

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

MS877 - PROJETO SUPERVISIONADO II

# INTERPOLAÇÃO SINC

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

Aluna: Ana Paula Magalhães dos Santos Oliveira

RA: 101461

Campinas, 2014

## Resumo

Este projeto, desenvolvido no período de Fevereiro de 2014 a Julho de 2014, teve como objetivo o estudo e análise da Transformada de Fourier. A Transformada de Fourier é um tipo de transformada integral que expressa uma função em uma base de funções trigonométricas, ou seja, como soma de senos e cossenos multiplicados por seus respectivos coeficientes. No decorrer do projeto foram investigadas suas propriedades e aplicações bem como sua utilidade na teoria dos sinais. Tal estudo propiciou, então, a análise e demonstração do Teorema de Shannon. Finalmente, baseando-se em resultados anteriormente obtidos, foi feito um estudo introdutório sobre o problema da reamostragem uniforme.

# 1 Introdução

A Transformada de Fourier, desenvolvida pelo matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), é uma das mais importantes ferramentas matemáticas e é utilizada em várias áreas da ciência. Esta transformada expressa uma função em termos de funções trigonométricas, isto é, como soma de funções sinusoidais multiplicadas por coeficientes (amplitudes). Quando aplicada a uma imagem no domínio espacial gera uma informação no domínio da frequência, em que cada ponto representa a quantidade de uma dada frequência contida no domínio espacial da imagem.

A Transformada de Fourier tem várias aplicações tais como na Acústica, na Mecânica Quântica, na Geofísica, dentre outros. Em particular, na Sísmica, esta transformada tem papel determinante nas áreas ligadas ao tramento e processamento de sinais, sons e imagens, pois a versão discreta da Transformada de Fourier (*Discrete Fourier Transform* - DFT) pode ser calculada rapidamente por computadores, utilizando algoritmos baseados na Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT).

A Teoria da Informação é um ramo derivado da Matemática Aplicada, Engenharia elétrica e Ciência da Computação e tem como trabalho introdutório o artigo "*A Mathematical Theory of Communication*", publicado em 1948 pelo matemático americano C. E. Shannon (1916-2001). Com o passar do tempo, a Teoria da Informação tem atingido diversos campos de atuação da Matemática à Neurobiologia, passando pela Física, Ciência da Computação e Linguística.

Entretanto, neste primeiro trabalho, Shannon dedicou-se principalmente ao estudo do processamento de sinais, estudo este que tem seus principais resultados apoiados na Análise de Fourier. A grande ocorrência da chamada função seno cardinal ou função *sinc* faz com que esta desempenhe um papel fundamental nas áreas ligadas ao tratamento de sinais.

A função seno cardinal é definida por:

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \sin(\pi t)/\pi t, & \text{se } t \neq 0 \\ 1, & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Um dos resultados mais importantes que envolvem a função *sinc* é o **Teorema de Amostragem de Shannon** ou **Teorema de Amostragem de Nyquist–Shannon**, resultado fundamental para o processo de reamostragem uniforme por meio de interpolação *sinc*.

## 2 A Transformada de Fourier

Para obtermos a transformada de Fourier consideremos a série de Fourier de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida no intervalo  $-l \leq x \leq l$ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\pi x/l} \quad (1)$$

onde  $a_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-in\pi t/l} dt$ .

Fazendo  $l$  tender ao infinito e substituindo  $a_n$  em (1) temos que:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-in\pi t/l} dt \right) e^{in\pi x/l} \right] \quad (2)$$

$$= \lim_{l \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{in\pi(x-t)/l} dt \right] \quad (3)$$

O objetivo é reconhecer a soma do lado direito da equação como a soma de Riemann de uma integral. Denotemos, então,  $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$  e  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}$ . Teremos:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) e^{\omega_n i(x-t)} dt \right] \Delta\omega \quad (4)$$

Seja  $F_l(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) e^{\omega_n i(x-t)} dt$ .

Reescrevendo a soma em (4) teremos:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_l(\omega_n) \Delta\omega \quad (5)$$

A equação em (5) lembra-nos a definição da soma da Riemann da integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} F_l(\omega) d\omega$ . Se  $l$  converge para o infinito a quantidade  $\Delta\omega$  converge para zero, e, então,  $\Delta\omega$  torna-se o  $d\omega$  na integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} F_l(\omega) d\omega$ .

Desta forma, podemos reescrever (4) da seguinte maneira:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_l(\omega) d\omega \quad (6)$$

Com  $l$  tendendo ao infinito  $F_l(\omega)$  pode ser reconhecida como a integral  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\omega i(x-t)} dt$ . Logo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\omega i(x-t)} dt d\omega \quad (7)$$

ou ainda:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega \quad (8)$$

Denotemos por  $\hat{f}(\omega)$  a quantidade entre os parêntesis na equação (8), ou seja:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (9)$$

A função  $\hat{f}(\omega)$  é chamada de **Transformada de Fourier** (ou Transformada de Fourier Complexa) de  $f$ .

Formalizando a definição, temos que:

**DEFINIÇÃO 2.1:** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A Transformada de Fourier  $\hat{f}(\omega)$  de  $f(t)$  é dada por:*

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

*se a integral existir. Neste caso, podemos ainda definir (para todo  $t$ ):*

$$f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

*onde  $\mathcal{F}^{-1}$  é um símbolo que denota a Transformada de Fourier Inversa.*

## 2.1 Propriedades Básicas da Transformada de Fourier

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções diferenciáveis definidas na reta real com  $f(t)=0$  para altos valores de  $|t|$  e  $c$  uma constante real qualquer. Então, valem as seguintes propriedades:

- *Linearidade:* Tanto a Transformada de Fourier quanto a Transformada de Fourier Inversa são operadores lineares:

$$\mathcal{F}[f + cg] = \mathcal{F}[f] + c\mathcal{F}[g] \quad (10)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f + cg] = \mathcal{F}^{-1}[f] + c\mathcal{F}^{-1}[g] \quad (11)$$

- *Translação e Escala:* Sejam  $a$  e  $b$  constantes reais arbitrárias, então:

$$\mathcal{F}[f(bt - a)](\omega) = \frac{1}{b} e^{-i\omega a/b} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{b}\right) \quad (12)$$

- *Simetria:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\hat{f}(\omega)](-t) \quad (13)$$

## 2.2 Alguns Exemplos

Para fixação da teoria até aqui apresentada foram resolvidos exercícios que envolviam o cálculo da Transformada de Fourier e a aplicação de suas propriedades. Abaixo, seguem alguns exemplos de algumas funções especiais.

### 2.2.1 Função Retangular

A função retangular pode ser definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sabemos que  $f(t)e^{-i\omega t} = f(t)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$ . Temos que  $f$  é uma função par, logo  $f(t)\sin(\omega t)$  é uma função ímpar e sua integral sobre a reta real é nula. Assim sendo, a Transformada de Fourier pode ser calculada por:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t) dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega\pi} = \text{sinc}(\omega)$$

A Transformada de Fourier da função retangular é a função *sinc*. Abaixo podemos ver o gráfico da função e da sua transformada.

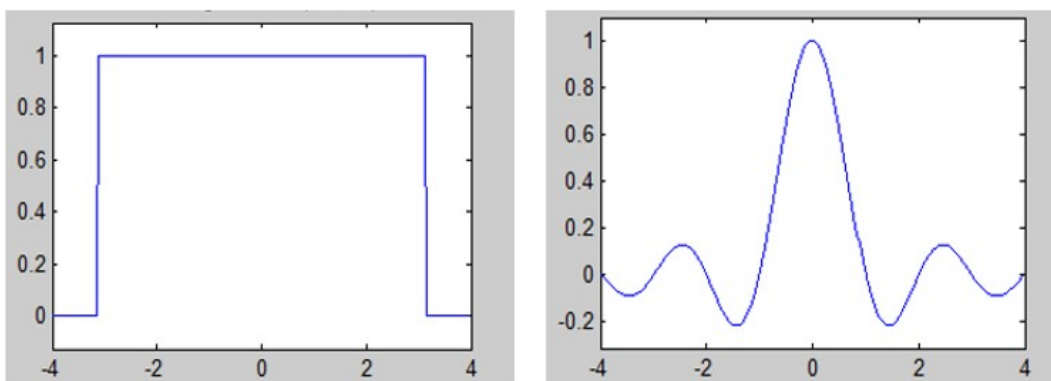


Figura 1: À esquerda o gráfico da Função Retangular e à direita o gráfico de sua Transformada de Fourier

### 2.2.2 Função Delta de Dirac

A função Delta de Dirac, função pulso ou função  $\delta$  é uma função (ou distribuição) que é nula em todos os pontos da reta real com exceção do zero. Assim, informalmente, podemos defini-la da seguinte maneira:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{se } t = 0 \\ 0, & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

Esta função é muito utilizada em muitas áreas da Matemática e em especial no processamento de sinais. Ela tem muitas propriedades interessantes, dentre elas temos que para uma função  $f$  integrável, vale que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \quad (14)$$

sendo  $a$  uma constante real arbitrária.

Desta forma, tomando  $a = 0$ , podemos obter a Transformada de Fourier de forma direta:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = f(0)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = f(0) = \exp(0) = 1$$

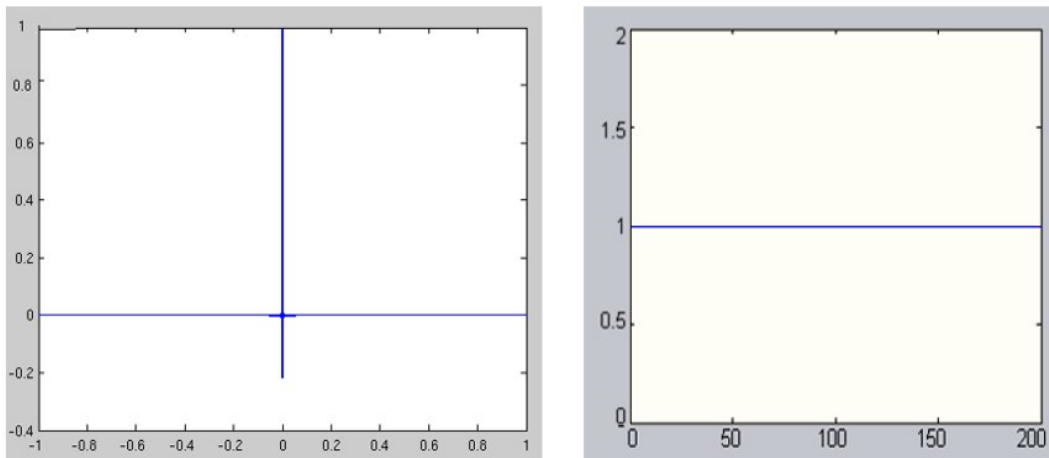


Figura 2: À esquerda o gráfico da Função Delta de Dirac e à direita o gráfico de sua Transformada de Fourier

### 2.2.3 Função Gaussiana

A Função Gaussiana  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = Ke^{-t^2/a^2}$ , com  $a \neq 0$  e  $K$  constantes reais quaisquer. Calculando sua Transformada de Fourier temos que:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-t^2/a^2} e^{-i\omega t} dt$$

$$\hat{f}(\omega) = K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/a^2 - i\omega t} dt$$

Multiplicando e dividindo o termo da direita por  $e^{-a^2\omega^2/4}$ , temos que:



$$\hat{f}(\omega) = K e^{-a^2\omega^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-t^2/a^2 - i\omega t + a^2\omega^2/4)} dt$$

$$\hat{f}(\omega) = K e^{-a^2\omega^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t/a + ia\omega/2)^2} dt$$

$$\hat{f}(\omega) = K e^{-a^2\omega^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(t+ia^2\omega/2)/a]^2} dt$$

$$\hat{f}(\omega) = K' e^{-a^2\omega^2/4}$$

onde  $K'$  é uma constante. Desta forma, a Transformada de Fourier de uma função gaussiana também é uma função gaussiana como visto nos gráficos abaixo, para os quais considerou-se  $K = a = 1$ .

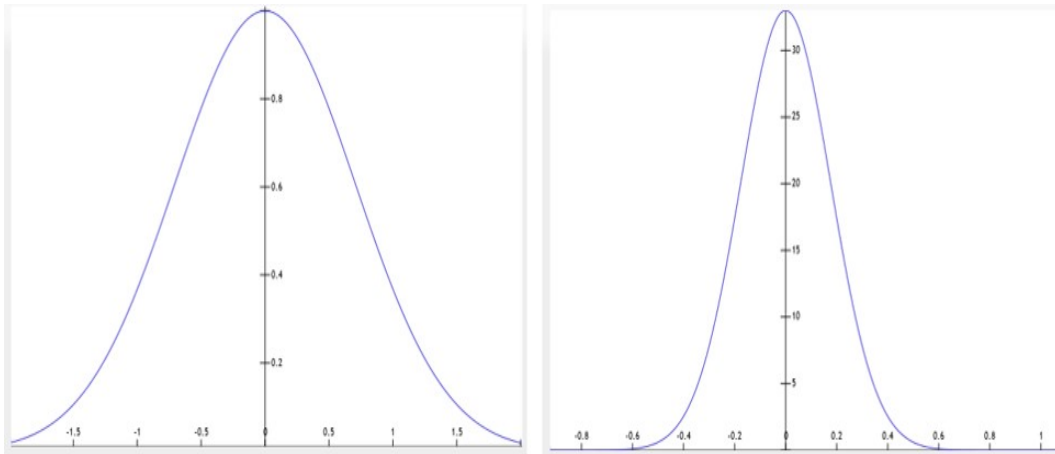


Figura 3: À esquerda o gráfico da Função Gaussiana e à direita o gráfico de sua Transformada de Fourier

### 2.2.4 Função Triangular

A função Triangular pode ser definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calculando sua Transformada de Fourier temos que:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^0 (1+t)e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 (1-t)e^{-i\omega t} dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \left[ \frac{1+i\omega}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} \right] - \left[ \frac{i\omega-1}{\omega^2} + \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} \right]$$

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{e^{-i\omega}(e^{i\omega}-1)^2}{\omega^2} = -\frac{e^{-i\omega}[e^{i\omega/2}(e^{i\omega/2}-e^{-i\omega/2})]^2}{\omega^2} = -\frac{e^{-i\omega}e^{i\omega}(2i)^2 \sin^2(\omega/2)}{\omega^2}$$

Sabendo que  $\omega = 2\pi F$ , sendo  $F$  a frequência, temos que:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sin^2(\pi F)}{(\pi F)^2} = \left( \frac{\sin(\pi F)}{\pi F} \right)^2 = \text{sinc}^2(F)$$

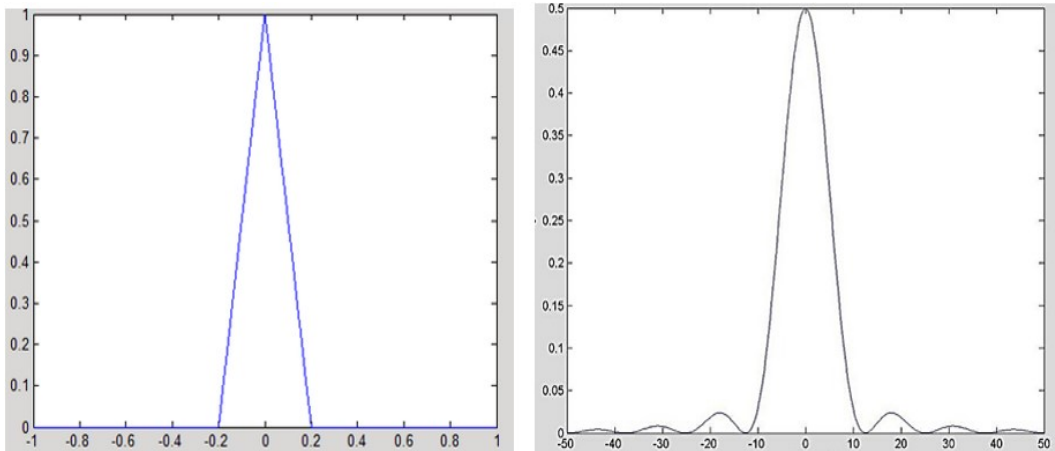


Figura 4: À esquerda o gráfico da Função Triangular e à direita o gráfico de sua Transformada de Fourier

## 2.3 O Teorema da Convolução

Um dos mais importantes resultados envolvendo a Transformada de Fourier é o Teorema da Convolução, pois segue deste resultado que a convolução no domínio do tempo ou espaço corresponde à multiplicação no domínio da frequência, e vice-versa. Desta forma, este teorema geralmente possibilita que os cálculos para obtenção da Transformada de Fourier tornem-se mais curtos e elegantes. Abaixo segue o teorema e sua demonstração.

DEFINIÇÃO 2.2: *Dadas duas funções  $f$  e  $g$ , a convolução  $f * g$  é definida por:*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

TEOREMA 2.1: *Consideremos duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  e suas respectivas Transformadas de Fourier  $\hat{f}(\omega)$  e  $\hat{g}(\omega)$ . Então:*

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

ou seja:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)] = f(t) * g(t)$$

DEMONSTRAÇÃO: Das definições 2.1 e 2.2 temos que:

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx \right) dt$$

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(x) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-x)} g(t-x) dt \right) dx$$

Fazendo uma substituição de variáveis  $u = t - x$ , teremos:

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega u} g(u) du$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t) * g(t)](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

provando o teorema. □

### 2.3.1 Um exemplo envolvendo o Teorema da Convolução

No exemplo 2.2.4 vimos uma definição para a Função Triangular. Entretanto, existe uma outra expressão matemática para esta função, sendo esta a convolução da Função Retangular, como vista no exemplo 2.2.1, com ela mesma. Denotemos agora a função triangular como  $\Lambda(t)$  e a função retangular como  $\Pi(t)$ . Assim sendo, temos que:

$$\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$$

Calculando sua Transformada de Fourier utilizando o Teorema da Convolução, teremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Lambda(t)](\omega) &= \mathcal{F}[\Pi(t) * \Pi(t)](\omega) = \mathcal{F}[\Pi(t)](\omega)\mathcal{F}[\Pi(t)](\omega) \\ &\Rightarrow \mathcal{F}[\Lambda(t)](\omega) = \text{sinc}(\omega)\text{sinc}(\omega) = \text{sinc}^2(\omega)\end{aligned}$$

Como esperado, houve uma redução significativa no número de cálculos necessários para obtenção da Transformada de Fourier.

## 3 O Teorema de Amostragem de Shannon

O Teorema de Shannon é um dos resultados mais importantes envolvendo a função *sinc*. A partir dele, podemos utilizar a interpolação *sinc* para reamostrar uma função com espaçamento não uniforme, possibilitando o processamento do sinal. Este teorema afirma que uma função pode ser completamente determinada a partir de uma amostra discreta (ainda que infinita) de seus valores. A reconstrução é feita através da superposição de funções *sinc* em cada ponto da amostra. Abaixo o teorema e sua demonstração.

**TEOREMA 3.1:** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\hat{f}$  sua Transformada de Fourier. Se  $f$  for de banda limitada, ou seja,  $\hat{f}(\omega) = 0$ , para  $|\omega| \geq \Omega > 0$  então para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $0 < \Delta t < \pi/\Omega$ ,*

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t_j) \text{sinc}\left(\frac{t - t_j}{\Delta t}\right),$$

onde  $t_j = t_0 + j\Delta t$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

DEMONSTRAÇÃO: Expandamos a função  $e^{i\omega t}$  em série de Fourier no intervalo  $[-\Omega, \Omega]$ :

$$e^{i\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-2i\pi n\omega/\Omega} \quad (15)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} e^{-2i\pi n\omega/\Omega} d\omega$$

Se  $\Delta t = \pi/\Omega$  e  $t_n = n\Delta t$ , segue que:

$$a_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega(t-t_n)} d\omega = \frac{\sin(\pi(t-t_n)/\Delta t)}{\pi(t-t_n)/\Delta t} = \text{sinc}\left(\frac{(t-t_n)}{\Delta t}\right) \quad (16)$$

Logo, podemos reescrever (15) da seguinte maneira:

$$e^{i\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{(t-t_n)}{\Delta t}\right) e^{i\omega t_n}, \quad \omega \in [-\Omega, \Omega] \quad (17)$$

Sabendo que  $f(t)$  é de banda limitada temos que:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{(t-t_n)}{\Delta t}\right) e^{i\omega t_n} d\omega \quad (18)$$

Retirando o somatório da integral teremos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{(t-t_n)}{\Delta t}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_n} d\omega \quad (19)$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{(t-t_n)}{\Delta t}\right) f(t_n) \quad (20)$$

provando o teorema. □

A partir de uma amostra discreta de uma função, o Teorema de Shannon nos oferece o valor exato desta em qualquer ponto, daí a importância deste

resultado. Mesmo que não seja possível obter um número infinito de amostras o teorema ainda fornece uma aproximação muito boa se tivermos um grande número de amostras uniformemente espaçadas.

## 4 A Transformada de Fourier Discreta

A Transformada de Fourier Discreta (DFT - *Discrete Fourier Transform*) é uma aproximação para a Transformada de Fourier tal qual vimos na seção 2. A DFT é de fundamental importância no desenvolvimento de algoritmos computacionais, pois ela substitui um contínuo de valores por um conjunto discreto de pontos, aproximando o valor da integral de Riemann na Transformada de Fourier para um somatório. Desta forma, podemos dizer que a DFT é o equivalente da Transformada de Fourier contínua para sinais com um número finito de amostras.

Seja  $f$  uma função real com um número  $N$  de amostras. Para obter a DFT de uma Transformada de Fourier devemos realizar uma discretização ao longo do eixo  $t$  e  $\omega$ . Para isso, consideremos que esta função atende às condições de contorno de Dirichlet nos pontos abaixo:

$$t_j = t_0 + j\Delta t \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad \Delta t \in \mathbb{R} \quad (21)$$

Assim, esta aproximação da Transformada de Fourier pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \approx \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)e^{-i\omega t_j} \quad (22)$$

Agora, para obtermos a inversa da DFT devemos fazer uma discretização ao longo do eixo  $\omega$ . Utilizando o Teorema de Shannon, e sabendo que  $\Delta t$  é conhecido, definimos  $\omega_c = \pi/\Delta t$ . Sabendo que necessitamos de pelo menos o mesmo número de pontos da amostra inicial para recuperá-la totalmente, podemos escrever:

$$\omega_k = k\Delta\omega \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad \Delta\omega = \frac{2\omega_c}{N} \quad (23)$$

Assim, a inversa da Transformada de Fourier pode ser aproximada por:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \approx \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(\omega_k) e^{i\omega_k t} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(\omega_k) e^{i\omega_k t} \quad (24)$$

Entretanto, vale ressaltar que a Transformada de Fourier Discreta nem sempre oferece bons resultados. Em alguns casos de funções que não tem banda limitada ou não tem suas amostras com espaçamento uniforme o método não oferecerá resultados satisfatórios. Neste último caso, é necessário realizar uma reamostragem uniforme, como discutiremos na seção 6.

## 5 A Transformada Rápida de Fourier

Vale mencionar que a Transformada Rápida de Fourier (FFT - *Fast Fourier Transform*) é uma maneira particular de fatorar e rearranjar os termos da DFT. O algoritmo, que baseia-se no método de dobramentos sucessivos, foi desenvolvido pelos matemáticos J. W. Cooley e J. W. Tukey e tem grande importância devido à redução drástica do número de operações numéricas requeridas com relação aos algoritmos que utilizam a DFT. Se tivéssemos, por exemplo,  $N$  amostras de um sinal, o cálculo da DFT deste sinal exigiria  $N^2$  multiplicações. Já com a Transformada Rápida de Fourier o número de multiplicações é cortado para  $(N/2)\log_2 N$ .

Devido a sua eficiência e melhora significativa com relação à DFT a FFT é utilizada na maioria dos algoritmos computacionais aplicados ao processamento de sinais.

## 6 O Problema da Reamostragem Uniforme

A maioria dos algoritmos para o processamento de sinais requer que as amostras de uma função ou sinal estejam igualmente espaçadas em uma grade cartesiana regular. Entretanto, na maioria das vezes, as amostras de um sinal não estão uniformemente espaçadas, por isso é necessário realizar um processo de reamostragem, ou seja, temos que interpolar estas amostras não uniformes em um conjunto de pontos igualmente espaçados, de modo que o sinal torne-se processável.

Consideremos, então, uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , amostrada em um conjunto, finito cujo os pontos não estão uniformemente espaçados. Este conjunto

pode ser definido por  $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_k\}$ , com  $\tau_i \in \mathbb{R}$  e  $i \in K = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ . Para resolver o problema da reamostragem uniforme temos que encontrar uma aproximação para a função em um conjunto de pontos uniformemente espaçados. Desta maneira, temos que aproximar  $f(t_j)$ , onde  $t_j = t_0 + j\Delta t$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $j \in N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Como visto na seção 3, o Teorema de Shannon pode ser utilizado para calcular o valor de uma função em qualquer ponto, mas, como aqui não temos uma amostra infinita o teorema oferece-nos uma boa aproximação. Assim sendo, se as hipóteses do teorema forem satisfeitas, vale que:

$$f(\tau_i) \approx \sum_{j=1}^n f(t_j) \text{sinc}\left(\frac{\tau_i - t_j}{\Delta t}\right), \quad i \in K \quad (25)$$

Quando analisamos a equação (25), para cada  $i \in K$ , podemos escrever um sistema linear do tipo:

$$Ax = b \quad (26)$$

onde  $A$  é uma matriz real de ordem  $k \times n$  que contém os coeficientes de interpolação,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor das amostras uniformes e  $b \in \mathbb{R}^k$  é o vetor das amostras não uniformes. A matriz  $A$ , denominada matriz dos coeficientes da interpolação *sinc*, tem como elementos os coeficientes  $a_{ij} = \text{sinc}[(\tau_i - t_j)/\Delta t]$ , enquanto que  $x_j = f(t_j)$  e  $b_i = f(\tau_i)$  com  $j \in N$  e  $i \in K$ .

Para resolver este sistema linear podemos fazer uso de alguns algoritmos. O processo de *Reamostragem Uniforme Simples* utiliza-se do algoritmo URS (*Uniform ReSampling*) que computa a solução do sistema fazendo uso da matriz pseudoinversa  $A^+$  de  $A$ . Já o processo de *Reamostragem Uniforme por Blocos* utiliza-se do algoritmo BURS (*Block Uniform ReSampling*) que computa uma aproximação  $\bar{A}^+$  para a pseudoinversa da matriz  $A$ , de forma que esta aproximação possui na maior parte elementos nulos, o que aumenta a eficiência do algoritmo. Em ambos os algoritmos, utiliza-se a Decomposição em Valores Singulares (*Singular Value Decomposition* - SVD) para o cálculo da pseudoinversa.

Como os aspectos computacionais destes algoritmos não foram analisados no decorrer do projeto, os detalhes sobre construção e funcionamento deles não serão aqui explicitados.



## 7 Conclusão

No decorrer deste projeto foram estudados com detalhes o desenvolvimento da definição da Transformada de Fourier, suas propriedades e suas aplicações na Teoria dos Sinais. Com a resolução de vários exercícios, como aqueles destacados na subseção 2.2, foi possível adquirir familiaridade com a teoria estudada. Estes exercícios possibilitaram ainda um estudo mais particular da função seno cardinal, uma vez que ela é muito recorrente na Análise de Fourier.

O estudo da Transformada de Fourier e da função *sinc* propiciaram, então, a interpretação e demonstração do Teorema de Shannon, um resultado fundamental para o processo de reamostragem uniforme por meio de interpoladores *sinc*.

Com o estudo do Teorema de Shannon, pôde-se ainda estudar a Transformada de Fourier Discreta (DFT) e a Transformada Rápida de Fourier (FFT), que consistem em discretizações da Transformada de Fourier contínua. A maioria de algoritmos para processamento de sinais utiliza a FFT, por conta de sua maior rapidez com relação à DFT.

Em última instância, foi realizado um estudo introdutório sobre o processo de reamostragem uniforme de sinais com amostras que não estão uniformemente espaçadas. Este problema consiste na solução do sistema linear  $Ax = b$ .

Como os aspectos computacionais e algorítmicos do processo de reamostragem uniforme não foram detalhadamente analisados, as diferentes maneiras de resolver o sistema linear supracitado não foram completamente explanadas.

## 8 Agradecimentos

Ao Professor Lúcio pela orientação e ao PIBIC/SAE pelo fomento.

## 9 Referências

- [1] A. Bogges e F. J. Narcowich, *A First Course in Wavelets and Fourier Analysis*, Wiley, 2009.
- [2] Ana Carolina Camargo, *Reamostragem Uniforme Utilizando a Função sinc*. Dissertação de Mestrado, 2006.
- [3] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier, 2005.
- [4] W. B. Gearhart e H.S. Schultz, *The Function  $\frac{\sin x}{x}$* , The College Mathematics Journal, 1990.
- [5] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal, 1948.