Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MS777 - Estágio Supervisionado I

Instabilidade de um filme líquido em um plano inclinado

Aluno: Henrique Pelisson Chimetta - RA: 081613
Orientador: Prof. Dr. Erick de Moraes Franklin

Departamento de Energia
Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas

Dezembro de 2014

Resumo

Este projeto é referente a um estudo realizado no primeiro semestre de 2014 no curso Instabilidades Hidrodinâmicas do programa de pós-graduação da FEM-Unicamp, onde todo o estudo é baseado em [1]. Nesse trabalho fazemos um estudo da instabilidade em escoamento de um filme líquido em um plano inclinado. Encontramos as condições de contorno do problema e as condições na interface, que requerem um tratamento mais detalhado. Trabalhamos aqui com os modos normais e fazemos um estudo do problema linearizado, ou seja, desprezamos qualquer termos que não sejam de primeira ordem. Por fim chegamos na equação que governa o problema a eq. de Orr-Sommerfeld.

Características do problema

Consideremos um filme líquido (fluido incompressível) de espessura h, viscosidade μ e densidade ρ escoando sobre um plano inclinado com um ângulo θ com respeito a horizontal (fig. 1). A interface com gás a pressão ambiente P_0 possui uma tensão superficial γ.

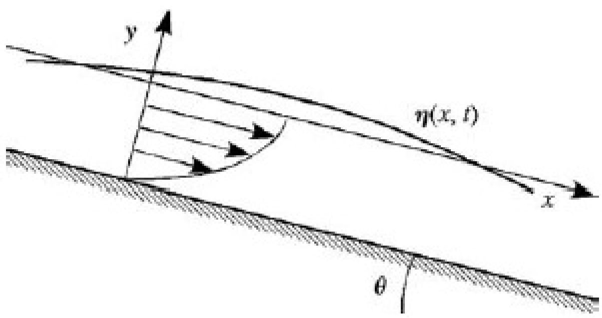

Figura 1: Filme escoando sobre um plano inclinado mostrando o perfil parabólico para uma interface planar e a posição interfacial perturbada, $\eta(x, t)$. Retirado de [1].

As equações de Navier-Stokes, sujeitas as condições de contorno de não-deslizamento na superfície inferior e pressão constante P_0 na superfície livre, possui uma solução paralela permanente para o escoamento (referente ao estado estacionário), correspondendo a uma interface plana e a um perfil de velocidade parabólico:

$$\overline{U}(y) = U_0(1 - y^2/h^2), \tag{1}$$

$$\overline{V}(y) = 0, \tag{2}$$

$$\overline{P}(y) - P_0 = -\rho g y \cos\theta, \tag{3}$$

onde a velocidade U_0 da interface é definida como

$$U_0 = \frac{\rho g h^2 \sin\theta}{2\mu}. \tag{4}$$

Essa solução mostra as escalas naturais do problema: a espessura h do filme, a densidade do fluido ρ e a velocidade U_0 do fluido na interface.

Equações de conservação e condições de contorno

O teorema de Squire, que diz que em escoamentos paralelos os modos iniciais mais instáveis são bi-dimensionais, nos permite, para um estudo linear, considerarmos somente perturbações 2D, o que também é válido para um escoamento com interface [2]. Portanto, para encontrarmos condições críticas é suficiente considerar o problema plano definido pela eqs. de Navier-Stokes nas direções x e y e pelas condições de contorno na parede e na interface gás-líquido. As condições na parede são as condições de não-deslizamento:

$$U = 0, \quad V = 0 \quad \text{em} \quad y = -h. \tag{5}$$

Na interface temos dois tipos de condições; cinemática, que reflete a impermeabilidade da interface, e a dinâmica devido as tensões. Essa condições envolvem os vetores unitários normal e tangencial a interface. definidos como

$$\vec{n} = \frac{(-\partial_x \eta, 1)}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2}}, \qquad \vec{t} = \frac{(1, \partial_x \eta)}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2}}, \tag{6}$$

onde $\eta(x,t)$ é a posição da interface. A condição cinemática é que a velocidade normal $\vec{U}\cdot\vec{n}$ do fluido na interface deve ser igual a velocidade normal da interface $\vec{w}\cdot\vec{n} = \partial_t\eta/\sqrt{1+(\partial_x\eta)^2}$. As condições dinâmicas referem-se a (i) a continuidade da tensão tangencial e (ii) ao salto na tensão normal devido a tenão superficial. Como a tensão no fluido é $\Sigma\cdot\vec{n}$, onde Σ é o tensor de tensões, o efeito do ar reduz a uma tensão puramente normal $-P_0\vec{n}$, a condição dinâmica é escrita como

$$\begin{aligned} \vec{t}\cdot(\Sigma\cdot\vec{n}) &= 0 \quad \text{em} \quad y=h, & (7)\\ \vec{n}\cdot(\Sigma\cdot\vec{n}) - \vec{n}\cdot(-P_0\vec{n}) &= \frac{\gamma}{R} \quad \text{em} \quad y=h, & (8) \end{aligned}$$

onde $R^{-1} = -\nabla\cdot\vec{n} = \partial_{xx}\eta/[1+(\partial_x\eta)^2]^{3/2}$ é a curvatura da interface.

Equações para as condições na interface

Como estamos em um escoamento bi-dimensional o tensor de tensões é dado por

$$\Sigma = \tau_{xx}\vec{e_x}\vec{e_x} + \tau_{yx}\vec{e_y}\vec{e_x} + \tau_{xy}\vec{e_x}\vec{e_y} + \tau_{yy}\vec{e_y}\vec{e_y} - P\vec{e_x}\vec{e_x} - P\vec{e_x}\vec{e_x}, \tag{9}$$

com isso temos que

$$\vec{t}\cdot(\Sigma\cdot\vec{n}) = -\frac{\partial_x\eta\tau_{xx}}{1+(\partial_x\eta)^2} + \frac{\tau_{xy}}{1+(\partial_x\eta)^2} - \frac{(\partial_x\eta)^2\tau_{yx}}{1+(\partial_x\eta)^2} + \frac{\partial_x\eta\tau_{yy}}{1+(\partial_x\eta)^2} = 0. \tag{10}$$

As tensões para um fluido imcompressível são

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right), \quad \tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial V}{\partial y}, \tag{11}$$

substituindo em (10) temos

$$\vec{t}\cdot(\Sigma\cdot\vec{n}) = -\frac{2\mu\partial_x\eta}{1+(\partial_x\eta)^2}(\partial_x U - \partial_y V) + \mu\frac{1-(\partial_x\eta)^2}{1+(\partial_x\eta)^2}(\partial_x V + \partial_y U) = 0. \tag{12}$$

Para o termo normal temos

$$\vec{n}\cdot(\Sigma\cdot\vec{n}) = \frac{(\partial_x\eta)^2\tau_{xx}}{1+(\partial_x\eta)^2} - \frac{(\partial_x\eta)\tau_{xy}}{1+(\partial_x\eta)^2} - \frac{(\partial_x\eta)\tau_{yx}}{1+(\partial_x\eta)^2} + \frac{\tau_{yy}}{1+(\partial_x\eta)^2} - \frac{(\partial_x\eta)^2 P}{1+(\partial_x\eta)^2} - \frac{P}{1+(\partial_x\eta)^2}, \tag{13}$$

e $\vec{n}\cdot(-P_0\vec{n}) = -P_0$. Substituindo as tensões em (8) encontramos

$$\vec{n}\cdot(\Sigma\cdot\vec{n}) - \vec{n}\cdot(-P_0\vec{n}) = -P + \frac{2\mu}{1+(\partial_x\eta)^2}[(\partial_x\eta)^2\partial_x U + \partial_y V - \partial_x\eta(\partial_x V + \partial_y U)] + P_0 = \frac{\gamma}{R}. \tag{14}$$

Escoamento perturbado, linearização e modos normais

Escolhemos a espessura h como a escala de comprimento e h/U_0 como escala de tempo e introduzimos a função corrente ψ da perturbação via

$$U = \overline{U} + \partial_y\psi, \qquad V = \overline{V} - \partial_x\psi = -\partial_x\psi, \tag{15}$$

e considerando perturbações na forma de modos normais

$$\psi(x,y,t) = \hat{\psi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \qquad \eta(x,y,t) = \hat{\eta}(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \alpha = kh, \tag{16}$$

onde k é o comprimento de onda. Com isso as condições na parade (5) ficam da forma

$$D\hat{\psi}(-1) = 0, \tag{17}$$

$$\hat{\psi}(-1) = 0, \tag{18}$$

onde D é o operador d/dy. A eq. para a condição cinemática é dada por

$$U(-\partial_x\eta) + V = \partial_t\eta, \qquad \text{em} \qquad y = \eta, \tag{19}$$

onde desprezamos termos de ordem 2, ou seja, qualquer produto de perturbações, pois estamos fazendo uma análise linear da instabilidade. Substituindo as perturbações em

(19) temos

$$\hat{\psi}_{(0)} - (c-1)\hat{\eta} = 0, \tag{20}$$

onde o índice subscrito indica que o termos é avaliado em $y = 0$. Para a condição dinâmica vamos começar com o termo $\vec{t} \cdot (\Sigma \cdot \vec{n}) = 0$. Substituindo as perturbações em (12) e novamente desprezando termos de oredem 2 ou superior temos

$$\alpha^2 \hat{\psi} e^{i\alpha(x-ct)} + D^2 \hat{\psi} e^{i\alpha(x-ct)} + D\overline{U} = 0. \tag{21}$$

Para $y = \eta$ e expandindo $D\overline{U}$ em série de Taylor em torno de zero, $D\overline{U} = D\overline{U}_{(0)} + D^2\overline{U}_{(0)}\eta + O(\eta^2) = D^2\overline{U}_{(0)}\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)}$, pois $\overline{U}_0$ é máximo, encontramos

$$\begin{aligned} \alpha^2 \hat{\psi}_{(0)} e^{i\alpha(x-ct)} + D^2 \hat{\psi}_{(0)} e^{i\alpha(x-ct)} + D^2\overline{U}_{(0)}\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)} &= 0 \rightarrow &(22)\\ D^2\hat{\psi}_{(0)} + \alpha^2\hat{\psi}_{(0)} + \hat{\psi}D^2\overline{U}_{(0)} &= 0. &(23) \end{aligned}$$

Para a outra parte da condição dinâmica temos que substituir os modos normais em (14), assim

$$P_0 - P - 2i\mu\alpha[D\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} + \hat{\eta}D\overline{U}e^{i\alpha(x-ct)}] = \frac{\gamma}{R} = -\gamma\nabla\cdot\vec{n} = \frac{\gamma\partial_{xx}\eta}{[1+(\partial_x\eta)^2]^{3/2}} = -\gamma\alpha^2\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)}, \tag{24}$$

diferenciando ao longo da superfície $\frac{\partial}{\partial s} = \nabla() \cdot \vec{t}$

$$-\underbrace{\frac{\partial P}{\partial s}}_{1} - 2i\mu\alpha\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial s}[D\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)}]}_{2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}[\hat{\eta}D\overline{U}e^{i\alpha(x-ct)}]}_{3}\right] = -\gamma\alpha^2\underbrace{\frac{\partial}{\partial s}[\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)}]}_{4}, \tag{25}$$

resolvendo cada termo separadamente temos,

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial s} &= \partial_x P + \partial_y P i\alpha\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)},\\ 2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial s}[D\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)}] &= i\alpha D\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)},\\ 3 \rightarrow \frac{\partial}{\partial s}[\hat{\eta}D\overline{U}e^{i\alpha(x-ct)}] &= i\alpha\hat{\eta}D\overline{U}e^{i\alpha(x-ct)}],\\ 4 \rightarrow \frac{\partial}{\partial s}[\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)}] &= i\alpha\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)}, \end{aligned}$$

substituindo em (25) encontramos

$$-\partial_x P - \partial_y P i\alpha\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)} + 2\mu\alpha^2[D\hat{\psi} + \hat{\eta}D\overline{U}]e^{i\alpha(x-ct)} = -i\alpha^3\gamma\hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)}. \tag{26}$$

Para darmos continuidade precisamos eleminar os termos de pressão, para fazermos isso utilizamos a eq. de Navier-Stokes $\partial_t\vec{U} + \vec{U}\cdot\nabla\vec{U} = -\nabla P/\rho + \mu\nabla^2\vec{U}/\rho + \vec{g}$, separada nas componentes x e y, ou seja,

$$\begin{aligned} \partial_t U + U\partial_x U + V\partial_y U &= -\frac{\partial_x P}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 U + g_x, & (27)\\ \partial_t V + U\partial_x V + V\partial_y V &= -\frac{\partial_y P}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 V + g_y, & (28)\end{aligned}$$

fazendo as substituições das velocidades perturbadas e desprezando termos de ordem 2 encontramos

$$\begin{aligned} -\partial_x P &= -i\rho\alpha c D\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} + i\rho\alpha\overline{U}D\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} - i\rho\alpha D\overline{U}\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} \\ &\quad -\mu D^2\overline{U} + \alpha^2\mu D\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} - \mu D^3\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} - g_x\rho, & (29)\\ -\partial_y P &= -\alpha^2 c\rho\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} + \rho\alpha^2\overline{U}\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} - i\mu\alpha^3\hat{\psi} + i\mu\alpha D^2\hat{\psi}e^{i\alpha(x-ct)} - g_y\rho. & (30)\end{aligned}$$

Substituindo agora os termos de pressão em (26) e novamente desprezando os termos de ordem 2 chegamos a

$$\begin{aligned} &-D^3\hat{\psi} - ic\alpha\frac{\rho}{\mu}D\hat{\psi} + i\alpha\frac{\rho}{\mu}\overline{U}D\hat{\psi} - i\alpha\frac{\rho}{\mu}D\overline{U}\hat{\psi} - D^2\overline{U}e^{-i\alpha(x-ct)} \quad + \\ &3\alpha^2 D\hat{\psi} - g_x\frac{\rho}{\mu}e^{-i\alpha(x-ct)} - i\alpha\frac{\rho}{\mu}\hat{\eta}g_y + 2\alpha^2\hat{\eta}D\overline{U} + \frac{i\alpha^3\gamma}{\mu}\hat{\eta} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Na interface temos

$$-D^3\hat{\psi}_{(0)} + \left[3\alpha^2 - i\alpha c\frac{\rho}{\mu} + i\alpha\frac{\rho}{\mu}\overline{U}_{(0)}\right]D\hat{\psi}_{(0)} - D^2\overline{U}e^{-i\alpha(x-ct)} - g_x\frac{\rho}{\mu}e^{-i\alpha(x-ct)} + i\alpha\left[-\frac{\rho g_y}{\mu} + \frac{\alpha^2\gamma}{\mu}\right]\hat{\eta} = 0, \tag{32}$$

fazendo as substituições de $\overline{U}$, $g_x = g\sin\theta$ e $g_y = g\cos\theta$ encontramos

$$-D^3\hat{\psi}_{(0)} + \left[3\alpha^2 - \frac{i\alpha Re}{h}\left(\frac{c}{U_0} - 1\right)\right]D\hat{\psi} + i\alpha \mathrm{Re} U_0\left[\frac{1}{\mathrm{Fr}h^2} + \frac{\alpha^2}{\mathrm{We}}\right]\hat{\eta} = 0, \qquad (33)$$

onde

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_0 h}{\mu}, \quad \mathrm{Fr} = \frac{U_0^2}{gh\cos\theta} = \frac{\mathrm{Re}\tan\theta}{2}, \quad \mathrm{We} = \frac{\rho U_0^2 h}{\gamma}, \qquad (34)$$

são os números de Reynolds, Froude e Weber, respectivamente, que medem a importância da inércia em relação a viscosidade, gravidade e tensão superficial. Fazendo $U_0 = 1$ e $h = 1$ a equação fica da forma

$$-D^3\hat{\psi}_{(0)} + [3\alpha^2 - i\alpha\mathrm{Re}(c-1)]D\hat{\psi}_{(0)} + i\alpha\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{Fr}} + \frac{\alpha^2}{\mathrm{We}}\right]\hat{\eta} = 0. \qquad (35)$$

Assim as eqs. (17), (18), (20), (23) e (35) correspondem as condições de contorno cinemática e dinâmica do nosso problema. Encontradas as condições de contorno do problema precisamos agora derivar a equação que rege o problema. Utilizando as eqs. (27) e (28) (eq. de Navier-Stokes), derivando a primeira em relação à y, a segunda em relação à x e substituindo as velocidades pelas respectivas funções corrente $U = \partial_y\psi$ e $V = -\partial_x\psi$ e subtraindo uma da outra para eliminarmos os termos de pressão temos

$$(\partial_t + \overline{U}\partial_x)\nabla^2\psi - \partial_{yy}\overline{U}\partial_x\psi = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\partial_{xx} + \partial_{yy})^2\psi, \qquad (36)$$

fazendo a substituição $\psi = \hat{\psi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}$ na equação chegamos

$$(D^2 - \alpha^2)\hat{\psi} = i\alpha\mathrm{Re}[(\overline{U} - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2\overline{U}]\hat{\psi}, \qquad (37)$$

que é conhecida como equação de Orr-Sommerfeld. Essa equação possui solução analítica somente em casos particulares. Formas de encontrar a solução vão desde análise assintótica à métodos numéricos, como a utilização de diferenças finitas, que é de fácil implementação porém mais instável. O mais comum é a utilização de métodos espectrais, onde projeta-se $\hat{\psi}$ em uma base de funções adequada, comumente funções de Tchebichev.

São métodos mais estáveis e possuem alta precisão.

Considerações finais

Quando um escoamento viscoso possui uma interface deformável, efeitos inerciais pequenos podem fazer surgir instabilidades. Neste projeto temos um caso particalar desses efeitos. Aqui fizemos em detalhes um tratamento linear para as instabilidades que surgem no escoamento de um filme líquido em um plano inclinado. Utilizamos para isso os modos normais, que consiste em termos oscilatórios, dependentes do tempo e os termos da perturbação propriamente dita que dependem somente da coordenada y. Foram encontradas as condições de contorno do problema e as condições na interface devido as tensões. Por fim chegamos a eq. de Orr-Sommerfeld, uma equação de quarta ordem que possui solução analítica somente em casos particulares.

Referências Bibliográficas

[1] Charru, F. 2011 *Hydrodynamic Instabilities*. Cambridge University Press.

[2] Hesla, T. I., Pranckh, F. R. and Preziosi, L. 1986 Squire's theorem for two stratified fluids. *Phys. Fluids* 29(9), 2808–11.

[3] Criminale, W. O., Jackson, T. L. and Joslin, R. D. 2003 *Theory and Computation in Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.