}}{R} + \dot{\alpha} \right)^2 \right].$$

El procedimiento a seguir es el mismo que el efectuado en la esfera, de este modo nos interesa saber si existe variación en la posición de  $P_0$ . Notemos

que  $L$  no depende de  $\alpha$ , así, derivamos parcialmente  $L$  con respecto a  $\dot{\alpha}$  obteniendo el momento angular de esta variable y por la ley de conservación del momento, este será constante (inicialmente el robot está en reposo, luego el momento generalizado de  $\alpha$  es cero), obteniendo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{m}{R} [R^2 \dot{a} + R (2r(\frac{b}{2})^2 + R^2) \dot{\alpha}] = 0,$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{R\dot{a}}{2r(\frac{b}{2})^2 + R^2}.$$

Nuevamente, podemos obtener el desplazamiento total  $\Delta\alpha$  del corazón del robot a través de una integral de línea en el espacio  $ab$ . Tenemos:

$$\Delta\alpha = \oint_C A_a da + A_b db$$

donde  $C$  es el camino que el cuerpo describe en el espacio  $ab$ . Vemos arriba que tenemos aquí

$$\vec{A} = (A_a, A_b) = \left( -\frac{R}{2r(\frac{b}{2})^2 + R^2}, 0 \right).$$

Se sigue nuevamente del teorema de Stokes que

$$\Delta\alpha = \iint_{\Sigma} B da db$$

donde  $B = \nabla \times A$  y  $\Sigma$  es la región del plano  $ab$  cuyo contorno es la curva cerrada  $C$ . En nuestro caso,

$$B = -\frac{2Rr(\frac{b}{2})r'(\frac{b}{2})}{(2r(\frac{b}{2})^2 + R)^2}.$$

Vamos nos especializarnos en el caso en que el cuerpo tiene dimensiones suficientemente pequeñas, de manera que  $a$  y  $b$  son muy pequeños con respecto a  $R$ . En este caso, podemos expandir  $B$  en una serie de Taylor obteniendo

$$B \cong \frac{b}{9R} \left( -\frac{r''(0)}{r(0)} \right).$$

Como vimos en la sección 3.2, la expresión entre parentesis es exatamente la curvatura gaussiana  $K_0$  de la superficie en el punto en que estamos haciendo la expansion. De esta forma, podemos reescribir tal resultado como

$$B \cong \frac{b K_0}{9 R}.$$

Volviendo a la integral que determina  $\Delta\alpha$ , tenemos:

$$\Delta\alpha = \int_0^{\delta a} \int_0^{\delta b} B \, da db$$

y asi

$$\Delta\alpha = K_0 \frac{\delta a \delta b^2}{18R}.$$

Vemos de esa forma que el robot puede nadar siempre que la superficie tiene curvatura. Además de eso, mudando el signo de la curvatura, se invierte la dirección del movimiento neto del cuerpo.



# Bibliografía

- [1] Marcelo Alonso y Edward J. Finn, *FISICA, Vol 1: Mecanica*, versión en español de Carlos Hernandez y Victor Latorre, Addison-Wesley(1970).
- [2] Jack Wisdom, “Swimming in Space-Time: Motion by Cyclic Changes in Boody Shape”, *Science*, **299**, 1865(2003).
- [3] E. Putterman y O. Raz, “The square cat”. *Am. J. Phys.* **76**, 1040(2008).
- [4] German Guerrero Pino, “Teoria Kantiana del Espacio, Geometria y Experiencia”, Uni. del Valle. Disponible en: [praxis.univalle.edu.co/numeros/n20/german\\_guerrero\\_pino.pdf](http://praxis.univalle.edu.co/numeros/n20/german_guerrero_pino.pdf)
- [5] Jaime Escobar Acosta, *Elementos de Geometria*, Uni. de Antioquia. Disponible en: [matematicas.udea.edu.co/~jescobar/Geometria/](http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/Geometria/)
- [6] Victor Bernardo Chabu, “Introdução à Mecânica Lagrangiana”, (2011).
- [7] Stephen T. Thorton y Jerry B, Marion, *Classical Dinamics of Particles and systems*, fifth edition, Thomson Brooks/cole.
- [8] George F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones y Notas Historicas*, Segunda edición, Mc Graw Hill(1993)
- [9] David Tong. *Classical Dynamics*, Uni. of Cambridge, notas de clase. Disponible en: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics.html>
- [10] Lia Vas. *Differential Geometry*. Disponible en: <http://www.usciences.edu/lvas/math430/Curves.pdf>
- [11] Manfredo P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas y Superficies*, septima edición, Textos Universitarios IMPA.

- [12] Lia Vas. Differential Geometry. Disponible en:  
<http://www.usciences.edu/lvas/math430/Surfaces.pdf>
- [13] Lia Vas. Differential Geometry. Disponible en:  
[http://www.usciences.edu/lvas/math430/Surfaceparte\\_2.pdf](http://www.usciences.edu/lvas/math430/Surfaceparte_2.pdf)
- [14] Lia Vas. Differential Geometry. Disponible en:  
[http://www.usciences.edu/lvas/math430/Surfacespart\\_3.pdf](http://www.usciences.edu/lvas/math430/Surfacespart_3.pdf)
- [15] Jorge Mujica, Notas de Topologia Geral, notas de clase , semestre A de 2013, IMECC-UNICAMP