

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

MS877 - Estágio Supervisionado II

Instabilidades em um escoamento de Couette sobre um fundo ondulado

Aluno: Henrique Pelisson Chimetta - RA: 081613

Orientador: Prof. Dr. Erick de Moraes Franklin

Departamento de Energia
Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas

Dezembro de 2014

Resumo

Este projeto é referente à um seminário apresentado ao final do curso Instabilidades Hidrodinâmicas no primeiro semestre de 2014 do programa de pós-graduação da FEM-Unicamp e é todo baseado em [1]. Fazemos um estudo das instabilidades em escoamento de Couette sobre um fundo ondulado, que revela três regimes para as perturbações criadas pelo fundo, cada regime sendo caracterizado pela profundidade de penetração das perturbações da vorticidade e pelo número de Reynolds efetivo.

Objetivo e características do problema

Considere um escoamento de Couette de uma camada de fluido com viscosidade cinemática ν e espessura h sobre um fundo ondulado da forma $\hat{\eta}_* \cos kx$ (figura 1 abaixo), onde k é o número de onda e $*$ significa que a variável possui dimensão.

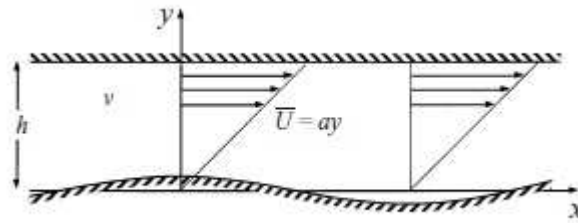


Figura 1: Escoamento de Couette sobre um fundo ondulado. Retirado de [1].

Os objetivos principais desse trabalho são: (i) encontrar quão distante a perturbação induzida pelo fundo ondulado penetra no fluido, isto é, sua ‘profundidade de penetração’ δ , e (ii) estimar efeitos inerciais, ou seja, o número de Reynolds efetivo, Re_{eff} .

A velocidade $\vec{u} = (U, V)$ e a pressão P são consideradas como uma superposição de um escoamento base $\bar{U}_* = ay$, $\bar{V}_* = 0$, $\bar{P}_* = 0$, correspondendo à um fundo plano e perturbações u , v e p criadas pelo fundo ondulado. Como unidades características do problema escolhemos k^{-1} para comprimento e a^{-1} (inverso da taxa de deformação) como unidade de tempo. O problema depende de dois parâmetros adimensionais: a espessura

α da camada de fluido e do comprimento viscoso β :

$$\alpha = kh, \quad \beta = \left(\frac{k^2 \nu}{a} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

Por conveniência também definimos um número de Reynolds Re , que será uma medida adimensional da taxa de deformação:

$$Re := \frac{ah^2}{\nu} = \frac{\alpha^2}{\beta^3}. \quad (2)$$

Equações Adimensionais

Antes de prosseguir com nossa análise utilizaremos as unidades características para derivarmos a equação de Navier-Stokes adimensional, que será utilizada para encontrarmos as equações das perturbações. A equação de Navier-Stokes é dada por,

$$\frac{\partial \vec{V}_*}{\partial t_*} + \vec{V}_* \cdot \nabla_* \vec{V}_* = -\frac{1}{\rho} \nabla_* P_* + \nu \nabla_*^2 \vec{V}_*, \quad (3)$$

onde ρ é a densidade e ν é a viscosidade cinemática. Usando as unidades características, obtemos as seguintes transformações para as variáveis adimensionais,

$$\vec{V} = \vec{V}_* \frac{a^{-1}}{k^{-1}}, \quad x = \frac{x_*}{k^{-1}}, \quad y = \frac{y_*}{k^{-1}}, \quad t = \frac{t_*}{a^{-1}}, \quad P = \frac{P_* a^{-2}}{\rho k^{-2}},$$

Substituindo essas transformações na eq. de Navier-Stokes temos,

$$\begin{aligned} \frac{k^{-1}}{a^{-2}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \frac{k^{-1}}{a^{-1}} \right) \cdot \left[\frac{1}{k^{-1}} \nabla \left(\vec{V} \frac{k^{-1}}{a^{-1}} \right) \right] &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{k^{-1}} \left(\rho \frac{k^{-2}}{a^{-2}} P \right) + \frac{\nu}{k^{-2}} \nabla^2 \left(\vec{V} \frac{k^{-1}}{a^{-1}} \right) \rightarrow \\ \frac{k^{-1}}{a^{-2}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{k^{-1}}{a^{-2}} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} &= -\frac{k^{-1}}{a^{-2}} \nabla P + \frac{\nu}{k^{-1} a^{-2}} \nabla^2 \vec{V} \rightarrow \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} &= -\nabla P + \frac{\nu k^2}{a} \nabla^2 \vec{V} \rightarrow \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} &= -\nabla P + \beta^3 \nabla^2 \vec{V}. \end{aligned} \quad (4)$$

A eq.(4) é a eq. de Navier-Stokes adimensional para o nosso problema. A eq. da Continuidade (conservação da massa) permanece da mesma forma. Usaremos a eq.(4) com as componentes x e y separadas. Componente x ,

$$\partial_t U + U \partial_x U + V \partial_y U = -\partial_x P + \beta^3 \nabla^2 U, \quad (5)$$

e para a componente y ,

$$\partial_t V + U \partial_x V + V \partial_y V = -\partial_y P + \beta^3 \nabla^2 V. \quad (6)$$

Problema Linearizado

Levando em conta a simetria do problema ($x \rightarrow x + 2\pi$), buscamos uma solução estacionária para as perturbações da forma

$$(u, v, p) = \frac{1}{2}((\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{p}(y))e^{ix} + c.c.), \quad (7)$$

onde $c.c.$ significa complexo conjugado. Para ondas com pequenas inclinações ($\hat{\eta} := k\hat{\eta}_* \ll 1$), buscamos as soluções substituindo as velocidades e pressão (escoamento base + perturbações) nas equações de Navier-Stokes e da massa. Para a eq. da massa temos,

$$\begin{aligned} \partial_x U + \partial_y V &= \partial_x(\bar{U} + u) + \partial_y(\bar{V} + v) = \partial_x u + \partial_y v = 0 \\ i\hat{u} + \partial_y \hat{v} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Para a conservação do momento em x temos,

$$\begin{aligned} (\bar{U} + u)\partial_x(\bar{U} + u) + (\bar{V} + v)\partial_y(\bar{U} + u) &= -\partial_x(\bar{P} + p) + \beta^3 \nabla^2(\bar{U} + u) \rightarrow \\ \bar{U}\partial_x u + u\partial_x u + v\partial_y \bar{U} + v\partial_y u &= -\partial_x p + \beta^3(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u), \end{aligned}$$

desprezando os termos de ordem 2, chegamos à

$$iy\hat{u} + \hat{v} = -i\hat{p} + \beta^3(-\hat{u} + \partial_y^2\hat{u}). \quad (9)$$

Note que a velocidade $\bar{U} = y$ que é adimensional (mesmo procedimento das equações).

Para y temos,

$$\begin{aligned} (\bar{U} + u)\partial_x(\bar{V} + v) + (\bar{V} + v)\partial_y(\bar{V} + v) &= -\partial_y(\bar{P} + p) + \beta^3\nabla^2(\bar{V} + v) \rightarrow \\ \bar{U}\partial_x v + u\partial_x v + v\partial_y v &= -\partial_y p + \beta^3(\partial_x^2 v + \partial_y^2 v), \end{aligned}$$

novamente desprezando os termos de ordem 2 obtemos

$$iy\hat{v} = -\partial_y\hat{p} + \beta^3(-\hat{v} + \partial_y^2\hat{v}). \quad (10)$$

Com isso temos nosso sistema de equações,

$$\begin{aligned} i\hat{u} + \partial_y\hat{v} &= 0 \\ iy\hat{u} + \hat{v} &= -i\hat{p} + \beta^3(-\hat{u} + \partial_y^2\hat{u}) \\ iy\hat{v} &= -\partial_y\hat{p} + \beta^3(-\hat{v} + \partial_y^2\hat{v}), \end{aligned}$$

e as condições de contorno de não deslizamento nas paredes:

$$\hat{u}(0) = -\hat{\eta}, \quad \hat{v}(0) = 0, \quad (11)$$

$$\hat{u}(\alpha) = 0, \quad \hat{v}(\alpha) = 0. \quad (12)$$

Como nosso problema é linear, podemos impor a condição de normalização $\hat{\eta} = 1$.

Solução exata para o problema linearizado e ‘diagrama de fase’

A solução exata do nosso sistema pode ser obtida a partir da equação da vorticidade (adimensional):

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \beta^3[(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} + \nabla^2\vec{\omega}]. \quad (13)$$

Considerando uma perturbação para ω da mesma forma das velocidades e pressão, temos

$$\begin{aligned} U\partial_x\omega + V\partial_y\omega &= \beta^3\nabla^2\omega & \rightarrow \\ (\bar{U} + u)i\hat{\omega} + v\partial_y\omega &= \beta^3(-\hat{\omega} + \partial_y^2\hat{\omega}) & \rightarrow \\ iy\hat{\omega} &= \beta^3(-\hat{\omega} + \partial_y^2\hat{\omega}). \end{aligned} \quad (14)$$

Através da transformação $z = e^{i\pi/6}(y - i\beta^3)/\beta$, podemos por a eq.(14) na forma da eq. de Airy padrão $\partial_y^2\hat{\omega} - z\hat{\omega} = 0$, cuja solução é a combinação linear das funções de Airy $Ai(z)$ e $Bi(z)$:

$$\hat{\omega} = C_1Ai(z) + C_2Bi(z). \quad (15)$$

Com isso podemos obter a função corrente a partir da equação $\partial_y^2\hat{\psi} - \hat{\psi} = -\hat{\omega}$, cuja solução é:

$$\hat{\psi}(y) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-y} \int_0^y e^Y \hat{\omega}(Y) dY + e^y \int_y^\alpha e^{-Y} \hat{\omega}(Y) dY \right\} + C_3 e^{-y} + C_4 e^y. \quad (16)$$

As constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 podem ser determinadas utilizando as condições de contorno (11) e (12):

$$C_1 = \frac{B^+ - B^-}{A^+B^- - A^-B^+}, \quad C_2 = -\frac{A^+ - A^-}{A^+B^- - A^-B^+}, \quad C_3 = \frac{1}{2}, \quad C_4 = 0,$$

com

$$A^\pm = \int_0^\alpha e^{\pm y} Ai(z(y)) dy, \quad B^\pm = \int_0^\alpha e^{\pm y} Bi(z(y)) dy,$$

e $z = e^{i\pi/6}(y - i\beta^3)/\beta$. Para encontrarmos as perturbações usamos $\hat{u} = \partial_y\hat{\psi}$ e $\hat{v} = -i\hat{\psi}$.

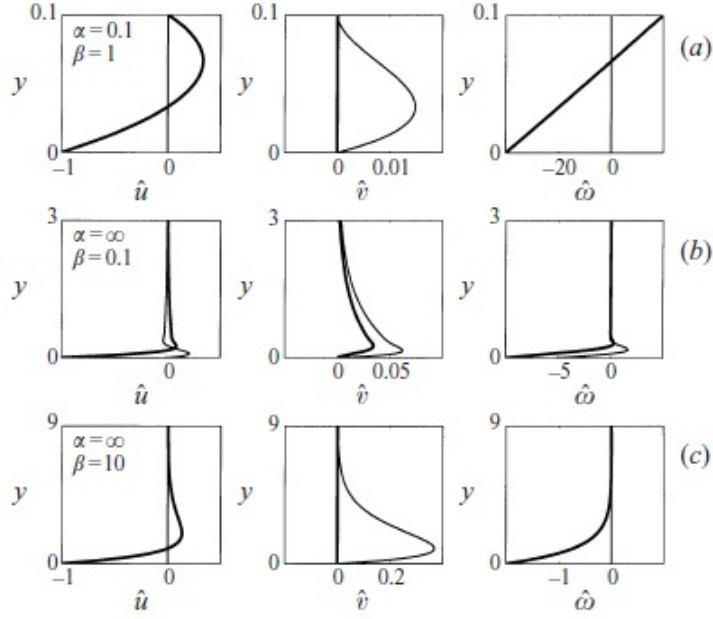


Figura 2: Amplitude das perturbações. Retirado de [1].

Podemos tirar uma primeira idéia da profundidade de penetração δ através da figura (2), que mostra as partes reais e imaginárias das amplitudes das perturbações das velocidades e vorticidade para três casos. A figura 2(a) mostra que para $\alpha = 0.1$ e $\beta = 1$ as perturbações se difundem para a parede superior. Assim podemos dizer que $\delta \sim \alpha$. Essas características são encontradas geralmente para $\alpha < 1$ e $\beta > \alpha$ e esse tipo de escoamento é chamado de “regime viscoso raso”. A figura 2(b) mostra que para $\alpha = \infty$ e $\beta = 0.1$, a profundidade de penetração se divide em duas partes: uma fina camada de escoamento rotacional com fortes gradientes próximo a interface, cercado por uma região de escoamento potencial que decai exponencialmente, se analisarmos a figura vemos que nesse caso $\delta \sim \beta$. Essa características são encontradas para $\alpha > 1$ e $\beta < 1$ e esse escoamento é chamado de “regime não-viscoso”. Por último a figura 2(c) mostra que para $\alpha = \infty$ e $\beta = 10$, $\delta \sim O(1)$ isto é, aproximadamente igual à um comprimento de onda. Isso permanece verdade mais geralmente para $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, e esse tipo de escoamento é chamada de “regime viscoso profundo”.

Podemos também tirar uma idéia da importância dos efeitos inerciais a partir da figura (2). Esperamos que os efeitos inerciais desloquem as perturbações criadas pelo fundo ondulado, de modo que possam ser medidas pela parte imaginária das perturbações. Para os regimes viscoso raso e viscoso profundo, a velocidade u e vorticidade ω estão essenci-

almente em fase com a interface, correspondendo à efeitos inerciais pequenos. A fase da velocidade v difere de $\pi/2$ a fase do fundo e células rotativas criadas pelas perturbações são deslocadas a jusante por efeitos inerciais significativos.

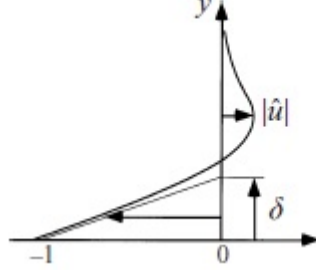


Figura 3: Definição da profundidade de penetração δ . Retirado de [1].

Podemos deixar mais precisas as observações feitas anteriormente introduzindo as seguintes definições de profundidade de penetração das perturbações de vorticidade (figura (3)) e o número de Reynolds efetivo Re_{eff} , que mede os efeitos inerciais:

$$\delta := |\partial_y \hat{u}(0)|^{-1} = |\hat{\omega}(0)|^{-1}, \quad (17)$$

$$Re_{eff} := \frac{\hat{\omega}_i(0)}{\hat{\omega}_r(0)}. \quad (18)$$

A figura (4) mostra δ e Re_{eff} em função de β , para vários valores de α . As figuras 4(a) e 4(b) mostram que para $\alpha > 1$, um regime assintótico é atingido a partir de $\alpha = 5$. Nesse regime, $\delta \sim \beta$ e $Re_{eff} \sim 1$ para $\beta < 1$ e $\delta \sim 1$ e $Re_{eff} \sim \beta^{-3}$ para $\beta > 1$. As figuras 4(c) e 4(d) mostram que para $\alpha < 2$ um regime assintótico é quase atingido a partir de $\alpha = 1$. Nesse regime, $\delta \sim \beta$ e $Re_{eff} \sim 1$ para $\beta < \alpha$ e $\delta \sim \alpha$ e $Re_{eff} \sim (\alpha/\beta)^3 = \alpha Re$ para $\beta > \alpha$. Note que as transições entre os domínios assintóticos são fortes e ocorrem abaixo da ordem 10. Os resultados estão resumidos na figura (5), um plano $(\log \beta, \log \alpha)$, que pode ser considerado como o ‘diagrama de fase’ do escoamento de Couette sobre um fundo ondulado. Este plano é dividido em três regiões, correspondendo ao regime viscoso raso, regime não-viscoso e regime viscoso profundo. Cada regime de escoamento é definido por sua profundidade de penetração δ e seu Re_{eff} . Finalmente, note que em todas as regiões δ e Re_{eff} satisfazem,

$$\delta = \min(1, \alpha, \beta), \quad (19)$$

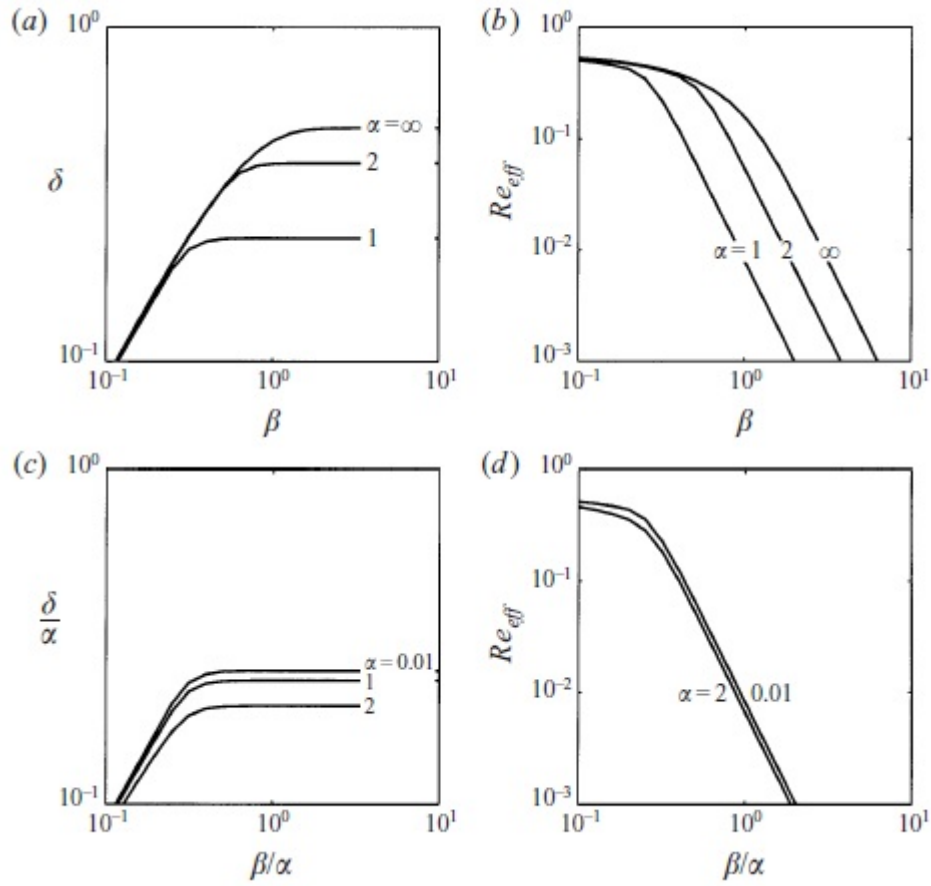


Figura 4: (a) δ e (b) Re_{eff} em função de β para $\alpha \geq 1$. (c) δ/α e (d) Re_{eff} em função de β/α para $\alpha \geq 1$. Retirado de [1].

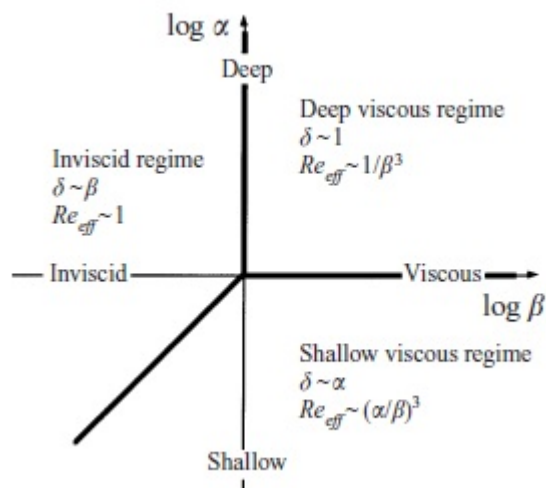


Figura 5: ‘Diagrama de fase’ do escoamento de Couette sobre um fundo ondulado. Retirado de [1].

$$Re_{eff} = \min(1, 1/\beta^3, (\alpha/\beta)^3). \quad (20)$$

Considerações finais

Neste projeto estudamos os mecanismos de instabilidades em um escoamento de Couette sobre um fundo ondulado com base em [1]. Primeiramente derivamos a eq. de Navier-Stokes adimensional utilizando escalas de comprimento e tempo definidas através de parâmetros do problema. Com a equação em mãos utilizamos modos normais estacionários para as perturbações e desenvolvemos as equações para as perturbações juntamente com as condições de contorno do problema. Em seguida é feita uma análise de quanto as perturbações entram no fluido, ou seja, sua profundidade de penetração δ , e os efeitos inerciais, medidos pelo número de Reynolds efetivo Re_{eff} . Para a análise são utilizados dados computacionais e com isso são encontrados os três regimes do escoamento. Por fim é apresentado o que pode ser considerado o ‘diagrama de fase’ do problema.

Referências Bibliográficas

- [1] Charru, F. & Hinch, E. J. 2000 ‘Phase diagram’ of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism of the long-wave instability. *J. Fluid Mech.* **414**, 195-223.
- [2] Charru, F. 2011 *Hydrodynamic Instabilities*. Cambridge University Press.
- [3] Criminale, W. O., Jackson, T. L. and Joslin, R. D. 2003 *Theory and Computation in Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.