

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

PROJETO SUPERVISIONADO / MS 777

PROPAGAÇÃO DE ONDAS P E S

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

Aluna: Ana Paula Magalhães dos Santos Oliveira

RA: 101461

Campinas, 2014

Resumo

Este projeto teve como intuito o entendimento do conceito de elasticidade e o estudo mais particular da dedução e solução da Equação da Onda Elástica. Investigou-se ainda o comportamento teórico e experimental das ondas sísmicas P e S. Primeiramente, utilizando-se dos conceitos de elasticidade aprendidos e de resultados anteriormente provados, demonstrou-se que as ondas P e S são as soluções de onda plana que satisfazem a Equação da Onda Elástica. Posteriormente, foram feitos experimentos didáticos com molas e outros materiais e também animações computacionais que auxiliaram na observação prática do movimento destas ondas. Estes experimentos tiveram por objetivo a análise do movimento destas perturbações em diversas situações e a ação delas quando em fenômenos naturais tal como o terremoto. A análise matemática da equação das ondas planas e a observação experimental do movimento destas proporcionaram um bom entendimento sobre o assunto e propiciaram a realização de todos os objetivos estipulados por este projeto.

Introdução

Uma onda é uma perturbação energética que se propaga através de um meio qualquer com certa velocidade de propagação. Este projeto teve por objetivo o estudo das ondas sísmicas, mais especificamente as ondas de corpo, denominadas ondas P (primárias ou longitudinais) e ondas S (secundárias, transversais ou de cisalhamento). A compreensão do comportamento destas é fundamental para o Método Sísmico, servindo de auxílio tanto para a prospecção de óleo e gás quanto para a análise da natureza e intensidade dos terremotos.

As ondas P propagam-se em sólidos, líquidos e gases, geralmente a grandes velocidades. Tais perturbações, quando se propagam no interior das rochas, fazem o meio vibrar paralelamente à direção da onda, tal qual um elástico em contração. Assim sendo, na análise do movimento destas ondas observa-se alternadamente uma compressão seguida de uma distensão com amplitudes e períodos baixos.

As ondas S propagam-se somente em sólidos, usualmente com baixa velocidade e grandes amplitudes. Quando se propaga verticalmente no interior de rochas o solo é deslocado perpendicularmente à direção do movimento em uma espécie de sobe e desce. Quando polarizadas horizontalmente o solo move-se alternadamente de um lado para o outro. O estudo do movimento das ondas S é, portanto, de grande valia para se obter maior detalhamento das particularidades de uma superfície.

A Equação da Onda Elástica e suas Soluções

Em um meio unidimensional, sabe-se que a equação da onda acústica $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ admite solução geral $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$ sendo c constante, F e G funções duplamente diferenciáveis.

Agora, assumindo que estamos em um meio tridimensional perfeitamente elástico e isotrópico, ou seja, onde não ocorre perda de energia pelas ondas sísmicas por ação de fatores intrínsecos atenuantes, vamos demonstrar que as ondas P e S são as soluções de onda plana que satisfazem a equação da onda elástica.

Previamente, vamos estabelecer algumas definições que servirão de auxílio no decorrer da demonstração.

- **O Tensor de Tensão:** A tensão mede a intensidade das forças internas que agem entre as partículas de um corpo material deformável. Quando esta tensão não é uniformemente distribuída, ela é representada por uma grandeza vetorial chamada Tensor de tensão. O tensor de tensão τ pode ser definido, em três dimensões, como a tração nos planos x_1x_2 , x_1x_3 e x_2x_3 :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{x_1}(\hat{x}_1) & \tau_{x_1}(\hat{x}_2) & \tau_{x_1}(\hat{x}_3) \\ \tau_{x_2}(\hat{x}_1) & \tau_{x_2}(\hat{x}_2) & \tau_{x_2}(\hat{x}_3) \\ \tau_{x_3}(\hat{x}_1) & \tau_{x_3}(\hat{x}_2) & \tau_{x_3}(\hat{x}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

- **O Tensor de Deformação:** O tensor de deformação é um tensor simétrico utilizado para caracterizar alterações de forma e volume de um corpo. Em três dimensões o tensor de deformação e tem forma geral:

$$e = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Podemos ainda escrever:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (3)$$

- **A relação matemática entre Tensão e Deformação:** A tensão e a deformação podem ser relacionadas em um meio elástico e tridimensional, por meio da seguinte relação linear:

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \equiv \sum_{k=1,3} \sum_{l=1,3} c_{ijkl} e_{kl} \quad (4)$$

Onde c_{ijkl} é chamado tensor elástico e em um meio isotrópico é definido por:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (5)$$

Onde δ_{ij} é uma função tal que $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ ou $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e λ e μ são os denominados Parâmetros de Lamé. Então, substituindo (4) em (3) obteremos:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (6)$$

Consideremos agora as forças que agem em um cubo infinitesimal no sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) em um meio homogêneo. Quando uma onda unidimensional atravessa este corpo ocorrerá um deslocamento u e ação de uma força F . As forças que agem em cada face do cubo são dadas pelo produto do vetor tração e a área da face. Consideremos, então, a força agindo em um plano normal ao eixo x :

$$F(\hat{x}_1) = t(\hat{x}_1) dx_2 dx_3 = \tau(\hat{x}_1) dx_2 dx_3 = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} dx_2 dx_3 \quad (7)$$

Onde \mathbf{F} é o vetor força e \mathbf{t} o vetor tração. Como o cubo encontra-se em um meio homogêneo, a força resultante sobre o cubo será nula, portanto, as forças que agem em faces opostas do cubo cancelam-se, ou seja, $F(-\hat{x}_1) = -F(\hat{x}_1)$. A força resultante será diferente de zero somente se tivermos:

$$F(\hat{x}_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (8)$$

Então, podemos escrever a expressão da força total sobre o cubo como:

$$F_i = \sum_{j=1,3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_1 dx_2 dx_3 = \partial_j \tau_{ij} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (9)$$

A força resultante no cubo também pode ser obtida aplicando-se a Segunda Lei de Newton. Assim:

$$F_i = ma \quad (10)$$

Onde m é a massa do cubo e a a aceleração. Sabendo que ρ é a densidade do cubo, podemos escrever:

$$m = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \text{ e } a = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (11)$$

Igualando (8) e (9) teremos que:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dx_1 dx_2 dx_3 = \partial_j \tau_{ij} dx_1 dx_2 dx_3 \Rightarrow \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_j \tau_{ij} \quad (12)$$

Substituindo agora a equação (3) em (4) obteremos:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \partial_k u_k + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (13)$$

Agora, substituindo (13) em (12), teremos:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \partial_j [\lambda \delta_{ij} \partial_k u_k + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)] \\
&= \partial_i \lambda \partial_k u_k + \lambda \partial_i \partial_k u_k + \partial_j \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \mu \partial_j \partial_i u_j + \mu \partial_j \partial_j u_i \\
&= \partial_i \lambda \partial_k u_k + \partial_j \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \lambda \partial_i \partial_k u_k + \mu \partial_i \partial_j u_i + \mu \partial_j \partial_j u_i
\end{aligned} \tag{14}$$

Definamos então $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Reescrevendo a equação (14) em notação vetorial, obtemos:

$$\rho \ddot{u} = \nabla \lambda (\nabla \cdot u) + \nabla \mu \cdot [\nabla u + (\nabla u)^T] + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + \mu \nabla^2 u \tag{15}$$

Consideremos a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \times \nabla \times u = \nabla \nabla \cdot u - \nabla^2 u \implies \nabla^2 u = \nabla \nabla \cdot u - \nabla \times \nabla \times u \tag{16}$$

Aplicando (16) em (15) obteremos:

$$\rho \ddot{u} = \nabla \lambda (\nabla \cdot u) + \nabla \mu \cdot [\nabla u + (\nabla u)^T] + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot u - \mu \nabla \times \nabla \times u \tag{17}$$

Em um meio homogêneo os dois primeiros termos do lado direito da equação podem ser considerados nulos. Desta maneira, obtemos a equação padrão da onda elástica:

$$\boxed{\rho \ddot{u} = (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot u - \mu \nabla \times \nabla \times u} \tag{18}$$

Finalmente, podemos separar esta equação em soluções de ondas P e S.

- Tomando o divergente da equação (18) e utilizando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0$, teremos a solução de onda P:

$$\begin{aligned}
\nabla(\ddot{u}) &= \nabla \left(\frac{(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot u - \mu \nabla \times \nabla \times u}{\rho} \right) \\
\implies \frac{\partial^2 (\nabla \cdot u)}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \cdot u) \\
\implies \nabla^2 (\nabla \cdot u) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 (\nabla \cdot u)}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Onde a velocidade α da onda P é dada por:

$$\alpha^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \tag{20}$$

- Tomando agora o rotacional da equação (18) e utilizando a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$, teremos a solução de onda S:

$$\frac{\partial^2(\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{\rho} \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (21)$$

Utilizando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ e (16), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} &= -\frac{\mu}{\rho} \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) \\ \Rightarrow \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2(\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Onde β é a velocidade da onda S:

$$\beta^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (23)$$

Utilizando (20) e (23) podemos então reescrever a equação da onda elástica em termos das velocidades das ondas P e S:

$$\boxed{\ddot{\mathbf{u}} = \alpha^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}} \quad (24)$$

Animação Computacional das Ondas P e S

Por meio de animações computacionais é possível enxergar de maneira ilustrativa o efeito das ondas P e S sobre uma partícula. As animações são vistas a seguir.

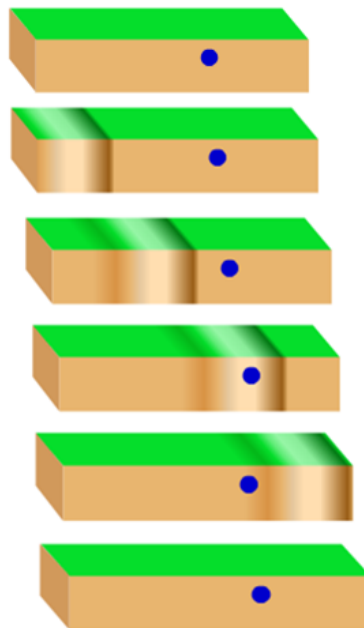


Figura 1: Animação da ação da Onda P sobre uma partícula

Na animação, observamos uma perturbação que se propaga. Na partícula, observa-se um movimento alternado de compressão e distensão sendo este paralelo à direção da propagação (longitudinal). Com o fim da passagem da onda P o meio material volta à sua forma original.

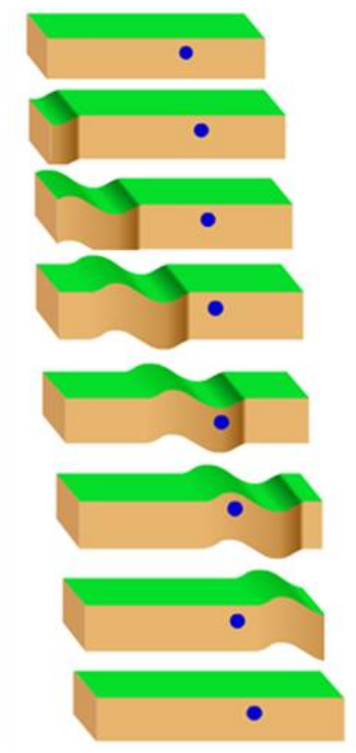


Figura 2: Animação da ação da Onda S sobre uma partícula

Nesta animação, percebemos que a ação na partícula consiste de movimentos transversais alternados. O movimento da partícula é perpendicular à direção da propagação, e, apesar de na animação o movimento ser vertical ele pode ocorrer em qualquer direção. Com a passagem da onda S, o meio material volta à sua forma original. Percebe-se ainda que a onda S move-se mais lentamente que a onda P.

Kits Experimentais

No estágio final deste projeto, foram realizados experimentos com molas e outros materiais que proporcionaram uma visão prática de teoria matemática estudada. Os kits tiveram por objetivo a observação do movimento das ondas P e S bem como a análise do comportamento destas em fenômenos da natureza tal qual o terremoto.

1. Máquina de Ondas Transversais



Figura 3: Máquina de Ondas S

A Máquina de Ondas Transversais ou Máquina de Ondas S pode ser construída colando-se palitos de madeira uniformemente sobre uma fita adesiva de aproximadamente três metros (A).

Se esticarmos bem a fita adesiva e provocarmos um distúrbio no primeiro palito, agitando-o levemente, estamos oferecendo energia para que este saia de seu estado de equilíbrio (B). Assim sendo, esta energia vai sendo transferida de um palito a outro por meio da fita adesiva, verificando o fato de que a onda é uma perturbação que se propaga. Os palitos realizam um movimento alternado de sobe e desce característico das ondas S. Quando o movimento atinge o fim da fita observamos o fenômeno da reflexão, ou seja, o movimento repete-se com mesma velocidade, mas com direção contrária (C).

Este experimento ilustra de maneira fácil o conceito de onda como um distúrbio energético que se propaga e também nos permite observar o movimento transversal das ondas S bem como suas propriedades de reflexão em um meio elástico.

2. Produção de Ondas P



Figura 4: Mola configurada para produção de Ondas P

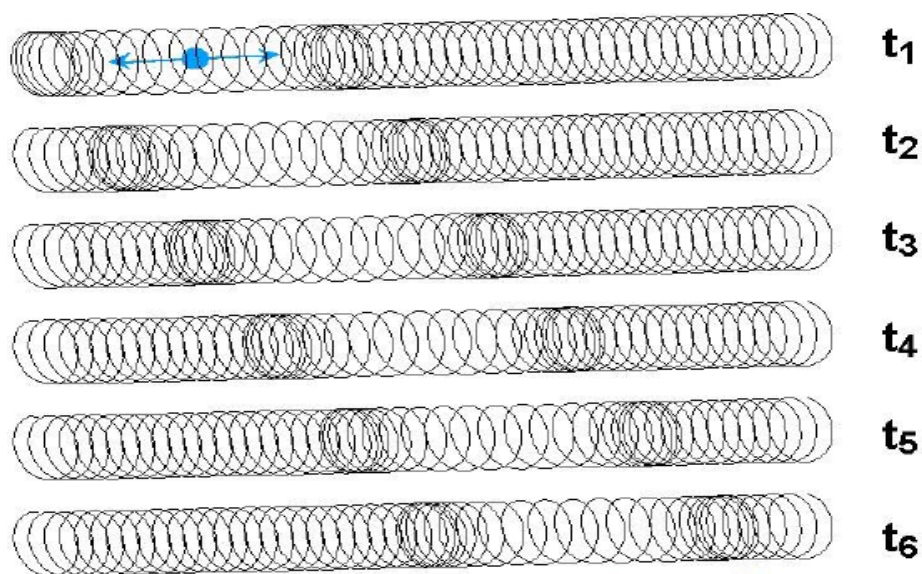


Figura 5: Ação da Onda P em uma Mola com o decorrer do Tempo

Para a produção e observação de ondas P utiliza-se uma mola de metal. Prendendo ou segurando uma das extremidades, estica-se bem a mola rente a uma superfície lisa (A) enquanto segura-se algumas das espirais da mola na outra extremidade (B). Este processo acumula energia elástica nas espirais que estão sendo comprimidas. Quando as espirais são soltas, é possível observar a ação da onda P, ou seja, um movimento alternado de compressão e distensão nas espirais da mola, sendo que este é paralelo à direção de propagação. Como a outra extremidade também está presa, a onda irá refletir-se no fim

da mola e fazer o movimento de volta. O processo repete-se até que a energia acabe e a mola volte a seu estado original de repouso. Como tal movimento ocorre muito rápido não foi possível captá-lo por meio de fotografias, mas, o esquema mostrado na Figura 5 demonstra a ação da onda P com o passar do tempo t_i ($i=1,\dots,6$) como observada na mola de metal.

3. Produção de Ondas S

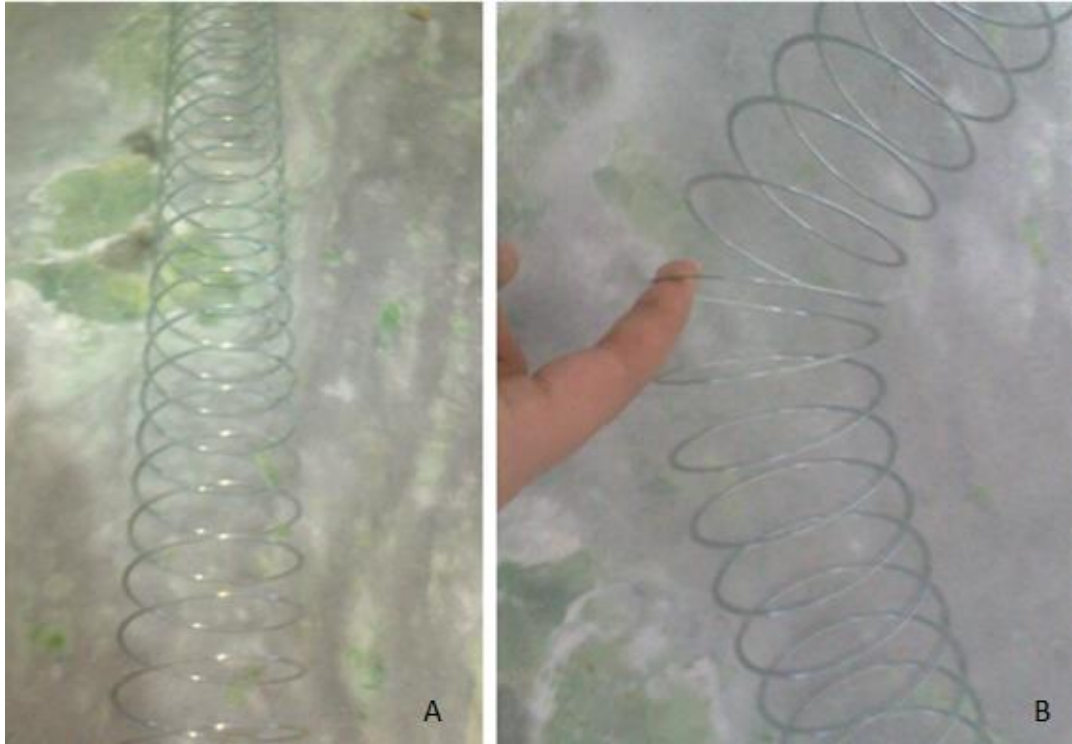


Figura 6: Mola configurada para produção de Ondas S

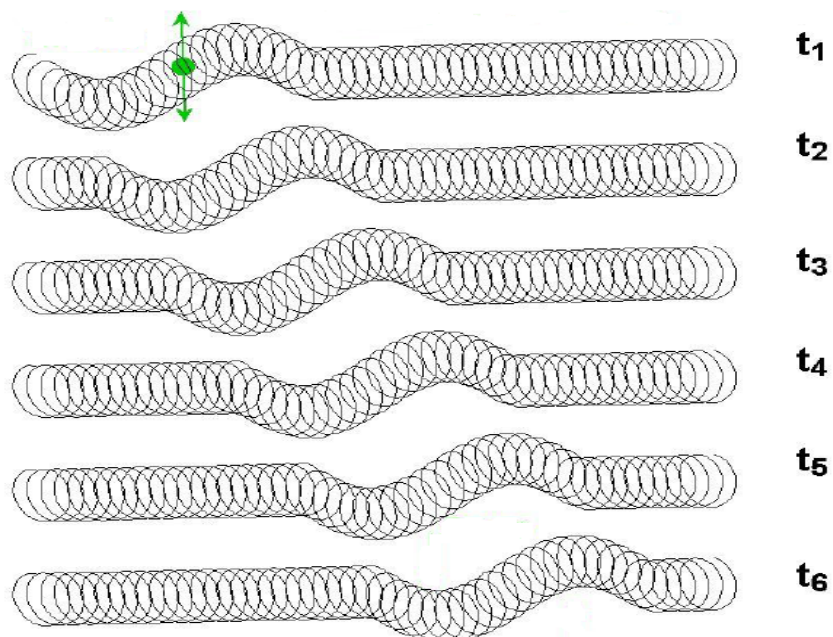


Figura 7: Ação da Onda S em uma Mola com o decorrer do Tempo

Para produção de uma onda S, novamente utiliza-se uma mola de metal. Prende-se uma extremidade e estica-se a mola rente a uma superfície lisa (A). Segurando a outra extremidade de modo que a mola permaneça bem esticada puxa-se uma das espirais da mola, de dez a doze espirais de distância da extremidade, para direita e para esquerda (B). Este processo acumula energia elástica na espiral e quando esta é solta produz-se uma onda S. Com isto observa-se que, quando na horizontal como na Figura 6, a mola movimenta da direita para esquerda alternadamente conforme a propagação da onda S, até que a energia acabe e a mola volta ao seu estado original de repouso. Observa-se também, que o movimento é perpendicular à direção da propagação. Como também não foi possível captar todos os movimentos na mola por meio de fotografias, a figura 7 ilustra o movimento da onda S com o passar do tempo t_i ($i=1, \dots, 6$).

4. Reflexão de Ondas P e S



Figura 8: Configuração de Molas para observar a reflexão de ondas P e S

Para observar experimentalmente a reflexão de ondas P e S basta colar duas molas de matérias diferentes como a de metal e a de plástico da Figura 8. Quando produzimos uma onda P ou s na mola de metal, parte da onda é refletida ao chegar ao início da mola de plástico. A dificuldade na observação do experimento residiu no fato de a mola de plástico utilizada não ser tão resistente quando a de metal, o que gerou dificuldade no momento da produção das ondas. O fato de a onda ser parcialmente refletida ocorre porque parte da energia é transmitida para o meio de propagação. No interior da Terra, isso significa que quando uma onda P ou S atinge um meio material distinto de seu inicial, uma quantidade parcial da energia será utilizada para reflexão enquanto que a outra será refratada.

5. Simulação de Terremotos com Produção de Ondas P e S

Com este experimento é possível observar a transmissão de energia das ondas P e S ao longo de seus percursos por uma mola de metal. Para isso agrega-se uma mola de metal a um paralelepípedo de madeira (A), com um simulacro de um prédio feito de papelão colado a ele (B). Produzem-se então ondas P e S na outra extremidade da mola como demonstrado nas Figuras 4 e 6. Quando a propagação da energia das ondas P e S atinge o paralelepípedo de madeira o prédio de papelão vibra. Observa-se ainda a diferença na direção das vibrações quando se produz uma onda P ou uma onda S, sendo que o prédio vibra longitudinalmente para a primeira (C) e transversalmente para a segunda (D). Este experimento é bastante útil para demonstrar o que ocorre quando uma onda sísmica atinge a superfície terrestre causando tremores que atingem casas e prédios.

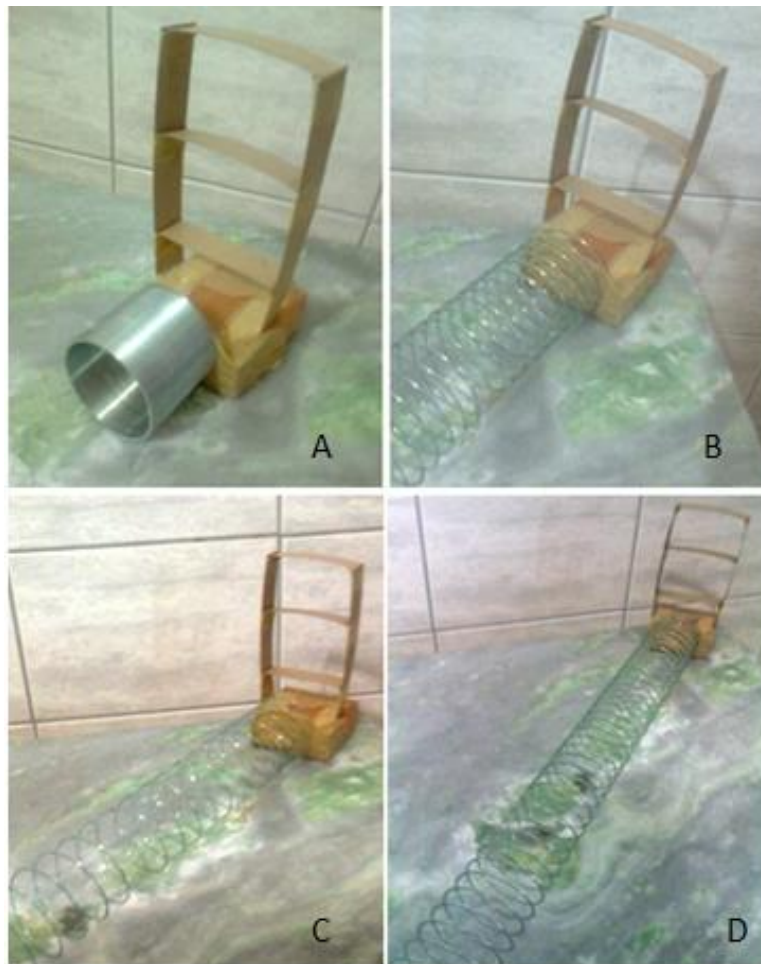


Figura 9: Mola configurada para simulação de terremotos com ondas P e S

6. Propagação de Ondas P e S em um Meio Elástico e em um Meio Inelástico

Quando uma onda propaga-se em um meio inelástico ocorre gradual perda de energia. Logo, além da atenuação natural da energia no decorrer de uma propagação, um meio inelástico oferece fatores externos para a diminuição ainda mais rápida desta. A análise da propagação de ondas sísmicas em um meio elástico e inelástico é providencial para quando se quer estudar a intensidade e alcance de terremotos em locais distintos.

Para construir um meio inelástico foi utilizada uma mola de metal com uma espuma preenchendo-a totalmente. Para efeito de comparação entre as propagações de energia entre um meio elástico e inelástico foram colocadas lado a lado duas molas de metal bem esticadas sendo que uma está completamente preenchida com a espuma e a outra está vazia (C). Uma extremidade destas molas foi colada a uma tira de madeira enquanto à outra foram agregados dois paralelepípedos de madeira com um simulacro de um prédio feito de papelão colado a eles (A).

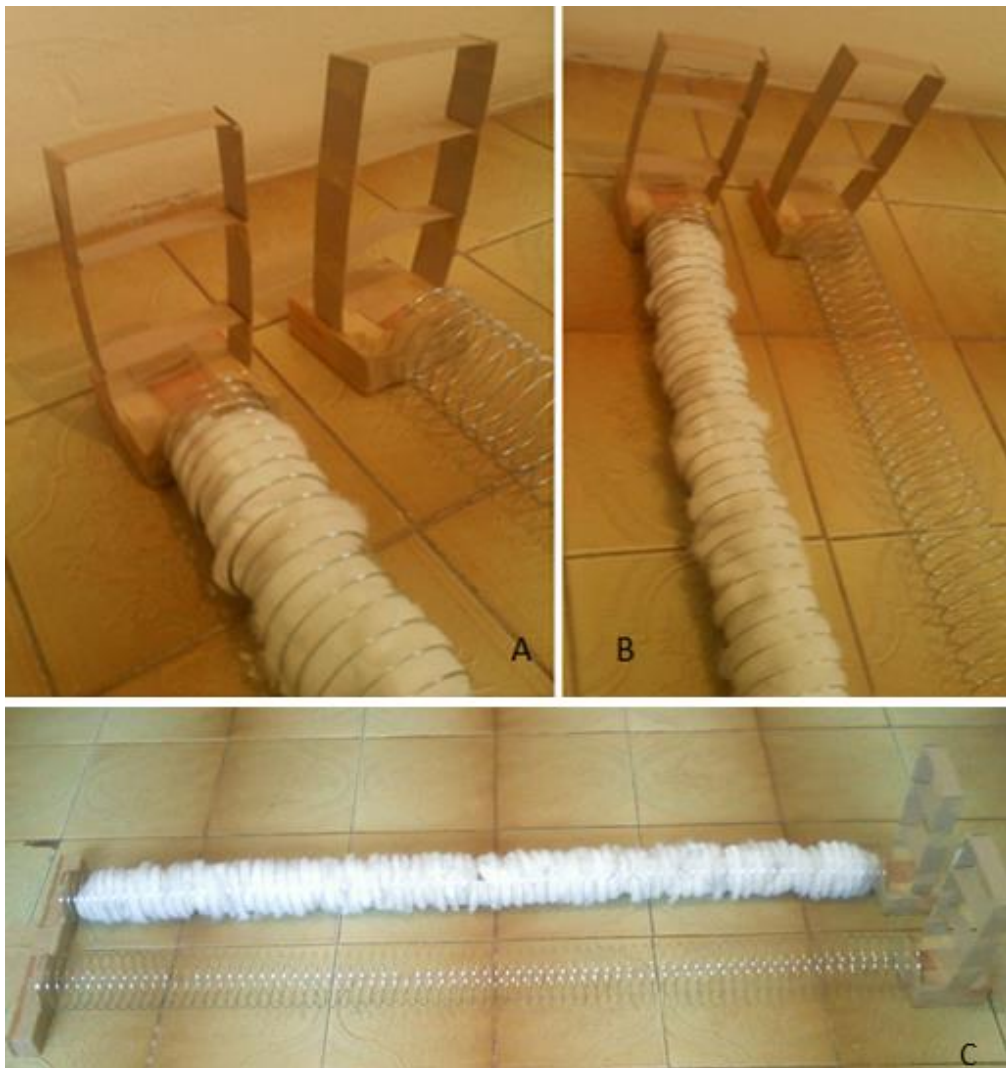


Figura 10: Montagem esquemática de um meio Elástico (mola vazia) e um meio Inelástico (mola com espuma) para propagação de Ondas P e S

Quando produzimos simultaneamente ondas P ou S em cada uma das molas, percebemos que na mola com interior livre ocorre a transferência de energia gradativa com a propagação da onda, e, esta é transferida para o paralelepípedo de madeira o que faz o prédio vibrar, de maneira análoga ao observado no Experimento 4. Na mola preenchida com espuma, entretanto, observa-se uma absorção contínua da energia da onda, sendo que ao atingir o paralelepípedo de madeira a vibração no prédio de papelão é praticamente inexistente.

Considerações Finais

O conhecimento sobre as ondas planas e a solução geral da equação da onda elástica aqui explicitados propiciaram-nos uma base teórica que permitiu uma análise mais detalhada do comportamento das ondas P e S.

Assim sendo, estudando os conceitos de elasticidade e aplicando-se métodos de resoluções de equações diferenciais parciais foi possível obter as ondas P e S como solução de onda plana para a equação da onda elástica $\ddot{u} = \alpha^2 \nabla \nabla \cdot u - \beta^2 \nabla \times \nabla \times u$.

Posteriormente, os kits experimentais proporcionaram a oportunidade de observar de forma prática os resultados matemáticos anteriormente obtidos. Foi possível analisar ainda a ação das ondas P e S em diversas situações que interessam ao Método Sísmico, como a ocorrência do terremoto em diferentes intensidades e o fenômeno da reflexão cuja análise é fundamental para prospecção de óleo e gás. Os objetivos propostos pelo projeto foram, portanto, atingidos.

Agradecimentos

Ao Professor Lúcio pela atenção e paciência ao ensinar e ao PIBIC/SAE pelo fomento.

Referências

- [1] M.R. GADALLAH & R. FISHER. *Exploration Geophysics*, Springer, 2009.
- [2] R. KNOBEL. *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, American Mathematical Society, 2000.
- [3] P.M. SHEARER. *Introduction to Seismology*, Cambridge, 1999.
- [4] GERALD B. FOLLAND. *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, 1995.

- [5] *Animations of Earthquake Waves*. Disponível em:
<http://www.classzone.com/books/earth_science/terc/content/visualizations/es1002/es1002page01.cfm>. Acessado em: 29 de Junho de 2013 às 20h44min.
- [6] L. BRAILE. *Seismic Waves and the Slinky: A Guide for Teachers*, 2010. Disponível em:
<<http://web.ics.purdue.edu/~braile/edumod/slinky/slinky.htm>>. Acessado em: 29 de Junho de 2013 às 20h53min.
- [7] *Waves in the Earth I - The Slinky Situation*. Disponível em:
<http://www.earthlearningidea.com/PDF/76_Slinkies.pdf>. Acessado em: 29 de Junho de 2013 às 21h01min.
- [8] *Máquina de Ondas*. Disponível em:
<http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=3bsc&cod=_maquinadeondas>. Acessado em: 29 de Junho de 2013 às 21h20min.
- [9] *Lecture 2: Seismic Wave Equation*. Disponível em:
<http://www.ldeo.columbia.edu/~djs/gsi_seismic_course/Lectures_files/lecture2_seismicwave.pdf> Acessado em: 30 de Junho de 2013 às 19h34min.