

Projeto Supervisionado II

Simulando Alocação de esferas

Orientando: Lucas Augusto Zoia

Orientador: Roberto Andreani

IMECC - UNICAMP

1. Introdução

Em termos geométricos, empacotamento de esferas por gravidade é, basicamente, o arranjo de esferas não sobrepostas dentro de um espaço que as contém, que pode ser de diversas formas, tais como cilindros e cubos, por exemplo. O objetivo principal do empacotamento é encontrar um arranjo no qual as esferas ocupem o menor espaço possível dentro de seu recipiente.

Tal processo é utilizado em diversas áreas do conhecimento sem ser muitas vezes notado. O empacotamento é utilizado desde áreas como química (com empilhamentos de átomos, por exemplo), matemática (otimização do espaço ocupado pelas esferas) e até mesmo economia (ao reduzir os custos, reduzindo espaço utilizado para empilhamento de produtos numa fábrica, por exemplo).

Nos dias de hoje temos diversas formas de abordagem para a solução do problema aqui citado, tais como métodos baseados nas faces das esferas, *The Kissing Number Problem*, *Random Close Pack*, Equilíbrio de Nash e métodos não lineares.

Neste projeto, seguiremos utilizando métodos não lineares para a resolução do problema. Discutiremos o empacotamento em si, com a diferença que cada bolinha será lançada individualmente e será alocada em sua posição ótima. Também apresentaremos uma solução computacional no decorrer da leitura, expondo vantagens e dificuldades encontradas utilizando o método citado acima.

2. O empacotamento de esferas

O problema de empacotamento de esferas teve notoriedade quando em 1611 o astrônomo, matemático e astrólogo alemão Johannes Kepler conjecturou que o arranjo de densidade máxima seria o empilhamento “Cúbico de Face Centrada” (CFC), porém o mesmo não provou e nem demonstrou tal conjectura, deixando apenas a curiosidade para que outros estudiosos continuassem seu raciocínio.

No entanto, o problema revelou-se mais difícil do que realmente aparentava ser com o que Kepler havia dito. Mas após muita insistência, no século 19, o famoso matemático Karl Gauss conseguiu fazer a demonstração de tal conjectura. Gauss demonstrou que o CFC é o arranjo mais denso entre os arranjos regulares, nos quais há uma periodicidade na disposição dos planos das esferas. Sendo assim, a demonstração de Gauss não leva em conta o fato de poder existir um arranjo desregular ou desordenado mais denso que o próprio CFC.

Para visualizar o arranjo CFC, imaginemos inicialmente um cubo com esferas de igual tamanho em cada um de seus vértices. Após isso, imagine que cada face do cubo possui uma esfera com o mesmo tamanho em seu centro. Agora, suponha que cada aresta irá se encolher simultaneamente até que as esferas se toquem e não seja mais possível o encolhimento continuar. Na Figura 1, é possível ver o antes da compactação das arestas para a formação da estrutura CFC e na Figura 2, após.

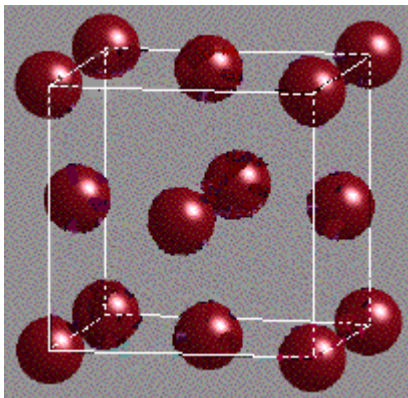


Figura 1 – antes da compactação

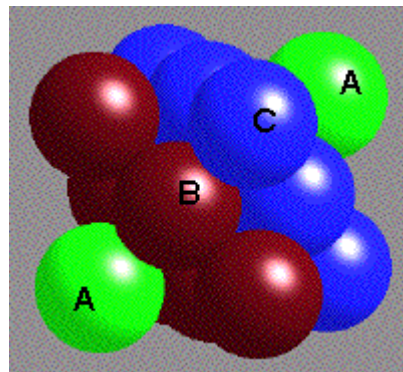


Figura 2 – após a compactação

Para ilustrarmos o fator de empacotamento atômico (FEA) do arranjo CFC precisamos definir termos específicos de tais estruturas. Temos basicamente dois termos principais: a *Célula Unitária* é a representação da estrutura cristalina (agrupamento de átomos distribuídos em uma rede cristalina) e o *Número de Coordenação* que corresponde ao número de átomos vizinhos mais próximos.

Sendo assim e observando novamente as Figuras 1 e 2 concluímos que no arranjo CFC cada átomo do vértice é dividido em 8 células unitárias e os átomos

das faces pertencem a somente 2 células unitárias, portanto teremos 4 átomos por células unitárias ($8 \times 1/8$ de átomos dos vértices mais $6 \times 1/2$ de átomos das faces).

Abaixo, na Figura 3, apresentaremos o esquema das distâncias interatômicas do arranjo, para então calcularmos o FEA.

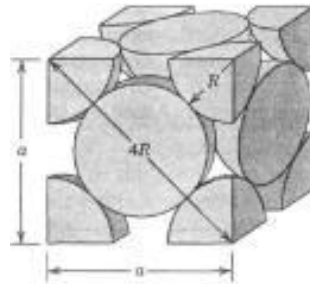


Figura 3 – distâncias interatômicas CFC

O cálculo das arestas a em função de R , através do Teorema de Pitágoras, é dado por:

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 &= (4R)^2 \\ 2a^2 &= 16R^2 \\ a^2 &= 8R^2 \\ a &= 2R\sqrt{2} \end{aligned}$$

Prosseguindo, temos que a FEA é obtida por:

$$FEA = \frac{\text{Volume dos átomos}}{\text{Volume do cubo}} = \frac{4\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{(2R\sqrt{2})^3} = \frac{\frac{16}{3}\pi R^3}{16R^3\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74$$

Temos, portanto, que o arranjo CFC tem densidade de ocupação de aproximadamente 74%, ou seja, desperdiça pouco mais de 25% do volume total que possui para ocupar.

Em densidade, existe outro tipo de arranjo que é equivalente ao CFC, o chamado “Hexagonal Compacto” (HCP). A diferença entre ambos está apenas na disposição dos planos de esferas, posto isso, para um se transformar no outro basta um simples deslocamento dos planos.

O arranjo HCP possui 6 átomos por célula unitária ($12 \times 1/6$ dos átomos dos vértices mais $8 \times 1/2$ dos átomos das faces).

A seguir apresentaremos o esquema de distâncias interatômicas do HCP e provaremos que tal arranjo possui mesmo FEA que o arranjo CFC.

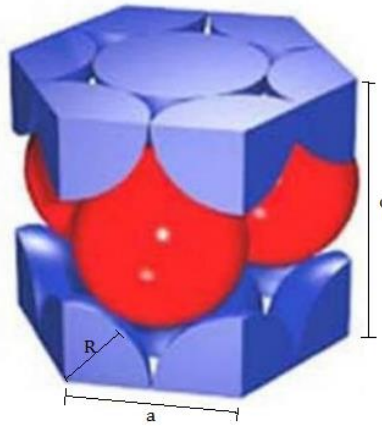


Figura 4 – Distâncias interatômicas HCP

Temos que:

$$\begin{aligned}
 a &= 2R \\
 c &= \sqrt{\frac{8}{3}} 2R \\
 c &\approx 1,633a
 \end{aligned}$$

Daí, obtemos a FEA por:

$$FEA = \frac{6\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{3a^2c \cos 30^\circ} = \frac{8\pi R^3}{3(2R)^2(1,6332R)\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\pi R^3}{19,596R^3\sqrt{3}} \approx 0,74$$

Isto posto, provamos que ambos possuem a mesma FEA.

Para se montar um arranjo CFC ou HCP é muito simples, basta seguir os simples passos listados a seguir e demonstrados na Figura 5. E mis abaixo, na Figura 6, temos uma melhor explicitação da diferença visual entre os dois arranjos.

- 1) Construa a primeira camada sobre um plano horizontal cercado cada esfera por outras seis, todas compactadas ao máximo, formando hexágonos regulares em torno de cada esfera;
- 2) A segunda camada é formada colocando-se esferas nos espaços vazios (reentrâncias) da primeira camada;
- 3) A terceira camada tem duas possibilidades, uma resulta no arranjo CFC e a outra no arranjo HCP. No primeiro caso, as esferas correspondentes à terceira camada são colocadas nos espaços vazios da segunda camada (representadas pelos pontos vermelhos da Figura 5.c). No segundo caso, as esferas são alinhadas perfeitamente com as

esferas da primeira camada (representadas pelos pontos azuis da Figura 5.c)

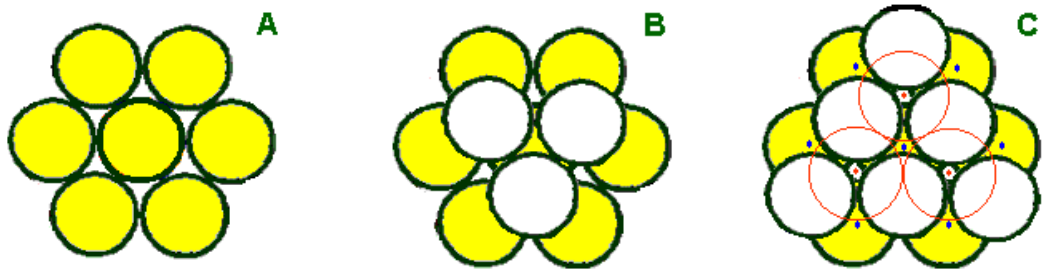


Figura 5 – Camadas dos arranjos CFC e HCP

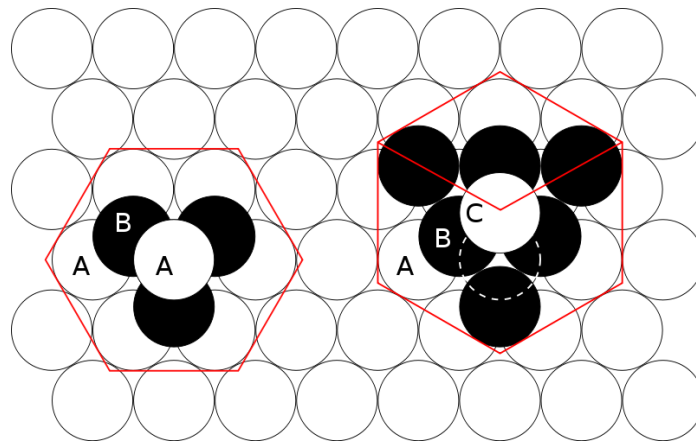


Figura 6 – Arranjos HCP e CFC, respectivamente. Cada letra indica uma camada.

2.1) Outra versão da conjectura de Kepler

Em 1909, Axel Thue formulou uma nova versão de forma bidimensional para a conjectura de Kepler, dizendo que “*Nenhum mosaico no plano, formado por discos que não se sobrepõem, tem densidade maior que o mosaico hexagonal.*”.

Para construir o mosaico hexagonal dito por Thue, imagine 4 esferas de mesmo tamanho dispostas conforme mostra a Figura 7.

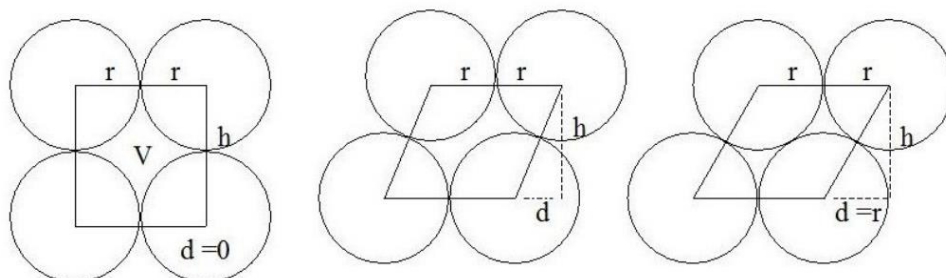


Figura 7 – Parte do mosaico hexagonal

A reentrância V é dada pela subtração entre a área do paralelogramo e a área do círculo:

$$V = 2r\sqrt{4r^2 - d^2} - \pi r^2,$$

onde $0 \leq d \leq r$ e $V = f(d)$ é decrescente em d .

Note que a região tem maior área quando $d = 0$:

$$V_{\text{máx}} = f(0) = 4r^2 - \pi r^2 = r^2(4 - \pi)$$

e menor área quando $d = r$:

$$V_{\text{mín}} = f(r) = 2\sqrt{3}r^2 - \pi r^2 = r^2(2\sqrt{3} - \pi)$$

Lembrando que a FEA é dada pela razão entre o volume da esfera, neste caso do círculo, e do elemento gerador da estrutura, no nosso caso um mosaico. À vista disso teremos que:

$$FEA_{\text{mín}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79$$

$$FEA_{\text{máx}} = \frac{\pi r^2}{2\sqrt{3}r^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,91$$

Que é onde encontramos a formação do mosaico hexagonal teorizado por Thue e que pode ser visto na Figura 8.

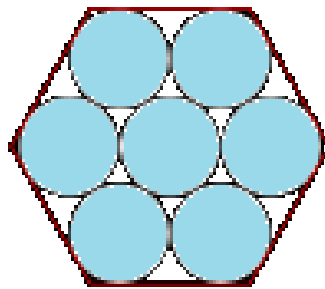


Figura 8 – Mosaico hexagonal

2.2) Método não linear

Diversos modelos matemáticos não lineares já foram, e vem sendo, criados para resolver empacotamentos de objetos de diversas dimensões em recipientes das mais variáveis formas e dimensões, também. Alguns sem restrições (o que torna o a resolução do problema um tanto quanto fictícia, dado que para execução prática devemos levar em conta diversos fatores que podem

dificultar nossa otimização) e outros com restrições, que nos deixam mais próximos de uma solução real e efetiva.

Um método não linear que tem sido empregado com muito sucesso é o de que dado um número infinito de itens idênticos e um objeto, todos de dimensão fixa e conhecida, deve-se empacotar o maior número possível de itens no objeto.

Neste modelo, entre todas as variantes existentes para o problema de empacotamentos, estudaremos a variante que busca minimizar as dimensões de um objeto que comporte em seu interior um número dado de itens circulares idênticos, sem que haja sobreposição dos mesmos. Posto isso, obtemos uma formulação para o seguinte modelo não linear:

Minimizar: as dimensões do objeto

Sujeito a: ausência de sobreposições ao comportar os itens

Definiremos $c_i = (c_i^x, c_i^y) \in \mathbb{R}^2$, o centro, e $r_i \in \mathbb{R}$, o raio, do i -ésimo item, considerando $i = 1, 2, \dots, N$. Também iremos utilizar $d(\cdot, \cdot)$ a distância euclidiana entre dois pontos no \mathbb{R}^2 . A restrição com relação à sobreposição dos itens depende do formato do mesmo, e como os definimos como circular nesse modelo teremos a inequação abaixo:

$$d(c_i, c_j) \geq r_i + r_j, \quad \forall i \neq j$$

As outras restrições relacionadas aos limites do objeto no qual serão compactados os itens é dependente de sua forma, portanto a função definida para o modelo não linear acima citado diversificará conforme o objeto escolhido.

2.2.1) Objeto quadrado

A função objetivo que temos interesse é a de minimizar o lado L do quadrado. Iremos começar supondo que a origem do sistema cartesiano é no vértice inferior esquerdo do quadrado. Sendo assim, o modelo não linear é tido como:

Minimizar: L

Sujeito a: $r_i \leq c_i^x \leq L - r_i, \quad \forall i$

$r_i \leq c_i^y \leq L - r_i, \quad \forall i$

Restrições de relacionadas ao item

2.2.2) Objeto Circular

Objetivamos minimizar o raio R do círculo. Além de que os itens que estiverem contidos no objeto circular satisfazem $R \geq d(c_i, C) + r_i$, onde C corresponde ao centro do objeto. Partiremos do princípio de que a origem será centrada, nos trazendo o seguinte modelo não linear:

Minimizar: R

$$\text{Sujeito a: } (c_i^x)^2 + (c_i^y)^2 \leq (R - r_i)^2, \quad \forall i$$

Restrições de relacionadas ao item

2.2.3) Objeto retangular

A minimização das dimensões de um retângulo pode ter duas abordagens diferentes:

- (a) Minimização da soma da base e da altura (semi-perímetro)
- (b) Minimização da área

Dado isso, e uma vez que as abordagens não são equivalentes temos dois diferentes modelos não lineares:

(a) Minimizar: $L + W$

$$\text{Sujeito a: } r_i \leq c_i^x \leq L - r_i, \quad \forall i$$
$$r_i \leq c_i^y \leq W - r_i, \quad \forall i$$

Restrições de relacionadas ao item

(b) Minimizar: $L \times W$

$$\text{Sujeito a: } r_i \leq c_i^x \leq L - r_i, \quad \forall i$$
$$r_i \leq c_i^y \leq W - r_i, \quad \forall i$$

Restrições de relacionadas ao item

2.2.4) Objeto em *strip*

O objeto *strip* tem uma de suas dimensões fixadas, portanto poderemos minimizar somente uma de suas dimensões, que denotaremos por W , portanto obtemos o modelo:

Minimizar: W

$$\text{Sujeito a: } r_i \leq c_i^x \leq L - r_i, \quad \forall i$$
$$r_i \leq c_i^y \leq W - r_i, \quad \forall i$$

Restrições de relacionadas ao item

Otimizamos esse tipo de problema quanto grande quantidade dos itens são colocados em contato entre si ou com as bordas do objeto, o que torna ativa muitas das restrições citadas, como podemos ver na Figura 9.

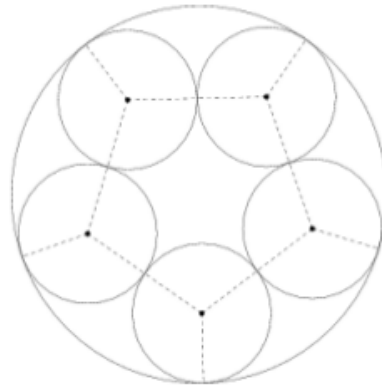


Figura 9 – representação ótima de 5 itens em objeto circular

Portanto, se já conhecidas essas que acabariam sendo satisfeitas com igualdade, é então possível escrever um modelo de equações não lineares cuja solução constitui uma resposta para o método então estudado. Sendo assim, poderíamos obter uma solução de precisão ainda melhor que a fornecida pelos métodos tradicionais de otimização.

3. Equilíbrio de Nash

Em 1978, John Forber Nash ganhou o “Prêmio Teoria John von Neumann”, devido às suas descobertas com relação ao equilíbrio não-cooperativo, chamado atualmente por Equilíbrio de Nash.

Tal equilíbrio representa uma situação em que, em um jogo envolvendo um ou mais jogadores, a mudança unilateral da estratégia não acrescenta ganho para nenhum jogador. Em outras palavras, não há incentivo para tal mudança.

Para esclarecer essa definição iremos supor que há um jogo com n participantes. No decorrer do jogo, cada um desses n participantes escolhe sua estratégia ótima, ou seja, aquela que lhe trará mais ganho, vantagem. Dado isso, se cada jogador concluir que ele não tem como melhorar sua estratégia levando em conta as estratégias escolhidas pelos $n-1$ adversários (lembrando que as mesmas não podem ser alteradas), então as estratégias escolhidas pelos participantes tem um Equilíbrio de Nash.

Podemos definir tal equilíbrio matematicamente, definindo por (S, f) um jogo com n participantes, onde S_i é o conjunto de estratégias possíveis para o participante i , $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ é o conjunto de estratégias que especificam todas as estratégias em um jogo, sendo somente uma para cada participante e $f = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ a função de *payoff* (recompensa). Chamaremos x_{-i} o conjunto de estratégias de todos os jogadores com exceção do jogador i . A partir do momento que cada jogador $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ escolhe sua estratégia x_i resultando no conjunto de estratégias $x = (x_1, \dots, x_n)$ então o jogador i obtém o *payoff* $f_i(x)$. Devemos notar que o *payoff* depende da estratégia selecionada pelo jogador i e também pelas estratégias escolhidas pelos seus adversários.

Um conjunto de estratégias $x^* \in S$ é um equilíbrio de Nash caso nenhuma alteração unilateral da estratégia seja benéfica para este jogador, ou seja,

$$\forall i, x_i \in S, x_i \neq x_i^*: f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*)$$

Neste projeto utilizaremos o princípio do equilíbrio de Nash no que diz respeito às bolinhas, fazendo com que as mesmas se aloquem otimamente preocupando-se somente em sua posição ótima, sem levar em conta a posição de outras bolinhas, ou até mesmo choques com outros corpos.

4. Modelagem matemática

Para modelarmos o problema, utilizaremos o modelo citado na seção 2, e então o aplicaremos no estudo que foi proposto no capítulo X, o qual diz que devemos colocar as bolinhas, uma a uma, dentro de um cilindro de forma que as mesmas se aloquem na melhor posição possível.

Para isso teremos a função objetivo e as restrições, que serão dadas por:

- **Função Objetivo:** (Responsável por minimizar a altura w que as bolinhas atingirão após serem soltas no cilindro, seguindo um Equilíbrio de Nash)

Minimizar w

- **Restrições:** (Temos que o raio de cada bolinha será dado por r_i , a posição da bolinha i no eixo x será x_i , a posição da bolinha i no eixo y será y_i e a posição da bolinha i no eixo z será z_i . Nosso cilindro será posicionado no eixo (x,y) e a altura do mesmo no eixo z . O raio de cilindro será dado por R .)

- (a) A posição z_i não deve ser maior ou igual que o raio r_i da bolinha:

$$z_i \geq r_i$$

- (b) Os valores dos raios das bolinhas devem ser positivos:

$$r_i > 0$$

- (c) As bolinhas não podem ultrapassar os limites das superfícies laterais do cilindro:

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r_i \leq R$$

(d) As bolinhas não podem sobrepor-se umas às outras:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \geq (r_i - r_j)^2$$

A Figura 10 abaixo, ilustra as restrições para o nosso modelo:

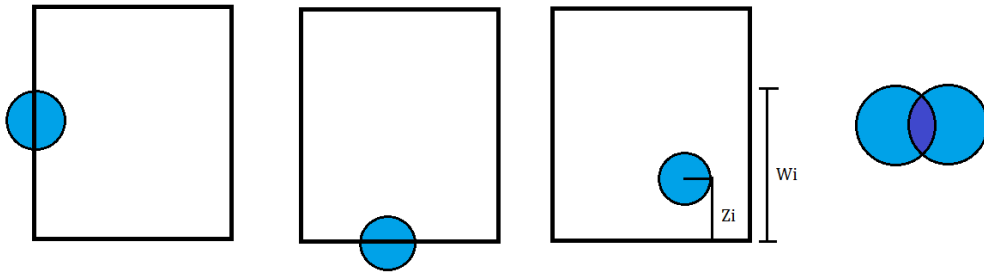


Figura 10 – Restrições para o modelo de forma ilustrativa

Portanto, juntando a função objetivo e as restrições citadas teremos o seguinte modelo, para $i, j = 1, 2, \dots, n$, teremos o seguinte modelo final:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar: } z_i \\ &\text{Sujeito a: } z_i \geq r_i; \\ &\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r_i \leq R; \\ &(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \geq (r_i - r_j)^2 \end{aligned}$$

5. Experimento Físico

O experimento físico consistiu em depositarmos, aleatoriamente, as bolinhas em um cilindro de raio conhecido e medir os diferentes valores de altura. Tomamos os devidos cuidados com manter o cilindro imóvel e movimentos que pudessem alterar a configuração obtida aleatoriamente.

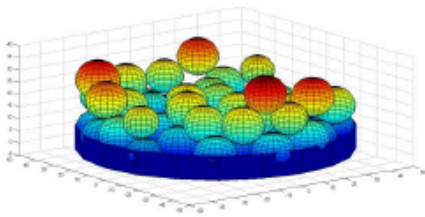
Realizamos o procedimento para quantidades distintas de bolinhas: primeiramente com 50 bolinhas, cujos valores de diâmetro estão apresentados no Apêndice, depois para 100 bolinhas, em que utilizamos os 100 primeiros valores de diâmetro apresentados no Apêndice, e, por fim, realizamos o experimento para 200 bolinhas, cujos diâmetros estão apresentados no Apêndice.

5.1 Estudo com 50 bolinhas

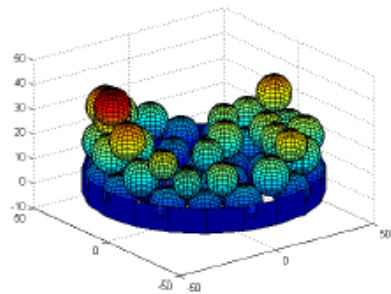
Medimos os diâmetros de 50 bolinhas e os valores estão apresentados no Apêndice. Utilizamos um cilindro com raio 5cm.

Obtivemos 7 valores distintos de altura, a saber: 6,3cm, 5,7cm, 6,8cm, 6,9cm, 6,1cm, 5,1cm e 6,4cm, sendo o último o melhor resultado. Em todos os casos, não causamos perturbações ao meio que pudessem interferir na configuração do experimento.

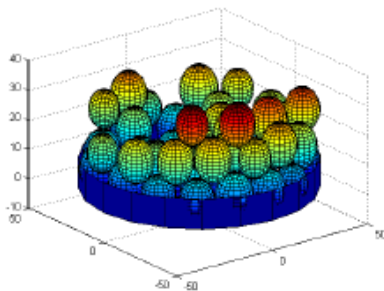
Tempo: 47s Altura:3,99cm



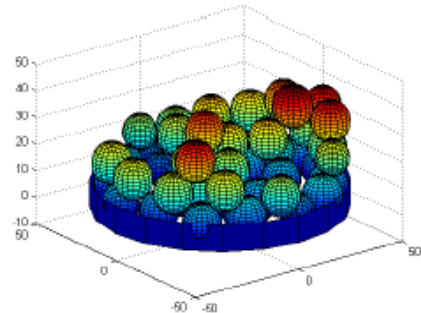
Tempo: 86s Altura:4,78cm



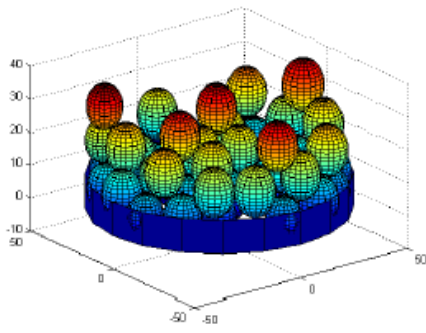
Tempo: 71s Altura:3,80m



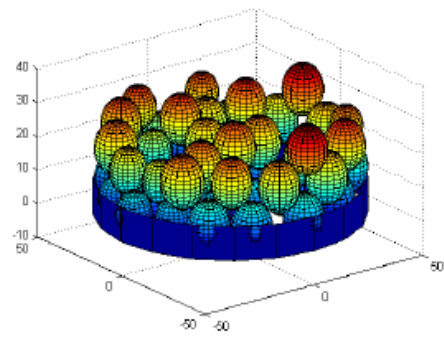
Tempo: 82s Altura4,22cm



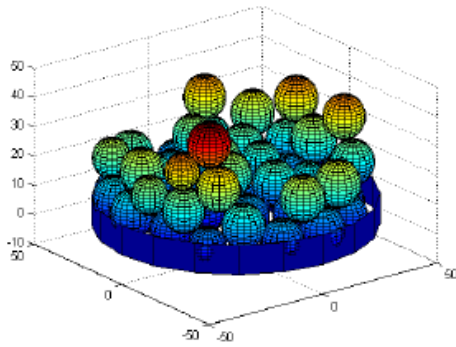
Tempo: 85s Altura:3,90cm



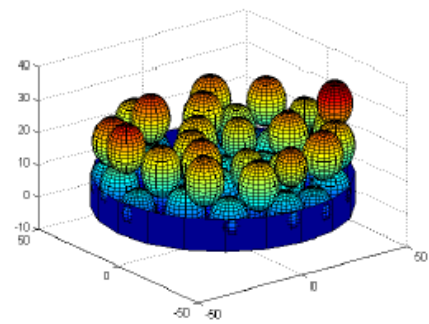
Tempo: 82s Altura:3,52cm



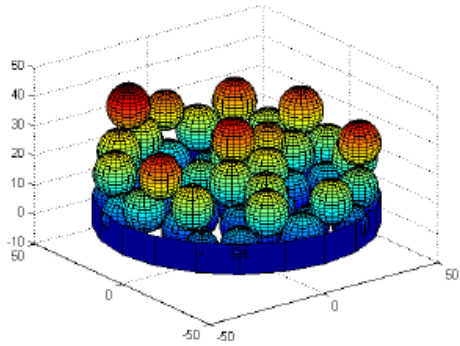
Tempo: 90s Altura:4,89cm



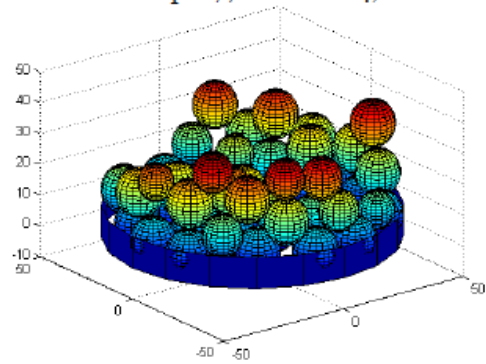
Tempo: 78s Altura:5,58cm



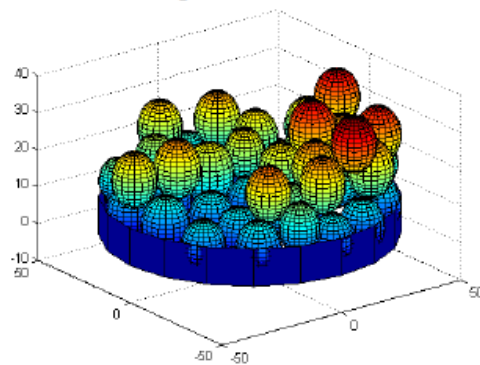
Tempo: 78s Altura:4,31cm



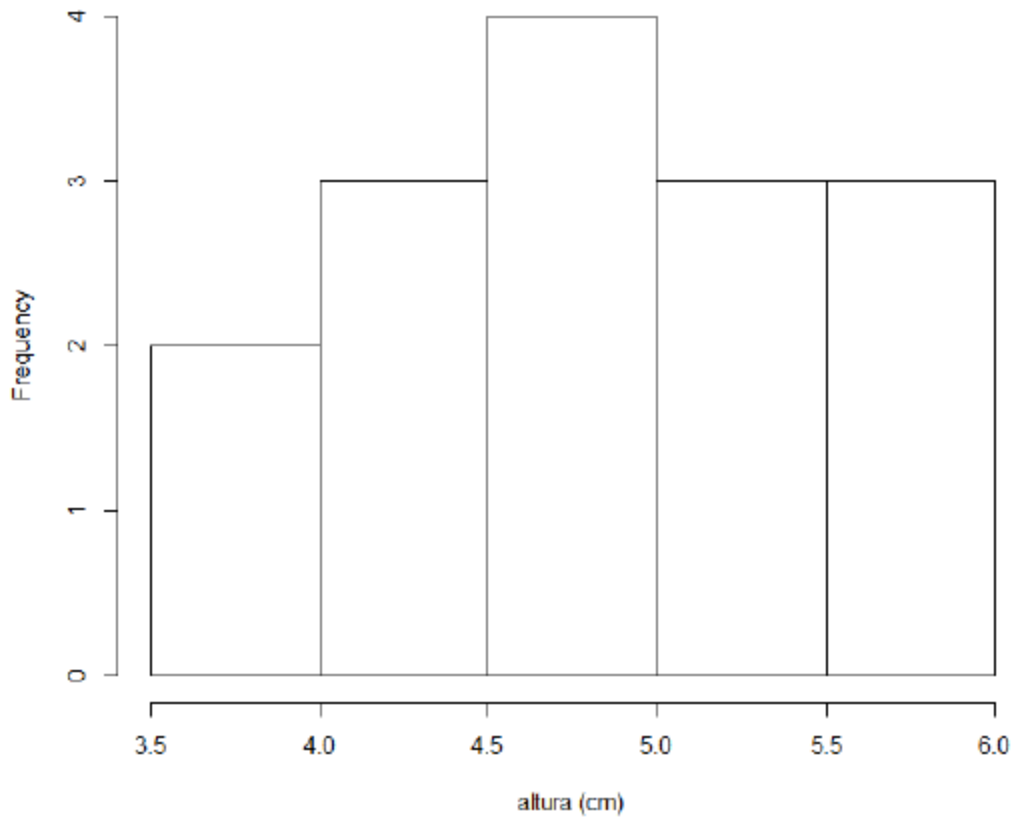
Tempo: 77s Altura:4,12cm



Tempo: 77s Altura:4,12cm



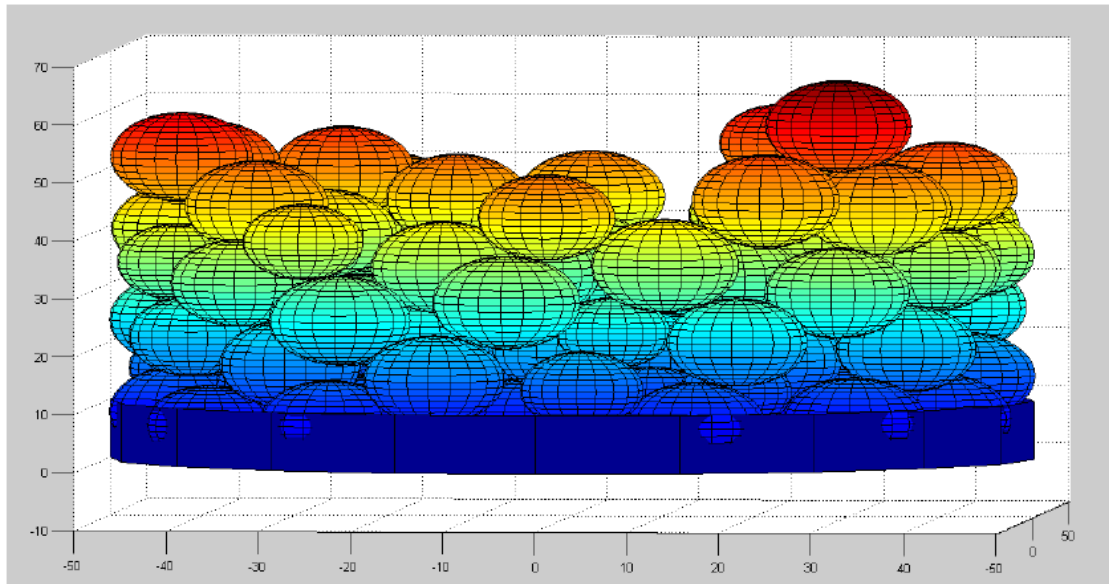
Histograma Experimento Físico - 50 bolinhas



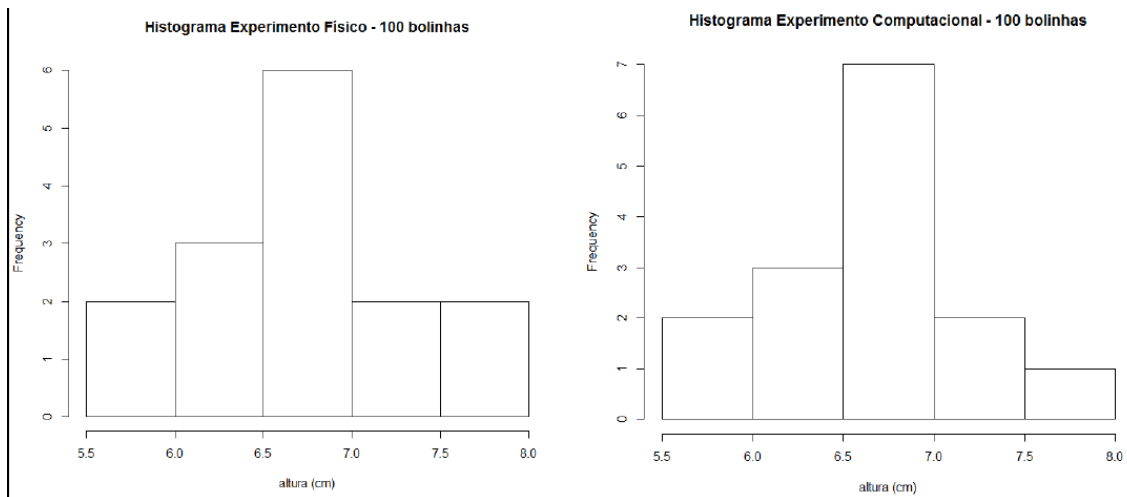
5.2 Estudo com 100 bolinhas

Para o experimento com as 100 bolinhas, utilizamos os valores de diâmetro das 100 primeiras bolinhas apresentadas no Apêndice e, todos os cuidados experimentais foram tomados. Utilizamos um cilindro com raio 8cm.

Obtivemos 7 valores distintos de altura, a saber: 11,4cm, 10,5cm, 9,2cm, 8,4cm, 11,1cm 10,9cm e 7,4cm, sendo o último o melhor resultado. Em todos os casos, tomamos os mesmos cuidados que o experimento realizado com 50 bolinhas.



(Simulação com 100 bolinhas - Altura : 6,7 cm ; Tempo :448 s)



5.3 Estudo com 200 bolinhas

Medimos os diâmetros de 200 bolinhas e os valores estão apresentados no Apêndice. Utilizamos um cilindro com raio cm..

Obtivemos 7 valores distintos de altura: 17,8cm, 21,0cm, 18,7cm, 20,8cm, 19,8cm, 20,3cm e 19,1cm, sendo a primeira o melhor resultado. Ademais, tomamos os mesmos cuidados que o experimento realizado com 100 bolinhas.

6. Experimento Computacional

Foi utilizado o software MatLab para gerar as simulações. O modelo utilizado foi o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & z_i \\ \text{Sujeito a:} \quad & z_i \geq r_i; \\ & \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r_i \leq R; \\ & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \geq (r_i - r_j)^2 \end{aligned}$$

Onde z_i é a bolinha que está sendo lançada no momento.

No nosso modelo nós fixávamos todas as bolinhas que já foram lançadas e tentamos minimizar somente a altura da bolinha i . Desta maneira realizamos diversos experimentos, abaixo mostraremos a ilustração de alguns desses experimentos. A ilustração mostra o posicionamento das bolinhas dentro do cilindro e também o tempo de execução e a altura máxima das bolinhas.

7. Discussão

Dado que nosso problema era simular um empacotamento esférico por ação da gravidade, não poderíamos adotar um simples sistema de empacotamento, já que o mesmo não corresponderia a realidade, mas o problema em si de empacotamento por gravidade é extremamente complexo e trabalhoso, pois se considerada a gravidade, altura de lançamento das esferas, dinâmica de colisão entre cada bola e cilindro, torna o problema praticamente impossível de ser modelado e conseqüentemente resolvido. Mediante a isso utilizamos de uma simplificação envolvendo equilíbrio de Nash e o método de ponto interior a fim de aproximar ao máximo nosso problema da realidade.

8. Conclusão

Em vista das aproximações feitas para modelagem do problema (citadas em Discussão), e das aproximações numéricas do software MatLab, podemos inferir que nosso modelo nos deu resultados plausíveis e satisfatórios em vista do problema real, já que ele conseguia minimizar a altura w do conjunto de bolinhas utilizando-se da formulação de Equilíbrio de Nash de forma que a cada iteração, cada bolinha preocupava-se exclusivamente em minimizar w se preocupando com as demais. Sendo

assim concluímos satisfatório nosso modelo e programação em virtude dos resultados numéricos e do gráfico 3d impresso das esferas sendo alocadas uma a uma pelo programa Matlab.

9. Apêndice

Bolinha	Diâmetro(mm)	Bolinha	Diâmetro(mm)	Bolinha	Diâmetro(mm)	Bolinha	Diâmetro(mm)
1	13	51	13	101	14,1	151	15,5
2	12,3	52	15,3	102	15,1	152	15
3	15,2	53	14,1	103	14,6	153	12,8
4	13,4	54	15,2	104	15,6	154	15,6
5	16	55	15,8	105	15,3	155	16,3
6	15,3	56	15,3	106	16,2	156	14,8
7	16,9	57	15,2	107	15,5	157	14,9
8	15,2	58	15,6	108	16	158	15,2
9	15,8	59	13,5	109	14,1	159	15,4
10	14,2	60	15,3	110	13,7	160	13,1
11	16,3	61	13,9	111	15,8	161	13,5
12	13,2	62	16,3	112	14	162	13,2
13	14,7	63	15,3	113	16,1	163	15
14	12,8	64	15,8	114	15,5	164	15,3
15	15,7	65	15,5	115	13,8	165	16,3
16	16	66	15,6	116	15,9	166	13,3
17	17,1	67	15,4	117	13,8	167	13,2
18	14,5	68	14	118	15,7	168	16
19	15	69	15,9	119	13,6	169	15,3
20	15	70	13	120	15,3	170	13
21	15,5	71	15,1	121	15,3	171	13,9
22	15,3	72	13,6	122	15,3	172	13,8
23	14,8	73	13,6	123	14,4	173	16,2
24	15,3	74	16,4	124	14,4	174	15,2
25	15	75	16	125	13,6	175	15,3
26	15	76	13,1	126	15,5	176	15
27	12,9	77	14,6	127	14,4	177	15,6
28	15,3	78	15,3	128	15,7	178	13,9
29	16	79	14,9	129	15,8	179	16,8
30	16	80	15,6	130	13,7	180	15,3
31	15,1	81	13,6	131	14,2	181	13,3
32	13,6	82	14,1	132	16,8	182	12,9

33	15,1	83	16,5	133	13,6	183	15,1
34	17	84	15,8	134	13,3	184	14,7
35	15,9	85	15	135	16	185	16,1
36	15,3	86	15,9	136	15,1	186	15,4
37	15,4	87	15,4	137	13	187	12,9
38	13,3	88	15,6	138	15,8	188	16,8
39	14,3	89	15,6	139	16,8	189	12,6
40	13,1	90	14,6	140	16,7	190	16,8
41	13	91	15,8	141	15,3	191	16,2
42	15,4	92	13	142	16,4	192	14,2
43	15,2	93	15,3	143	16,2	193	13,8
44	16	94	13	144	17,3	194	12,1
45	14,2	95	13,8	145	16,7	195	13
46	15	96	15,9	146	13	196	15,3
47	15,1	97	16	147	15	197	16
48	16,3	98	12,3	148	16,1	198	16,3
49	13,5	99	16	149	15,5	199	14,8
50	13,8	100	13,7	150	16,9	200	16,3