**Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica**

**Universidade Estadual de Campinas**

MS 877 – Projeto Supervisionado

# Café Matemático: Transformando Café em Teoremas – Parte II

Aluno: Marcelo de Oliveira Flora

Orientador: Prof. Dr. Christian Horacio Olivera

Campinas, Dezembro de 2013.

## Sumário

**Resumo:** O Café Matemático é um evento criado em 2013 que tem como objetivo abrir um espaço para que os estudantes possam expor suas próprias ideias, aproveitando para tomar um café, ajudando também na integração dos alunos. Esta é a segunda parte do projeto, e foram organizados três encontros durante este semestre, no auditório do IMECC, contando com a participação de alunos e professores. Nestes encontros foram expostos vários assuntos, abordando temas como Cálculo Diferencial e Integral, Variáveis Complexas, Álgebra Linear e Educação Matemática. Por fim, muitos alunos acabaram se interessando em expor seus trabalhos também. Sendo assim, o evento deve continuar no próximo semestre.

## 1. Introdução

O Café Matemático nasceu da divisão de um evento já existente no Imecc, organizado pelo Centro Acadêmico dos estudantes do Imecc (CAMECC), que se chamava Camecc'on Leite. Este evento tinha por objetivo fazer a exibição de filmes relacionados à matemática no auditório do instituto.

Com o passar do tempo, surgiu a necessidade de que houvesse algum espaço no IMECC para discussão de problemas sociais. Sendo assim, o Camecc'on Leite tornou-se um evento para a discussão de tais problemas. Com isso, decidi criar um novo evento: o Café Matemático. O intuito básico deste evento é o de criar um espaço para que os estudantes possam expor suas próprias ideias, aproveitando para tomar um café, ajudando também na integração dos alunos.

Sendo assim, com o apoio do CAMECC, foram desenvolvidos cartazes, grupos nas redes sociais, e também um logotipo.

Este trabalho é a segunda parte do projeto iniciado em Março de 2013. Neste semestre, foram organizados três encontros. Estes encontros aconteceram no auditório do Imecc, com Coffee Break fornecido pelo CAMECC.

Seguem abaixo os temas dos encontros, juntamente com os nomes dos alunos expositores.

Tabela 1. Cronograma dos encontros realizados durante o semestre.

| Dia | Aluno Expositor | Tema |
|---|---|---|
| 26/08 | Daniel dos Anjos Silva | Os Números “Perplexos” |
| 30/09 | Anderson Azevedo Simões | Modelagem Matemática para Priorização de Obras de Expansão da Rede Elétrica |
| 25/11 | Douglas Daniel | Por que a Maioria das Pessoas Odeia Matemática? |

Nos próximos capítulos, apresentaremos um resumo de cada um dos assuntos apresentados nos encontros.

## 2. Quinto Encontro: Os Números “Perplexos”

Quão fascinante e extenso é o mundo da matemática. Com toda sua vastidão, mesmo cursando uma graduação em matemática de quatro anos, vários assuntos interessantes dessa apaixonante área do conhecimento não nos são apresentados nem da maneira mais introdutória, principalmente aqueles bem específicos de cada ramo da matemática que mesmo grandes matemáticos que não os estudam desconhecem. Os números “Perplexos” é um desses assuntos.

Os números “perplexos” é uma estrutura matemática curiosa que se assemelha muito com a conhecida estrutura dos números complexos, no entanto é as diferenças que fazem esse conjunto numérico ser tão intrigante, como por exemplo, a famigerada unidade “alucinatória” (equivalente à unidade imaginária nos complexos) que possui módulo -1 e os esquisitos divisores de zero.

Essas e outras mais peculiaridades dos números perplexos serão discutidas de maneira comparativa com os números complexos nesse próximo café matemático, não com a precisão de um matemático profissional, mas com a visão apaixonada de um estudante curioso.

## 2.1. O Encontro

Os números perplexos são uma estrutura matemática que possui aspectos muito similares aos tão conhecidos números complexos. Com tantas similaridades com os complexos, o conjunto dos números perplexos nos parece muito familiar, porém as diferenças sutis que existem na constituição de sua álgebra faz surgir surpresas que nos deixam boquiabertos.

Em temos históricos os números complexos são bem mais antigos e sua história cheia de grandes nomes. As "raízes" dos complexos estão fortemente ligadas aos nomes de *Niccolò Fontana (Tartaglia)* e *Girolomo Cardano*, contemporâneos no século XVI e envolve também uma complicada disputa intelectual, a resolução de equações do terceiro grau, um poema matemático, um famoso livro chamado *Ars Magna* e uma rixa para toda a vida.

Após os ânimos acalmarem, surge em cena o italiano *Rafaell Bombelle* que introduz regras precisas para a multiplicação das novas quantidades ainda mal definidas que se apresentam como raízes quadradas de números negativos. *René Descartes* (séc. XVII), *Abraham de Moivre* (séc. XVII – XVIII) e *Leonhard Euler* (séc. XVIII) vieram um seguido do outro deixando contribuições notórias na teoria dos números complexos, o primeiro compreendendo de maneira apurada a manipulação desses novos números assim com a introdução do termo imaginário, o segundo relacionando de maneira brilhante essas novas "quantidades" às funções trigonométricas e enfim o terceiro chegando às relações mais importantes dessas teorias como também introduzindo a notação que utilizamos até hoje.

Para dar os últimos retoques, na verdade a construção formal da álgebra dos complexos e sua interpretação geométrica, surgem *Gauss* e *Hamilton* (séc.XIX). *Gauss* aprimorou os trabalhos e popularizou as notações de *Euler* e deu interpretação geométrica aos complexos, *Hamilton* por sua vez formalizou os complexos como álgebra de pares e estendeu as noções para dimensões maiores.

Embora grandes, as mentes que desenvolveram a "recente" álgebra de perplexos na oitava década do século XX, não são tão conhecidas. Os perplexos foram desenvolvidos no outono de 1981 pelo professor *P.Fjensted* e os alunos *P.Borman*, *E.Heppner*, *B.nelson* e *K.Oested* (calouros do curso de matemática do *Olaf College USA*). Com o objetivo de fazer um projeto para uma instituição de fomento, eles fizeram a suposição da existência de números com módulo negativo e chegaram à álgebra dos perplexos, como conta o próprio professor em artigo publicado no *American Journal of Physics* no ano de 1985.

As formalidades: utilizaremos a definição de Hamilton para os números complexos.

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \epsilon\ \mathbb{R}^2\}$$

$$\boldsymbol{Def.}: soma;\ \ (x, y) + \ (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\boldsymbol{Def.}: produto;\ (x, y) * (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Podemos, com uma aplicação isomórfica entre os pares e a representação que comumente usamos, fazer:

$$Seja\ z = (x, y), logo\ z = (x, 0) + (0, y) \Rightarrow z = x(1,0) + y(0,1)$$

$$[(1,0); (0,1)] \longrightarrow [1; i]$$

$$\varphi; (1,0) \longmapsto 1\ ; (0,1) \longmapsto i\ ou\ seja\ \varphi(1,0) = 1\ e\ \varphi(0,1) = i$$

Assim,

$$\varphi(z) = \varphi\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = \varphi\big(x(1,0)\big) + \ \varphi\big(y(0,1)\big) =$$
$$x\varphi(1,0) + y\ \varphi(0,1) = \ x + yi$$

Ou seja, se fizermos um isomorfismo entre os pares geradores dos complexos e os geradores de outra entidade algébrica, dando a $i$ as regras definidas por Bombelli chegaremos à formulação usual de $\mathbb{C}$.

Assim podemos definir o conjugado e o módulo nessa álgebra.

$$Para \quad z = x + yi \;\; definimos \;\; z^* = x - yi \; como \; sendo \; o \; conjugado$$
$$\|z\| = \sqrt{z * z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \; como \; seu \; módulo$$

De maneira semelhante podemos definir os números perplexos também como estrutura de pares.

$$\mathbb{P} = \{(x, y) \epsilon \; \mathbb{R}^2\}$$
$$\boldsymbol{Def}.: soma; \;\; (x, y) + \;(x', y') = (x + x', y + y')$$
$$\boldsymbol{Def}.: produto; \;\; (x, y) * (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y)$$

Veja que na definição do produto há uma mudança, e desta resultará rodas as propriedades “esquisitas” dos números perplexos.

Se definirmos um certo $h$, onde:

$$1 * h = h \, , -1 * h = -h, \qquad h * h = 1 \;\; e \; (-h) * (-h) = 1$$

Podemos chegar a uma representação semelhante à dos números complexos.

$$Seja \; w = (x, y), logo \; w = (x, 0) + (0, y) \Rightarrow w = x(1{,}0) + y(0{,}1)$$
$$[(1{,}0); (0{,}1)] \longrightarrow [1; h]$$
$$\psi; (1{,}0) \longmapsto 1 \; ; (0{,}1) \longmapsto h \; ou \; seja \; \psi(1{,}0) = 1 \; e \; \psi(0{,}1) = h$$

$$Assim, \psi(w) = \psi\big(x(1{,}0) + y(0{,}1)\big) = \psi\big(x(1{,}0)\big) + \;\psi\big(y(0{,}1)\big)$$
$$= x\psi(1{,}0) + y \; \psi(0{,}1) = \; x + yh$$

Também podemos definir conjugado e módulo para essa estrutura.

$$w = x + yh \;\; \Longrightarrow \;\; w^* = x - yh \text{ é } o \; conjugado$$

O módulo por sua vez é definido como:

$$\|w\| = sng(w * w^*)\sqrt{|w * w^*|}$$
$$onde \; sng \text{ é } a \; função \; assinatura; \quad sng(t) = \begin{cases} 1 \; se \; t > 0 \\ 0 \; se \; t = 0 \\ -1 \; se \; t < 0 \end{cases}$$

O módulo é definido dessa maneira, pois $w * w^* = x^2 - y^2$ nem sempre possui valor positivo e essa definição permite módulos negativos. Com essas definições podemos achar várias peculiaridades dos números perplexos que são bem interessantes. Por exemplo, se calcularmos o módulo de $h$ com essa definição encontraremos $\|h\| = -1$, temos também acontecimentos do tipo $w * w^* = 0\ onde\ w \neq 0$ esses são chamados divisores de zero.

E ainda, se expandirmos em série de Taylor $e^{i\theta}$, teremos:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \Rightarrow$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Pois,

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \ \ e\ \ \operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

Essa á a famosa prova de Euler para o teorema de Moivre. No caso perplexo temos:

$$e^{h\theta} = \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + h\left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \Rightarrow$$

$$e^{h\theta} = \cosh\theta + h \operatorname{senh}\theta$$

Pois,

$$\cosh\theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \ \ e\ \ \operatorname{senh}\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

Esse resultado eleva os números perplexos de uma simples brincadeira matemática a um *status* bem mais sério, vemos agora como uma ferramenta útil para a descrição da geometria da hipérbole. E não para ainda se analisarmos as relações de Cauchy-Riemman:

Seja $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função de variáveis complexas que satisfaça as condições de continuidade e diferenciabilidade e as condições de Cauchy-

Riemman;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \ e \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Se derivarmos novamente essas expressões e igualarmos as derivadas segundas concluiremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ \ e \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \ ou\ seja \ \ \nabla^2 \mathrm{u} = 0 \text{ e } \ \nabla^2 \mathrm{v} = 0$$

As funções reais $u\ e\ v$ satisfazem a equação de Laplace. Para o caso perplexo podemos estender as definições de funções e continuidade e diferenciabilidade.

Seja $g(x, y) = s(x, y) + hr(x, y)$. As condições de Cauchy-Riemman ficam:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y} \ \ e \ \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial x}$$

Se derivarmos novamente essas expressões e igualarmos as derivadas segundas concluiremos:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \ \ e \ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \ ou\ seja \ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0$$

Se fizermos a mudança $y = ct$, temos:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0$$

Que é justamente a equação de onda de luz plana que tem uma importância fundamental para Física. Poderíamos listar inúmeras outras aplicações, sobretudo na Física, desta estrutura matemática que de inicio parecia uma simples brincadeira, no entanto essas são mais que suficientes para ilustrar quão poderosa e impactante é a álgebra de perplexos. E quem sabe uma área que ainda reserva surpresas que valham a pena serem exploradas.

# 3. Sexto Encontro: Modelagem Matemática para Priorização de Obras de Expansão da Rede Elétrica.

Não restam dúvidas de que planejar é preciso. Toda organização requer uma atividade de planejamento que possa direcionar adequadamente a cadeia produtiva, maximizar receitas ou minimizar despesas; e variados métodos de comprovada eficácia podem ser usados para esta finalidade.

Uma empresa que distribui energia elétrica expande sua rede de distribuição através de determinados tipos de obras, respeitando diferentes regras. Para o melhor direcionamento da execução das obras faz-se necessário um sistema de planejamento que possa ser constantemente revisado e melhorado. O uso de ferramentas matemáticas é essencial para auxiliar na definição do melhor planejamento.

Tendo sido feito como um trabalho de conclusão de curso na área de gestão de empresas, o que se apresentará será a modelagem de um problema real do dia-a-dia de uma empresa sediada em Campinas, onde o autor é funcionário. Tal modelagem recorre a conceitos de matemática elementar e introduz o método de análise hierárquica de *Thomas L. Saaty*.

Além de funcionário da empresa onde realizou-se o estudo, o autor é atualmente aluno do curso de licenciatura em matemática e fez de seu TCC, em administração, uma expressão do seu apreço pelo universo matemático.

## 3.1. O Encontro

A distribuição de energia elétrica é regida por uma série de normas estabelecidas pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL). Um importante requisito é o prazo de execução dos serviços, cujo descumprimento garante ao consumidor o recebimento de compensações financeiras (multas). Contudo, nem todos os serviços tem esta exigência; os que têm são denominados **regulados** e os demais, sem tal exigência, são chamados **não regulados**.

Portanto, o não cumprimento dos prazos gera implicações negativas à empresa mesmo nos casos dos não regulados, pois o não cumprimento dos prazos pode gerar outras complicações. Como são obras na rede, a não execução em determinado tempo pode, por exemplo, expor a rede a problemas técnicos que geram interrupções no fornecimento, o que gera reclamações de clientes. Há também outras implicações que foram consideradas no trabalho.

Nesse contexto, surge a seguinte pergunta: *Como decidir qual obra deve ter sua execução planejada em determinado momento?* Para buscar a resposta a esta questão supõe-se ser possível definir um número, ou índice, que traduza as variadas características dos tipos de obras em valores que auxiliem na tomada de decisão.

Para possibilitar a realização do trabalho, foram estudadas referências bibliográficas que pudessem sugerir e descrever meios para a obtenção do índice suposto. Também foi feita uma pesquisa dentro do próprio ambiente de trabalho da empresa, para a compreensão dos processos correlatos aos variados tipos de obras que a empresa executa.

Para a construção da ferramenta objeto deste estudo, foram considerados sete tipos de obras conforme a Tabela 2.

Tabela 2. Tipos de Obras

| **Tipo** | ***Sigla*** | ***Prazo de início*** |
|---|---|---|
| Universalização | PU | 45 dias |
| Projeto particular regulado | PP-R | 45 dias |
| Projeto particular não regulado | PP-NR | 45 dias |
| Projetos de cliente regulado | PC-R | 45 dias |
| Projetos de cliente não regulado | PC-NR | 45 dias |
| Investimento | PI | 90 |
| Manutenção | MR | 60 |

Fonte: autor.

Ao falarmos de uma ferramenta que auxilie na tomada de decisão, estamos nos referindo a um imenso rol de possibilidades que vão desde as ferramentas menos sofisticadas, construídas pelos próprios usuários, até avançados *softwares* que geram soluções baseadas em inúmeros critérios. Uma das condições de realização deste trabalho foi o uso de métodos que poderiam ser implementados com baixíssimo custo, preferencialmente usando o *Pacote Office*®.

Dentre inúmeros referenciais teóricos estudados, foi selecionado o **Método de Análise Hierárquica** (AHP, em inglês), desenvolvido por Thomas L. Saaty na década de 1970. Tal método se baseia na decisão a partir de múltiplos critérios e usa conceitos básicos de álgebra linear, podendo ser facilmente construído em Excel.

O AHP consiste na modelagem de uma estrutura hierárquica onde são dispostas as alternativas de escolha (os tipos de obras da Figura 1), os critérios pelos quais serão avaliadas as alternativas e, por fim, um vetor que contem a decisão final. As alternativas são avaliadas a luz dos critérios por meio de multiplicação de matrizes. Vetores parciais são gerados até que se tenha um último vetor, contendo quantos elementos forem as alternativas.

Os critérios usados na avaliação das alternativas devem ser estabelecidos de acordo com os objetivos do problema e de seu contexto. Foram definidos os cinco critérios descritos na Tabela 3.

Tabela 3. Critérios para avaliação das alternativas.

| ***Critério (fator)*** | ***Descrição*** |
|---|---|
| Fator Financeiro | Mostra o valor que traduz os impactos financeiros por cada tipo de obra, composto pelo valor do investimento associado, por remunerações específicas quando a execução ocorre em até 90 dias e pelos valores de multas que o atraso pode gerar. |
| Fator Risco | Descreve o risco associado ao atraso na execução dos tipos de obras. O risco é uma composição de implicações tais como crescimento da multa pelo atraso (Neste fator avalia-se o crescimento da multa pelo atraso e não o seu valor, tratado no fator financeiro). |
| Fator US | Exibe uma importância avaliando as quantidades de US para cada tipo de obras. Esta importância é o resumo das US de cada unidade de obra correspondente a cada tipo. |
| Fator Prioridade | Arbitrário, este critério foi criado para refletir decisões subjetivas que podem ser necessárias em momentos cujas condições normais do processo não se verifiquem. |
| Fator quantidade | Avalia a quantidade de cada tipo de obra no momento da aplicação da ferramenta. |

Além da avaliação das alternativas sob cada um dos critérios, os critérios também devem ser avaliados entre si. E cada avaliação é feita de forma paritária, isto é, duas a duas. As Figuras 1 e 2 ilustram como devem ser montadas as matrizes que geram as avaliações.

| | MR | PC-NR | PC-R | PI | PP-NR | PP-R | PU |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MR | | | | | | | |
| PC-NR | | | | | | | |
| PC-R | | | | | | | |
| PI | | | | | | | |
| PP-NR | | | | | | | |
| PP-R | | | | | | | |
| PU | | | | | | | |

Figura 1. Matriz para comparação paritária das alternativas

| | Financeiro | Risco | US | Prioridade | Quantidade |
|---|---|---|---|---|---|
| Financeiro | | | | | |
| Risco | | | | | |
| US | | | | | |
| Prioridade | | | | | |
| Quantidade | | | | | |

Figura 2. Matriz para comparação paritária dos critérios

Cada entrada da matriz é uma avaliação paritária. Para se fazer as comparações duas a duas o método indica o uso da Escala Fundamental de Saaty conforme abaixo.

Tabela 4. Escala Fundamental de *Saaty*.

| **Intensidade da importância** | **Definição** | **Explicação** |
|---|---|---|
| 1 | Mesma importância | Ambos os entes contribuem igualmente para o objetivo |
| 3 | Importância pequena de uma sobre a outra | Leve favorecimento de um em relação ao outro |
| 5 | Importância grande ou essencial | Um ente é fortemente favorecido em relação ao outro |
| 7 | Importância muito grande ou demonstrada | Um ente é muito fortemente favorecido em relação ao outro, sendo esta dominação demonstrada na prática |
| 9 | Importância absoluta | Em ente é absolutamente mais |

| | | |
|---|---|---|
| | | favorecido em relação ao outro |
| 2, 4, 6, 8 | Valores intermediários entre os valores adjacentes | Quando se procura um meio-termo entre dois julgamentos |

Cada par de alternativas deve ser comparado conforme esta escala e os resultados da comparação devem ser dispostos na lacuna da matriz, correspondente ao cruzamento destas alternativas. São preenchidas as lacunas da matriz triangular superior e depois, usando o inverso de cada elemento, são preenchidos os espaços da matriz triangular inferior conforme a Figura 3. Cada comparação é o elemento $a_{ij}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 1/a_{1k} & 1/a_{2k} & 1/a_{3k} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 3 – Matriz de comparações

A matriz das comparações será transformada em uma nova matriz, normalizada, e então será calculado um vetor a partir da média dos valores normalizados de cada linha. Este vetor será denominado Vetor Prioridade Média Local **(PML)** e é dado segundo a figura abaixo, onde $b_{ij}$ é o elemento normalizado.

$$PML = \begin{bmatrix} \dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} b_{1i}} \\ \dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} b_{2i}} \\ \vdots \\ \dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} b_{ki}} \end{bmatrix}$$

Figura 4. Vetor PML

Como os critérios também devem ser comparados, este procedimento deve ser feito $n + 1$ vezes, onde $n$ é a quantidade de alternativas do problema. Então são sete vetores PML que formarão uma nova matriz – a matriz dos PML. Aplicando novamente o procedimento de normalização e cálculo do vetor PML, se obtém um novo vetor, denominado agora Vetor Prioridade Global **(VPG)**.

Cada elemento deste vetor – VPG – tem um valor numérico; a soma destes valores deve ser igual a 1 e cada valor corresponde a uma alternativa. De tal correspondência pode-se tirar uma ordenação a ser usada para a decisão. O método sugere que se escolha o de maior valor, mas neste trabalho foi feita uma adaptação: cada valor representou a proporção que cada tipo de obra deve ter no planejamento. Ao final a estrutura do problema ficou conforme a Figura 5.

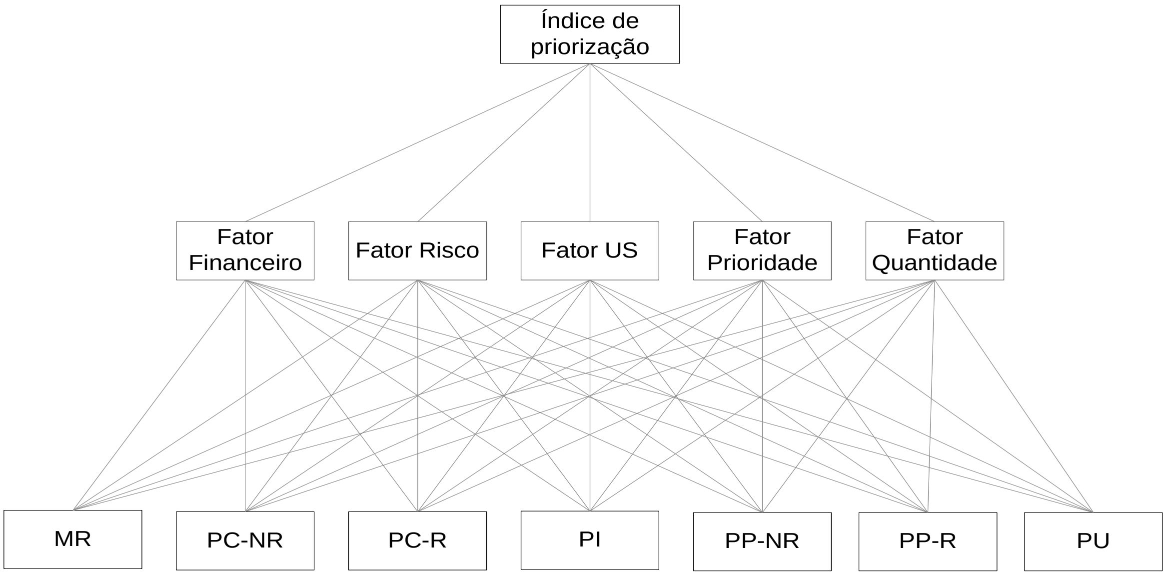



Figura 5. Estrutura hierárquica do trabalho

Voltando agora ao método de comparação, *Saaty* propõe o uso da escala fundamental e tal escala foi usada somente para a matriz de comparação dos critérios; as demais matrizes tiveram seus valores definidos segundo outro método, desenvolvido pelo autor do trabalho, uma vez que a metodologia não prevê nada em relação a isso.

Para a matriz dos critérios, que usou a escala fundamental, Saaty propõe uma avaliação de consistência, uma vez que os valores da escala são usados para auxiliar avaliações e julgamentos subjetivos feitos por pessoas que conhecem os processos. Tal avaliação consiste no cálculo de um índice denominado Razão de Consistência **(RC)**, que avalia a consistência lógica dos julgamentos.

A consistência lógica é avaliada conforme: se RC $\leq$ 0,10 então a avaliação está consistente; do contrário é necessário que seja refeita. No trabalho o RC da matriz dos critérios ficou menor do que 0,10 e, assim, foi avaliada como consistente.

Para as demais matrizes, a das alternativas, foi necessário desenvolver um método para se definir os valores de cada entrada das matrizes. Com exceção do critério Fator Risco, os demais tem uma característica em comum, que é a possibilidade de se montar um gráfico de dispersão conforme a figura 6.

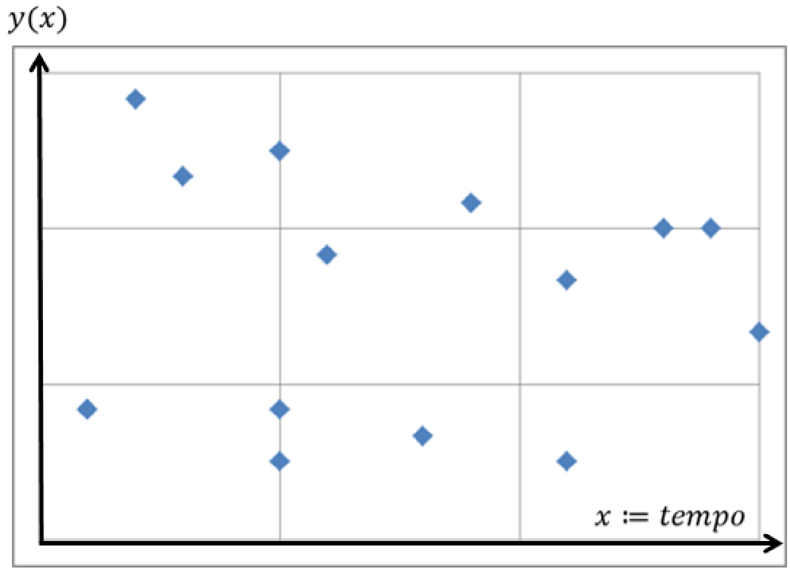



Figura 6. Dispersão

Cada ponto $(x, y)$ representa uma obra; o eixo $x$ é o prazo decorrido de cada obra e o eixo $y$ representa algum valor associado àquela obra, de acordo com o critério.

Por exemplo, $y(x)$ pode ser o valor financeiro. Para levar os valores da dispersão na matriz de comparação, usou-se o valor médio desta dispersão – o centroide dos pontos – conforme a Figura 7.

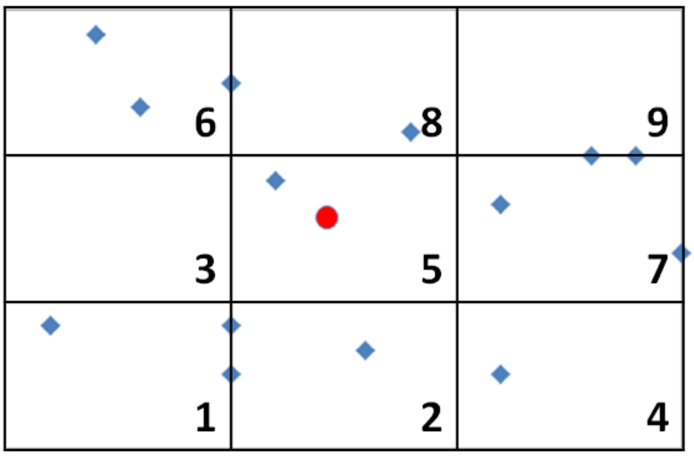



Figura 7. Tradução do centroide na escala fundamental

O centroide será convertida em um valor da escala fundamental ao se dividir o plano em 9 partes, onde cada parte recebe um valor da escala. Assim podem-se comparar os centroides das várias dispersões, uma para cada tipo de obra sob a ótica de cada um dos critérios que usam este gráfico, e escrever as matrizes de comparação.

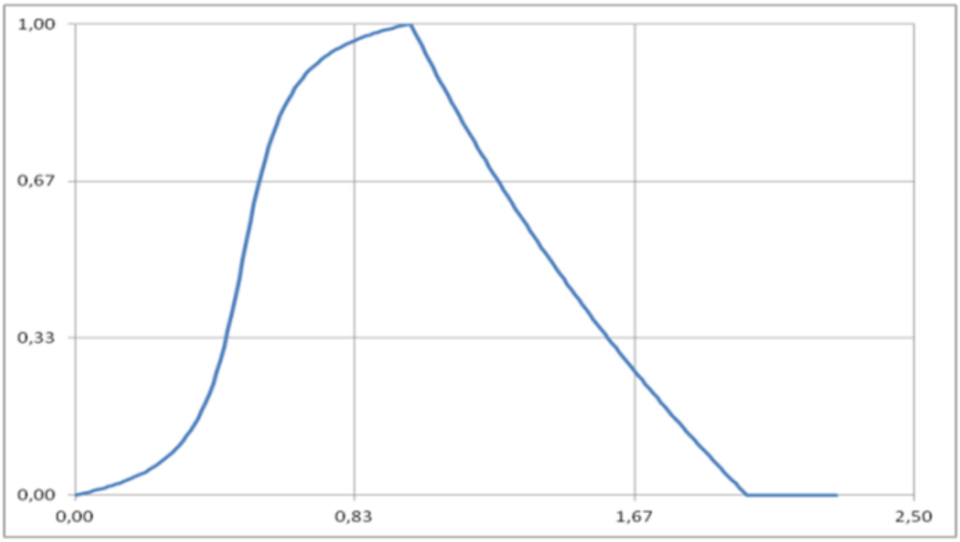
Para o critério Fator Risco também foi utilizado o plano $xy$, mas fazendo $y$ em função de $x$ por meio de funções definidas para cada alternativa. A cada obra foi associado um valor de $y$, que corresponde ao risco, em função do prazo transcorrido.

Então foram montadas as funções risco $R(T)$ mostradas na Tabela 4.

Tabela 5. Funções Risco

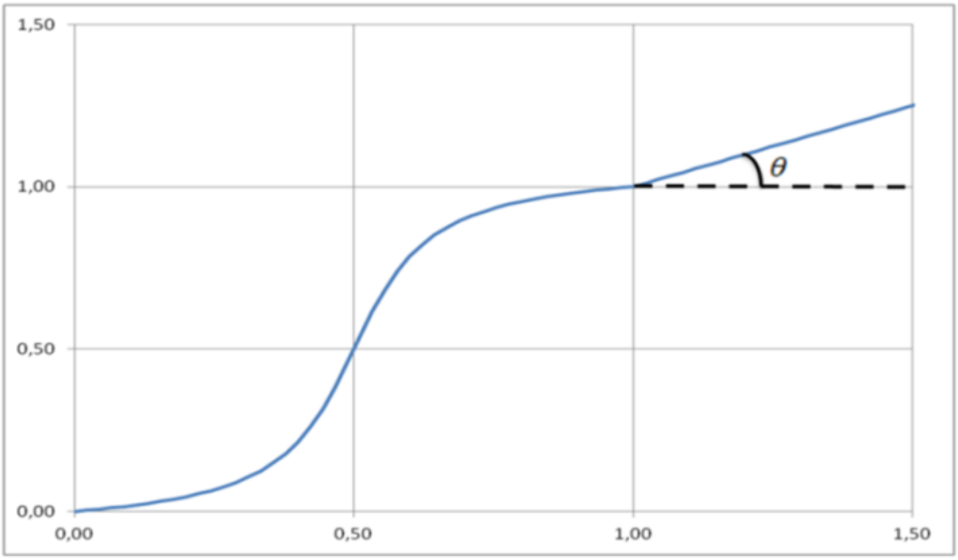
| *Tipo da obra* | *Tempo transcorrido* | *Função correspondente* |
|---|---|---|
| Todos | 0% a 100%<br>$T \in [0,1]$ | $\mathrm{R_1(T) = (0{,}365)arctg(T) + 0{,}5}$ |
| MR | 100% a 200%<br>$T \in (1,2]$ | $R_2(T) = log_{0,5}T + 1$ |
| | Maior do que 200%<br>$T > 2$ | $R_3(T) = 0$ |
| PI | Maior do que 100%<br>$T > 1$ | $R_2(T) = 1$ |
| PC-R, PP-R e PU | | $R_2(T) = 0{,}10x + 0{,}8$ |
| PC-NR e PP-NR | | $R_2(T) = 0{,}05x + 0{,}8$ |

Para todas as funções, que são definidas por partes, a primeira parte é comum e traduz o risco de não se cumprir o prazo. Então o valor $R(T)$ é dado em função de $T \in [0,1]$, ou seja, $R(T)$ é avaliado em relação ao percentual de tempo transcorrido, sobre o prazo total de execução. As figuras 8 a 10 mostram as curvas obtidas a partir das funções risco definidas para cada tipo de obra.



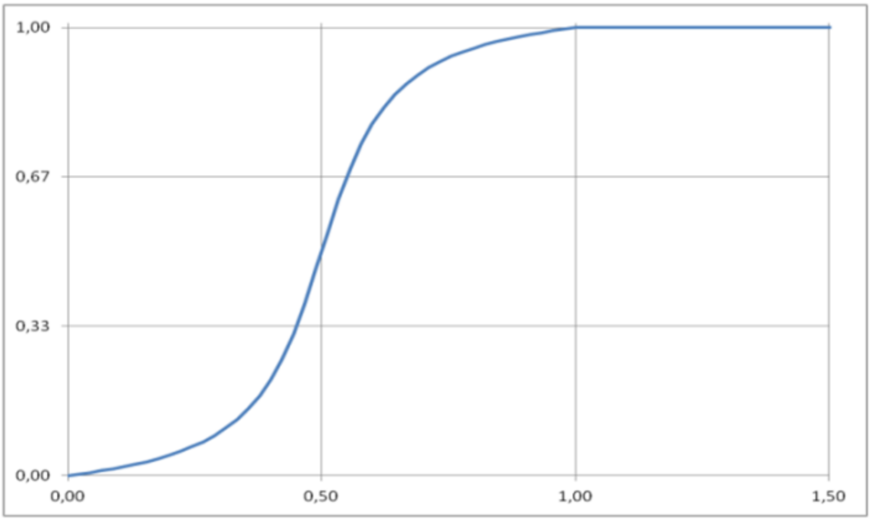

$$Risco = \begin{cases} (0{,}365)\mathrm{arctg}(\mathrm{T}) + 0{,}5;\ \mathrm{T} \in [0{,}1] \\ log_{0,5}T + 1;\ T \in (1{,}2] \\ 0;\ T \geq 2 \end{cases}$$

Figura 8. $R(T)$ do tipo MR




$$Risco = \begin{cases} (0{,}365)\mathrm{arctg}(\mathrm{T}) + 0{,}5;\ \mathrm{T} \in [0{,}1] \\ Ou \begin{cases} 0{,}05\ T + 0{,}8 \\ 0{,}10\ T + 0{,}8 \end{cases};\ T \geq 1 \end{cases}$$

Figura 9. $R(T)$ dos tipos PU, PC (R e NR) e PP (R e NR)




$$Risco = \begin{cases} (0{,}365)\text{arctg(T)} + 0{,}5;\ \text{T} \in [0{,}1] \\ 1;\ T \geq 1 \end{cases}$$

Figura 10. $R(T)$ do tipo PI

Após a plotagem dos dados, usa-se o método da conversão do centroide em valores da escala fundamental para gerar as entradas das matrizes de avaliação. E destas matrizes saem os vetores PML e, continuando a aplicação do método, chega-se ao vetor VPG, finalizando o processamento e gerando o subsídio para os responsáveis pelo processo.

## 4. Sétimo Encontro: Por que a Maioria das Pessoas Odeia Matemática?

Diz-se que a palavra aluno se origina de "Alumnus" que significa sem luz. Essa ideia vem de que o indivíduo que irá adquirir o conhecimento não tem luz própria, que necessita de um professor para o iluminar pelos caminhos do conhecimento. Muitos professores acham isso também e dizem coisas como "os alunos dependem de mim porque senão eles não aprendem" ou ainda "eu vou passar a fórmula porque assim ele aprende mais rápido".

Por outro lado, refutando a história anterior, se mostra que a verdadeira origem da palavra aluno vem do Latim "Alumnus" que deriva de outra palavra, "Alere", e significa fazer crescer, alimentar, nutrir... Algo que, ao contrário de "sem luz própria", não significa que ele não crescerá por si, ou seja, que depende necessariamente de um professor para aprender tudo. E será que o professor precisa estar lá falando tudo que o aluno deve fazer? Ele não consegue descobrir nada sozinho?

Essas perguntas vêm junto com outras nesse café matemático, que tenta mostrar como alguns conceitos de matemática são passados em sala de aula, por nós professores, muitas vezes de forma a decorada e sem contexto, sem história. Tentaremos mostrar que saímos do contexto universitário com o nosso diploma (ou não) para dar aulas sem saber de muitas coisas que deveríamos para que os nossos alunos consigam pegar esse gostinho a mais que a matemática pode nos proporcionar e assim, não odiá-la.

## 4.1. O Encontro

Quais são os momentos cruciais onde as crianças passam a odiar Matemática?

Segundo meus estudos e minha experiência, são quando começam a aprender divisão, frações e álgebra. Abaixo irei o explicar o porquê.

**a) Divisão**

Acredito que os alunos tem dificuldade para aprender divisão por que não sabem multiplicar. Afinal, o que é multiplicação? Na sua forma mais simples, a multiplicação é uma forma simples de se adicionar uma quantidade finita de números iguais. Mas para que o aluno tenha este entendimento, é importante que o professor saiba explorar várias formas de se ensinar. Uma delas, que é pouco usada, é método chinês de multiplicar.

Os chineses usavam um método muito prático utilizando varetas de bambu. As varetas ficavam dispostas na horizontal e na vertical, representando o multiplicador e o multiplicando. Os pontos de interseção das varetas são contados na diagonal, começando pela direita. Se o resultado da soma for maior que nove, some o valor da dezena na próxima diagonal.

Exemplo: Multiplicar 342 por 25.

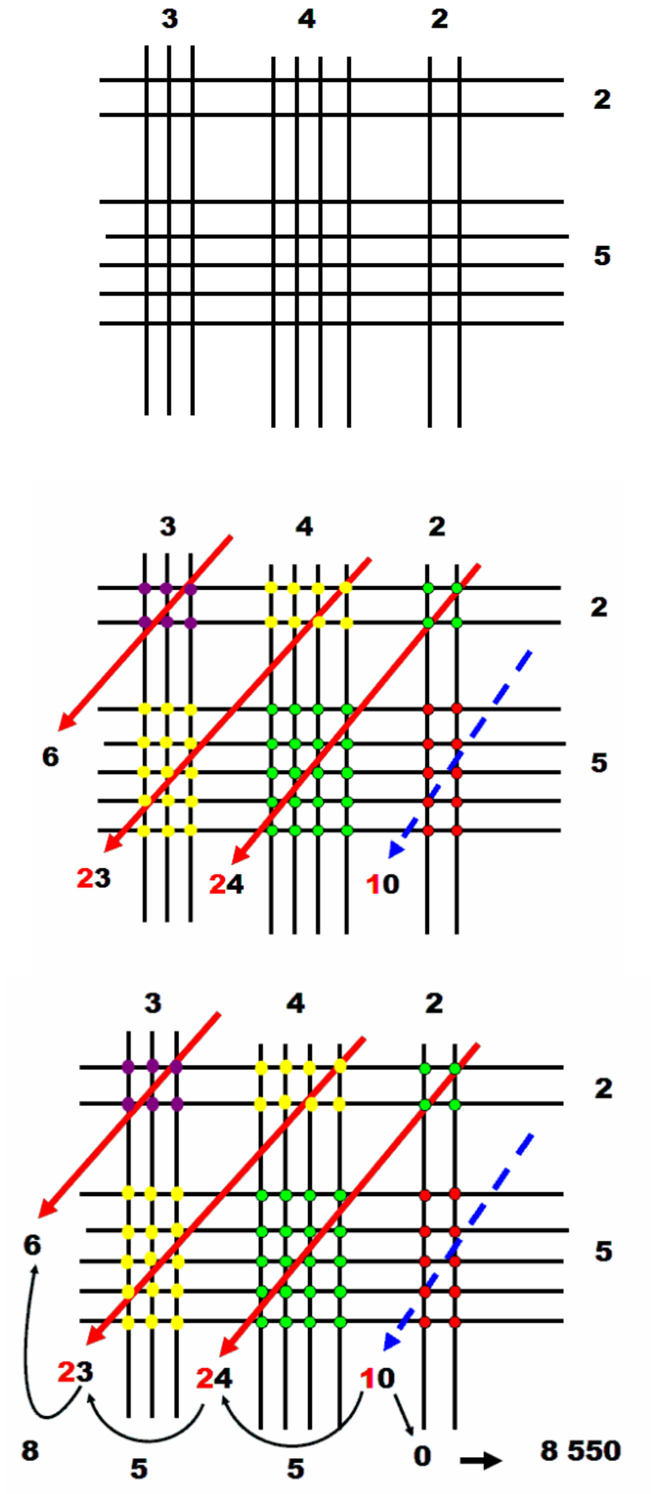



Figura 11. Multiplicando 342 por 25 utilizando o método chinês.

Logo, 342 x 25 = 8550.

Os algoritmos para divisão também não são muito esclarecedores. A divisão é a operação na qual os alunos do ensino fundamental apresentam mais dificuldade. Muitos terminam essa etapa escolar sem saber efetuá-la corretamente ou sem entender a lógica do processo. O algoritmo da divisão pode ser o grande vilão dessa história. Todos nós aprendemos a fazer a operação de divisão nas etapas iniciais da vida escolar utilizando esse algoritmo, mas muitos não entendem o processo, realizam-no automaticamente como uma receita infalível. Compreender uma operação matemática não se resume em saber fazer o algoritmo e sim saber usá-la em uma situação cotidiana. A ideia não é excluir definitivamente o algoritmo, taxando-o como um método falho e obsoleto, mas utilizá-lo de maneira significativa.

Quando trabalhamos divisão com crianças devemos introduzir o conceito de repartir igualmente (de maneira justa) e não repartir aleatoriamente. É preciso, também, trabalhar com situações cotidianas, situações que a criança pode se deparar em algum momento de sua vida. A partir de então, as crianças passam a construir seu próprio algoritmo e só depois devemos lhe apresentar o algoritmo padrão.

Vamos fazer um exemplo para demonstrar uma primeira forma de se efetuar a divisão.

Exemplo: Pedro tem 25 figurinhas e deseja reparti-las igualmente entre seus 5 amigos. Quantas figurinhas cada um receberá?

Inicialmente, as crianças poderão tentar resolver o problema através de uma tabela, como por exemplo a Tabela 5.

Tabela 5. Tabela auxiliar para divisão.

| | Nº de figurinhas | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| amigo1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| amigo2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| amigo3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| amigo4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| amigo5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |

Passada essa fase, o professor pode aproveitar os conceitos de unidade, dezena, centena, unidade de milhar, etc., para introduzir o primeiro tipo de algoritmo. Vejamos:

25 = 20 + 5, assim

| D | U |
| --- | --- |
| 2 | 5 |

Dessa forma, a divisão poderá ser feita por decomposição:

$$25 : 5 = (20 : 5) + (5 : 5) = 4 + 1 = 5.$$

Exemplo: Numa excursão da escola irão 165 alunos distribuídos igualmente em 5 ônibus. Quantos alunos irão em cada ônibus?

Solução:

165 = 100 + 60 + 5

Assim,

165 : 5 = (100 : 5) + (60 : 5) + (5 : 5) = 20+12+1 = 33 alunos em cada ônibus.

Compreendido o conceito de divisão e a lógica presente no procedimento, pode-se introduzir o algoritmo padrão, deixando claro que a decomposição também poderá ser utilizada nesse processo.

Exemplo: A capacidade máxima de um auditório é para 312 pessoas. Sabendo que as cadeiras do auditório estão dispostas em 6 filas com a mesma quantidade de cadeiras, quantas cadeiras há em cada fila? Segue a solução na Figura 12.

| C | D | U | |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 | 1 | 2 | 6 |
| 3 | 0 | 0 | 50 |
| | 1 | 2 | 2 |
| | | 0 | 50+2=52 |

Figura 12. Primeiro algoritmo para divisão.

Em cada fila haverá 52 cadeiras.

Essa ideia pode ser expandida para números com vírgula, decompondo-os e, em seguida, efetuando a divisão através do algoritmo.

**b) Frações**

Normalmente as crianças entendem o conceito de fração: representação de partes de um todo. O problema maior está na hora realizar as operações entre as frações.

No caso da soma, o método mais ensinado nas escolas é o do MMC (Mínimo Múltiplo Comum). Porém, a maioria dos alunos não entende o seu funcionamento, acabando por esquecê-lo com o passar do tempo. Outra forma de realizar a soma é utilizando o conceito de frações equivalentes.

Por exemplo, para somar 1/3 com 2/5, fazemos:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1*5}{3*5}+\frac{2*3}{5*3}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$$

Veja que não é necessário o uso do MMC. Chegamos ao resultado transformando as frações em equivalentes, e depois as somando, já com os denominadores iguais.

O professor também pode utilizar desenhos e figuras para ilustrar o funcionamento das operações.

**c) Álgebra**

Quando se começa a ensinar álgebra para os alunos, logo começam os truques: “Menos com menos é mais, mais com menos é menos, passa positivo, passa negativo...”. Mas será que os alunos, ou até mesmo os professores sabem o porquê desses truques?

**“Passa negativo” e “Passa positivo”**

São as primeiras “mágicas” que nós aprendemos: para mudar um número, variável, ou expressão de “lado”, desde que não esteja multiplicando nem dividindo outro termo, basta alterar o seu sinal. Por exemplo:

$$a + b = 35 \Longrightarrow a = 35 - b$$

$$(5x + 3) + 2 = 45 \Longrightarrow 2 = 45 - (5x + 3)$$

Mas como isso é possível? Para entendermos como funciona, veja a seguinte igualdade:

$$10 = 10$$

Concorda que 10 é igual a 10? O que acontece se retirarmos ou somarmos, dos dois lados, um mesmo valor, por exemplo, 5?

$$10 - 5 = 10 - 5$$

$$5 = 5$$

$$10 + 5 = 10 + 5$$

$$15 = 15$$

Em ambos os casos, a igualdade se mantém, 5 é igual a 5 e 15 é igual a 15. Então, em qualquer igualdade, podemos retirar ou somar um número qualquer dos dois lados da equação, sem desfazer a igualdade.

Mas onde eu quero chegar com isso? Veja o que acontece se retirarmos 5 de cada lado da igualdade abaixo:

$$5 + 3 = 2 + 6$$

$$5 + 3 - 5 = 2 + 6 - 5$$

$$\cancel{5} + 3 - \cancel{5} = 2 + 6 - 5$$

$$3 = 2 + 6 - 5$$

Compare a primeira e a última igualdade. Não parece que o 5 passou pro outro lado, e mudou de sinal? Eis o segredo! Simplesmente retiramos dos dois lados a variável, número, ou expressão.

Para a soma, usamos o mesmo raciocínio. Vejamos o que acontece quando somamos 3 dos dois lados da equação.

$$5 - 3 = 6 - 4$$

$$5 - 3 + 3 = 6 - 4 + 3$$

$$5 - \cancel{3} + \cancel{3} = 6 - 4 + 3$$

$$5 = 6 - 4 + 3$$

Compare novamente. Veja que o 3 "passou pro outro lado positivo".

**<u>"Passa dividindo" e "Passa multiplicando"</u>**

Vejamos o que acontece quando dividimos ou multiplicamos ambos os lados de uma igualdade por um número qualquer, neste caso, 2.

$$6 = 6$$

$$\frac{6}{2} = \frac{6}{2}$$

$$3 = 3$$

$$6 * 2 = 6 * 2$$

$$12 = 12$$

Em nenhum dos casos alteramos a igualdade. 3 é igual a 3, e 12 é igual a 12. Então podemos multiplicar ou dividir ambos os lados de uma equação, sem alterar a igualdade.

Assim, de forma análoga à soma e subtração, veja o que acontece quando multiplicamos uma equação por um mesmo termo em ambos os lados.

$$\frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{6}{2} * 2 = 3 * 2$$

$$\frac{6}{\cancel{2}} * \cancel{2} = 3 * 2$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

O número 2 “passou multiplicando”. Para a divisão:

$$6 = 3 * 2$$

$$\frac{6}{2} = \frac{3 * 2}{2}$$

$$\frac{6}{2} = \frac{3 * \cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

Neste caso, o número 2 “passou dividindo”.

Sendo assim, conclui-se que a maioria das pessoas odeia matemática porque não a conhece de verdade, e não tem nem mesmo a oportunidade de conhecê-la. Quem sabe agora, com a formação de professores mais conscientes, e com maior acesso a informação, as pessoas comecem a gostar mais de matemática.

## 5. Considerações Finais

O Café Matemático foi criado com o objetivo de abrir um espaço para que os estudantes pudessem expor suas próprias ideias, aproveitando para tomar um café, ajudando também na integração dos alunos. Levando em conta esse objetivo, podemos dizer que o evento foi um grande sucesso, contando a presença de mais de 200 alunos no total de encontros.

Muitos tópicos relacionados aos cursos do Imecc foram abordados, dentre os quais temos: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Variáveis Complexas e Educação Matemática. Com isso, pôde-se ver que o evento também atuou como complemento no aprendizado dos alunos.

Ao final dos encontros, muitos alunos me procuraram interessados também em apresentar seus trabalhos. Sendo assim, torcemos para que o evento continue no próximo semestre.

Por fim, a continuação da realização deste projeto foi muito gratificante, pois contribuiu em muito no meu desenvolvimento pessoal e acadêmico.

Agora que realizei um ano de Café Matemático, irei passar todo o projeto para novos estudantes do Instituto de Matemática, de modo que este trabalho continue colaborando para a integração e aprendizado dos alunos.