



**Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica**  
**Universidade Estadual de Campinas**

MS 777 – Projeto Supervisionado

**Café Matemático: Transformando Café em Teoremas**

Aluno: Marcelo de Oliveira Flora

Orientador: Prof. Dr. Christian Horacio Olivera

Campinas, Junho de 2013.

## Sumário

|   |    |
|---|----|
| 1. Introdução.....  | 3  |
| 2. Primeiro Encontro: Problemas no Uso de Coordenadas Polares para o Cálculo de Limites.....  | 5  |
| 3. Segundo Encontro: “ <i>Como pende a linha flexível, estará o arco rígido.</i> ” e outras histórias de física, geometria e arquitetura..... | 11 |
| 4. O Terceiro Encontro: Os Movimentos da Esfera Celeste.....  | 26 |
| 5. Quarto Encontro: Transformações Conformes: Utilizando Variáveis Complexas na Resolução de EDP's .....                                      | 37 |
| 6. Considerações Finais.....  | 41 |

**Resumo:** O Café Matemático é um evento criado em 2013 que tem como objetivo abrir um espaço para que os estudantes possam expor suas próprias ideias, aproveitando para tomar um café, ajudando também na integração dos alunos. Foram organizados quatro encontros durante o semestre, no auditório do IMECC, contando com a participação de mais de cem alunos. Nestes encontros foram expostos vários assuntos, abordando temas como Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, conceitos de Astronomia, Variáveis Complexas e Equações Diferenciais. Por fim, muitos alunos acabaram se interessando em expor seus trabalhos também. Sendo assim, o evento deve continuar no próximo semestre.

## 1. Introdução

O Café Matemático nasceu da divisão de um evento já existente no Imecc, organizado pelo Centro Acadêmico dos estudantes do Imecc (CAMECC), que se chamava Camecc'on Leite. Este evento tinha por objetivo fazer a exibição de filmes relacionados à matemática no auditório do instituto.

Com o passar do tempo, surgiu a necessidade de que houvesse algum espaço no IMECC para discussão de problemas sociais. Sendo assim, o Camecc'on Leite tornou-se um evento para a discussão de tais problemas. Com isso, decidi criar um novo evento: o Café Matemático. O intuito básico deste evento é o de criar um espaço para que os estudantes possam expor suas próprias ideias, aproveitando para tomar um café, ajudando também na integração dos alunos.

Sendo assim, com o apoio do CAMECC, foram desenvolvidos cartazes, grupos nas redes sociais, e também um logotipo.

Ao todo, foram organizados quatro encontros, um a cada mês, de Março a Junho de 2013. Estes encontros aconteceram no auditório do Imecc, onde em três deles houve um Coffee Break fornecido pelo CAMECC.



Figura 1. Logotipo desenvolvido para o evento.

Seguem abaixo os temas dos encontros, juntamente com os nomes dos alunos expositores.

Tabela 1. Cronograma dos encontros realizados durante o semestre.

| <b>Dia</b> | <b>Aluno Expositor</b>    | <b>Tema</b>   |
|------------|---------------------------|---|
| 05/03      | Marcelo de Oliveira Flora | Problemas no Uso de Coordenadas Polares para o Cálculo de Limites   |
| 15/04      | Vladmir Sicca             | “Como pende a linha flexível, estará o arco rígido.” e outras histórias de física, geometria e arquitetura. |
| 21/05      | Fabício Caluza Machado    | Os Movimentos da Esfera Celeste.  |
| 18/06      | Leandro Silva Cordeiro    | Transformações Conformes: Utilizando Variáveis Complexas na Resolução de EDP's.                             |

Nos próximos capítulos, apresentaremos um resumo de cada um dos assuntos apresentados nos encontros.

## 2. Primeiro Encontro: Problemas no Uso de Coordenadas Polares para o Cálculo de Limites.

Durante uma aula sobre Limites, na turma de Cálculo II, o professor apresentou o seguinte problema:

Calcule, caso exista, o limite abaixo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (\text{I})$$

Como de costume, comecei verificando se o limite existia através de três curvas simples,  $\alpha(t) = (0,t)$ ,  $\beta(t) = (t,t)$  e  $\gamma(t,t^2)$ . Com isso, obtive os seguintes resultados:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(0)^2 t}{0^2 + t^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\beta(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t)^2 t}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t)^2 t^2}{t^2 + (t^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t)^2 t^2}{t^2(1 + t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 + t^2} = 0$$

Como os três limites apresentaram o mesmo valor, comecei a desconfiar que o limite existisse e fosse igual a zero.

Perguntei a um colega sobre como poderia provar este resultado, e ele me disse que conseguiria facilmente aplicando um método diferente, utilizando *coordenadas polares*. Ele procedeu da seguinte forma:

Primeiramente, fez a seguinte substituição:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Agora, substituíu estes valores na função, fazendo  $r$  tender a zero pela direita:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{(r \cos(\theta))^2 (r \sin(\theta))}{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos^2(\theta) \sin(\theta).\end{aligned}$$

Como  $\cos^2(\theta) \sin(\theta)$  é uma função limitada, seguiu-se que:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos^2(\theta) \sin(\theta) = 0.$$

E ficou assim provado que o limite existe, e é igual a zero, pois não dependia do valor de  $\theta$ .

Achei muito interessante o método, pois de uma forma simples e rápida tinha encontrado o resultado. Mas com isso, me veio a dúvida se poderia sempre utilizá-lo. Segundo meu amigo, tudo indicava que sim. Era só ver se existia alguma dependência em relação à  $\theta$ , que estava resolvido.

Porém, pesquisando mais sobre o assunto, acabei descobrindo que existem alguns casos em que o método de coordenadas polares pode nos induzir a conclusões falsas, e que era necessário um maior cuidado no seu uso.

A fim de compartilhar estes resultados e pedir auxílio na construção e demonstração de algum teorema que garantisse a eficácia do uso do método de coordenadas polares, este foi o tema do primeiro encontro do Café Matemático.

## 2.1. O Encontro

O tema da discussão foi introduzido pelo aluno Marcelo Flora, autor deste projeto. Primeiramente, revisou-se um conceito importante no cálculo de limites em duas variáveis, que se enuncia da seguinte forma:

Sejam  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  duas curvas em  $\mathbb{R}^2$ , contínuas em  $t_0$ , com  $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = (x_0, y_0)$  e  $\alpha(t) \neq (x_0, y_0)$  e  $\beta(t) \neq (x_0, y_0)$ , com  $\alpha(t)$  e  $\beta(t) \in Df$ . Segue que, se ocorrer:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t)) = L1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(\beta(t)) = L2$$

Com  $L1 \neq L2$  , então,  $\lim_{x \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  não existirá. Da mesma forma, tal limite não existirá se um dos limites através das curvas não existir.

Feito isto, foram apresentados os seguintes limites, resolvidos com e sem o uso de coordenadas polares. A ideia era mostrar como utilizar o método, evidenciando os casos em que ele não é válido.

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

- **Com auxílio de coordenadas polares:**

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2}{r(\cos \theta - \sin \theta)} = \frac{1}{(\cos \theta - \sin \theta)}$$

Como o valor do limite depende do valor de  $\theta$ , temos que ele não existe.

- **Sem o auxílio de coordenadas polares:**

Sejam as curvas  $\alpha(t) = (t, 0)$  e  $\beta(t) = (t, mt)$ . Daí segue que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + (0)^2}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\beta(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + (mt)^2}{t - mt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(m^2 + 1)}{(1 - m)}$$

Veja que o limite através da curva  $\beta(t)$  não existe para  $m = 1$ . Logo, temos que o  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  não existe.

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

- **Com auxílio de coordenadas polares:**

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$$

Como o valor do limite depende de  $\theta$ , temos que ele não existe.

- **Sem o auxílio de coordenadas polares:**

Sejam as curvas  $\alpha(t) = (t, 0)$  e  $\beta(t) = (t, t)$ . Daí segue que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\beta(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

Como os limites através das curvas apresentaram valores diferentes, temos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$  não existe.

$$3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

- **Com auxílio de coordenadas polares:**

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{(r \cos \theta)^4 + (r \sin \theta)^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^4 \cos^4 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$



Se  $\theta = n\pi$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r(\pm 1)^2(0)}{r^2(\pm 1)^4 + 0^2} = 0$$

Se  $\theta \neq n\pi$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{(0) \cos^2 \theta \sin \theta}{(0)^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = 0$$

Portanto, tudo indica que o valor de  $\lim_{x \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  exista e seja igual a zero, mas veremos que isto não é verdade.

- **Sem o auxílio de coordenadas polares:**

Sejam as curvas  $\alpha(t) = (t, 0)$  e  $\beta(t) = (t, t^2)$ . Daí segue que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot 0}{t^4 + 0^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\beta(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(t^2)}{t^4 + (t^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^4} = 1$$

Como os limites através das curvas apresentaram valores diferentes, temos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  não existe, contradizendo o resultado obtido através do uso de coordenadas polares.

Sendo assim, foi questionado durante a apresentação em quais casos era possível utilizar o método das coordenadas polares sem que houvesse dúvida no resultado.

Baseando-se no limite (I) mostrado em 1.1., foi elaborado o Teorema 1, juntamente com a sua demonstração. Antes de apresentá-lo, foi revisado o Teorema do confronto, que segue abaixo.

**Teorema do confronto:** Se  $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$  e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y)$$

então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L$$

Feito isto, enunciou-se o Teorema 1:

**Teorema 1:** Seja  $f(x, y) = g(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ . Se  $\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = 0$  e  $G(\theta)$  é limitada em  $[0, 2\pi]$ , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

**Demonstração:** Seja  $f(x, y) = g(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ , com  $\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = 0$  e  $G(\theta)$  limitada em  $[0, 2\pi]$ . Daí, temos que:

$$0 \leq |f| = |F(r)||G(\theta)|$$

Como  $G(\theta)$  é limitada, podemos dizer que

$$|f| \leq C|F(r)|$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária. Assim, podemos escrever a desigualdade:

$$0 \leq |f| \leq C|F(r)|$$

Como por hipótese  $\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = 0$ , temos que  $\lim_{r \rightarrow 0^+} C|F(r)| = 0$ . Logo pelo teorema do confronto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f| = 0$ .

Devido a  $-|f| \leq f \leq |f|$ , podemos aplicar novamente o teorema do confronto e concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|f\| = 0$$

Por fim, um dos participantes sugeriu outro exemplo em que o uso de coordenadas polares pode trazer resultados duvidosos, que é o seguinte:

Calcular o  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , sendo

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (y - x^2)(y - 2x^2) \geq 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com isso, encerrou-se o encontro.

### **3. Segundo Encontro: “*Como pende a linha flexível, estará o arco rígido.*” e outras histórias de física, geometria e arquitetura.**

Lembro aqui de uma das primeiras aulas na arquitetura (coincidentemente de Geometria Aplicada), quando o professor perguntou aos alunos por que tinham escolhido o curso. Uma amiga falou que era uma forma de arte, “Eu acho que qualquer coisa feita com gosto pode ser considerada uma forma de arte. Até a matemática pode ser uma forma de arte.” Naturalmente a associação de matemática e arte causou estranheza em todos na sala.

Sem entrar no mérito de discutir os critérios para a definição de arte, creio que sem dúvida ambas as áreas têm em comum, como motivação fundamental, a busca pela beleza. Como meio arquiteto, matemático em formação, acredito que a beleza se comporta de forma semelhante em ambos os casos, e assim, talvez, o trabalho possa agradar pitagóricos e vitruvianos.

Este trabalho buscou identificar e catalogar as ocorrências de curvas e superfícies matemáticas notáveis em projetos da construção civil em geral, por meio da consulta de textos sobre arquitetura, e elaborar fichas das curvas e superfícies identificadas contendo informações geométricas e físicas pertinentes à sua identificação e justificativa no uso na arquitetura, como em catálogos semelhantes existentes online.

Tendo em vista compartilhar estes resultados com a comunidade do Imecc, propôs-se este como tema do segundo encontro do Café Matemático.

### 3.1. O Encontro

O tema da discussão foi introduzido pelo aluno Vladimir Sicca, autor de um trabalho de pesquisa sobre o assunto.

Foram apresentadas seis curvas notórias, bem como suas propriedades e exemplos na arquitetura. São elas: Catenária, Ciclóide, Clotóide, Elipse, Hipérbole e Parábola.

Veremos agora cada uma delas em maiores detalhes.

#### i. Catenária

##### Outros Nomes:

Catenaria (It), Catenary (en), Chaînette (fr), Alisóide, Cosseno hiperbólico.

##### Equações canônicas:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{Equação cartesiana})$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \ln(t) \\ y = \frac{a}{2} \left[ t + \frac{1}{t} \right] \\ t > 0 \end{cases} \quad (\text{Equação paramétrica})$$

### Propriedades matemáticas:

O comprimento do arco ( $2l$ ), em relação à flecha ( $h$ ) e ao vão ( $2d$ ) segue a seguinte regra:

$$\operatorname{senh}\left(\frac{2hd}{l^2 - h^2}\right) = \frac{2hl}{l^2 - h^2}$$

O raio de curvatura é:

$$R_C = a \cdot \operatorname{cosh}^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

### Propriedades físicas:

É a forma adotada por uma corrente flexível submetida apenas ao próprio peso.

### História:

Galileu foi o primeiro a procurar a curva formada por uma corrente suspensa apenas pelas duas extremidades, tratando-a como uma aproximação de um arco de parábola. Em 1669, porém, Jungius provou que o arco definitivamente não era uma parábola.

Em 1690, Jakob Bernoulli propõe novamente na *Acta Eruditorum* o problema da “curva formada por um fio pesado, flexível, inextensível, e de densidade constante em todo o seu comprimento, suspenso nos seus extremos”. Leibniz diz no mesmo ano que conhece a resposta, mas não publicaria, esperando solução de algum geômetra. Em 1691, então, o mesmo Bernoulli, junto do irmão Johann e de Huygens publicam na *Acta* a solução.

O termo “catenária”, do latim *cadena*, corrente, foi usado pela primeira vez por Huygens em carta a Leibniz, em 1690, dada a associação intrínseca da curva à corrente e, em 1697, David Gregory publica um tratado dedicado às catenárias.

A relação arquitetônica entre a forma da corrente pendente e a do arco com uso mínimo de material para vencer determinado vão estrutural foi estabelecida por Robert Hooke em um jogo de palavras no seu “*A description of helioscopes and some other instruments*”, de 1676. A proposição foi uma resposta ao anseio do seu colega matemático e arquiteto inglês Christopher Wren, que comentara em um artigo a falta de regras universais a respeito da estrutura dos arcos e das suas formas.

### **Motivações para o uso na arquitetura:**

- Arcos (ou perfis de abóbadas) de seção mínima para resistirem a uma dada resistência, possivelmente obtidos por maquetes estéreos funiculares, pois resistem apenas a esforços de compressão.
- Cabos enterrados dando a volta em pontes resistem à tração e sustentam a estrutura como abóbadas invertidas.
- Forma natural adotada por pontes pênses e por cabos suspensos em geral.
- Confere elegância estrutural ao elemento construído.

### **Exemplos na arquitetura:**



Figura 1: Elevação da Igreja de St. John, the Divine, Santiago Calatrava, Nova York,



Figura 2: Maquete eletrônica da catenária invertida – Pavilhão de Jardinagem, Carlfried Mutscheler and Partners, Manheim, 1975.

## ii. Catenária

### Nome da curva:

Ciclóide, Roulette

### Equações canônicas:

$$\begin{cases} x = R(t + \cos(t)) \\ y = R(1 + \operatorname{sen}(t)) \end{cases} \text{ (Paramétrica)}$$
$$x = R \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{y-R}{R}\right) + \sqrt{2yR - y^2} \text{ (Cartesiana)}$$

### Propriedades matemáticas:

- Comprimento do arco completo =  $8R$
- Área sob a curva =  $3\pi R^2$  (Três vezes a do círculo gerador)

### Propriedades geométricas:

- É a curva descrita por um ponto sobre um círculo que gira enquanto caminha sobre uma reta sem escorregar, i.e. é o resultado da combinação de uma rotação com uma translação.

### Propriedades físicas:

- É a curva tautócrona: aquela sobre a qual duas esferas ideais lançadas simultaneamente de pontos distintos alcançam simultaneamente o vértice inferior.
- É a curva braquistócrona: aquela sobre a qual, lançada de uma altura dada, uma esfera chega mais rapidamente a um ponto dado.

### História da Ciclóide:

Apesar de aceitarem-se indícios de que os gregos conheciam a família da ciclóide, dados os epiciclos nos modelos de órbitas circulares e uma carta de Iamblichus sobre duplos movimentos (movimentos compostos por duas transformações isométricas independentes), apenas em 1500 Bouelles trata explicitamente do problema de um ponto sobre uma roda que gira, formando uma curva equivocadamente por ele considerada o arco de um círculo de raio igual a  $1/5$  do raio da roda. A ciclóide propriamente dita foi descoberta e nomeada por Galileu em 1599. Seus estudos sobre a quadratura da curva, porém, foram infrutíferos, pois o físico, utilizando como método para a descoberta da área da ciclóide a pesagem comparando modelos físicos de

ciclóides e círculos, considerou que envolvia grandezas incomensuráveis próximas de três, desistindo da tarefa.

Foi no século XVII, então, que a maior parte dos estudos sobre as propriedades físicas e matemáticas da cicloide se desenvolveram. De fato, a curva foi de grande importância ao período em que a geometria analítica de Fermat, Descartes e Roberval; o cálculo diferencial de Newton e Leibnitz e os métodos dos indivisíveis de Cavalieri e Torricelli nasciam e consolidavam-se, aparecendo nos problemas e discussões propostos nas *Acta Eruditorum* de Leipzig e nas correspondências do círculo de Mersenne. Sua ocorrência foi tão presente ao longo do século, e seu estudo pivô de tantas controvérsias que a cicloide foi chamada no fim do século por Johann Bernoulli I, em 1699, na *Acta Eruditorum*, de “curva fatídica do século XVII”, além de ter recebido os apelidos de “pomo da discórdia” e “a Helena dos geômetras”.

Foi Mersenne quem, em 1628, apresentou em uma das reuniões do seu grupo de savants a cicloide aos matemáticos franceses do século XVII. Dentre eles, Gilles de Roberval dedicou-se ao estudo da curva, sendo o primeiro a realizar sua quadratura em 1634, utilizando o recém-criado princípio dos indivisíveis de Cavalieri.

Em 1638, no mesmo contexto do círculo de Mersenne surge a primeira querela, concernente à construção da tangente a um arco de cicloide, que envolveu Descartes, Roberval e Fermat. Cada um dos matemáticos apresentou uma solução diferente para o problema: Descartes uma puramente geométrica, Roberval utilizando a interpretação mecânica do duplo movimento e Fermat aplicando os princípios de cálculo. Na discussão sobre a qualidade das soluções, porém, o apoio de Roberval a Fermat levou Descartes a escrever cartas a Mersenne ridicularizando Roberval.

No mesmo ano, Mersenne envia os resultados obtidos por Fermat, Roberval e Descartes a Galileu. Este, porém, já velho e próximo da morte, em 1642, repassa os trabalhos apresentados aos seus alunos, Viviana e Torricelli, sendo que o último dedicou-se aos estudos de geometria a partir da ampliação do método de Cavalieri, inclusive para o caso da cicloide. Em sua obra de 1644, “*Opera Geometrica*“, Torricelli publica o primeiro trabalho sobre a cicloide, apresentando sua quadratura, tangente pela interpretação mecânica, centro de gravidade e volume do sólido de revolução. A publicação, porém, enfureceu Roberval, que levantou uma acusação de plágio contra o italiano, iniciando uma disputa que só terminaria com a morte de Torricelli em 1647, provavelmente de tifo, antes que ele pudesse publicar sua correspondência com Mersenne como prova de que chegara independentemente aos seus resultados.



Os desenvolvimentos subsequentes dos estudos matemáticos sobre a cicloide deveram-se, principalmente aos trabalhos de Blaise Pascal sobre a curva. Em certo momento da sua vida de dedicação exclusiva à teologia, Pascal teve uma dor de dente e uma visão da cicloide, assim, crendo que o estudo da cicloide resolveria seu problema, Pascal voltou aos estudos de geometria e descobriu várias propriedades da cicloide que publicou, com Roberval, como problemas abertos à comunidade científica. A série de problemas mobilizou vários matemáticos de destaque e teve como resultado a publicação da retificação da curva por Christopher Wren em 1658. Essa série de problemas mobilizou matemáticos de vulto, como Wren, Huyghens, Wallis e Fermat, e assistiu o aprofundamento do conceito de indivisível e os primeiros ensaios para o conceito de integral.

A segunda metade do século XVII viu a inserção da cicloide no campo das curvas de interesse físico, particularmente após a descoberta por Huyghens da propriedade do tautocronismo da cicloide em seu relógio sobre relógios de pêndulo “*Horologium Oscilatorium*”, de 1673 e da aplicação da teoria das evolutas, criada por ele em 1659, para determinar o trilho superior necessário para o pêndulo descrever a trajetória cicloidal (i.e. a evoluta da cicloide) que ele descobriu ser a própria cicloide. No fim do século, em 1696, Johann Bernouilli I apresentou o problema da braquistócrona na *Acta Eruditorum*, para o qual apresentou a cicloide como solução, aplicando novos conceitos de máximos e mínimos, solução na qual foi acompanhado apenas por Leibnitz, seu irmão Jakob Bernouilli I, Newton e L’Hospital.

Vê-se, então, que a “curva fatídica do século XVII” interessou os maiores matemáticos da época e foi, assim, protagonista nas grandes mudanças na abordagem dos problemas geométricos desenvolvidas por Descartes, Fermat, Newton, Leibnitz e outros fundadores da matemática moderna.

### **Motivações para o uso na arquitetura:**

- Cúpula com boa reflexão da luz natural quando associada a uma plataforma de luz da forma adequada.

### Exemplos na arquitetura:



Figura 3. Cúpula da Kimbell Art Gallery (Louis I. Kahn)



Figura 4. Estudo de cicloide para a cúpula da Galeria de Arte Kimbell

### iii. Clotóide

#### Nome da curva:

Clotóide ou Espiral de Cornu ou Espiral de Euler.

#### Equações canônicas:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du \\ y = a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du \end{cases} \quad (\text{Eq. paramétrica utilizando as integrais de Fresnel})$$

#### Propriedades matemáticas:

- Ângulo da tangente (derivada) em um ponto, definido de acordo com o parâmetro  $t$ , com a horizontal:

$$\theta = \frac{\pi}{2}t^2$$

### **Propriedades geométricas:**

- É a curva com a curvatura igual ao comprimento.

### **História:**

Descoberta por Euler em 1743, que demonstrou sua convergência após 38 anos de estudo, foi usada por Cornu para representar a difração ótica.

A sua aplicação à construção de ferrovias surgiu no trabalho “The Railway Transition Spiral” (1901), de Arthur Newell Tabot, no qual o autor define curva de transição e demonstra que a curva para a transição entre trechos circulares e tangentes em uma ferrovia é aquela na qual a curvatura varia continuamente de forma proporcional ao comprimento do arco, minimizando as sensações desagradáveis causadas pela força centrífuga no trem durante a curva. Tabot mostra que a equação dessa curva é dada pelas integrais de Fresnel, ou seja, a curva é a espiral de Cornu.

### **Motivações para o uso na arquitetura e construção civil:**

- Em uma ferrovia ou rodovia, a clotóide é a “curva de transição” entre uma seção retilínea e uma circular, duas retilíneas ou duas circulares da via, podendo ser aproximada por uma parábola cúbica ou uma lemniscata nas imediações da origem e por uma espiral de Lituus quando distante da origem.

- Seu uso em rodovias tem interesse paisagístico, por valorizar a relação com a natureza, e de segurança, pois as curvas na pista deixam o motorista mais alerta.

### **Exemplos na arquitetura:**



Figura 5 – Foto da Reichsautobahn



Figura 6 – Vista aérea da Reichsautobahn (em cinza-claro) no trecho entre Postdam e Dessau-RoBlau.

#### iv. Elipse

**Nome da curva:**

Elipse.

**Equações canônicas:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Equação cartesiana})$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \text{sen}(t) \end{cases} \quad (\text{Equação parametrizada})$$

$$\rho = \frac{a \cdot b}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta}} \quad (\text{Equação em coordenadas polares})$$

**Propriedades matemáticas:**

$$\text{Área} = \pi \cdot a \cdot b$$

**Excentricidade:**

$$e = \frac{c}{a}$$

**Distância entre focos:**

$$2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

### **Propriedades geométricas:**

- A soma das distâncias de cada ponto a cada um dos focos é constante para todos os pontos da elipse.

### **Propriedades físicas:**

- Raios (sonoros ou luminosos) que passem por um foco e sejam refletidos nas paredes passam pelo outro foco.

### **Motivações para o uso na arquitetura:**

- Resistência adequada ao vento, com aparência aerodinâmica.
- Maximização da entrada de luz.

### **Exemplos na arquitetura:**



Figura 7: Foto Aérea da Praça Elipse de Washington D. C.



Figura 8: Imagem aérea do Estádio Olímpico de Atlanta.



Figura 9: Foto aérea dos Jardins Botânicos de Gales.

## v. Hipérbole

**Nome da curva:**

Hipérbole

**Equações canônicas:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Equação Cartesiana})$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \sinh(t) \\ y = b \cdot \cosh(t) \end{cases} \quad (\text{Equação Paramétrica})$$

**Propriedades matemáticas:**

- **Distância entre focos:**

$$(2c) = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

- **Excentricidade:**

$$e = \frac{c}{a}$$

### **Propriedades geométricas:**

- A diferença das distâncias de cada ponto a cada um dos focos é constante para todos os pontos da hipérbole.

### **Propriedades físicas:**

- Os raios que saem de um foco e são refratados em um folha da hipérbole passam pelo outro foco.

- É a forma de uma órbita de um corpo que ultrapassou a velocidade de escape.

### **Motivações para o uso na arquitetura:**

- Elegância formal

### **Exemplos na arquitetura:**

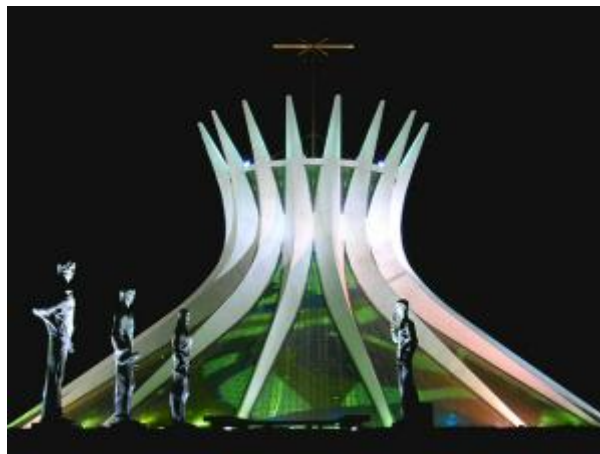


Figura 10: Foto da Catedral de Brasília à noite.

## **vi. Parábola**

### **Nome da curva:**

Parábola

### **Equações canônicas:**

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y^2 = 2px \quad (\text{Coordenadas cartesianas})$$

$$\rho = \frac{2p \cdot \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (\text{Coordenadas polares})$$

**Propriedades geométricas:**

- A distância de cada ponto da parábola até a uma reta dada, chamada diretriz, é igual à distância do mesmo ponto a um ponto fixo, chamado foco da parábola.

**Propriedades físicas:**

- É a forma da trajetória de um projétil lançado caindo sob ação da gravidade.

**Motivações para o uso na arquitetura e na construção civil:**

- É a curva de transição adotada por engenheiros entre uma descida e uma subida coplanares em uma estrada, pois a variação da inclinação é constante.

- Compensação de momento fletor para maior resistência estrutural com elegância visual.

- Propriedades de reflexão da luz.

**Exemplos na arquitetura:**

Figura 11: Cobertura da nave da Sagrada Família mostrando a luz que entra pelas aberturas elípticas dos hiperbolóides.





Figura 12: Os capitéis das colunas da nave são elipsóides esculpidos.



Figura 13: Fachada da Paixão com as torres sineiras. Os perfis parabólicos das torres permitiram uma altura maior sem contrafortes.

#### 4. O Terceiro Encontro: Os Movimentos da Esfera Celeste

Podemos perceber, nessa representação, que há um círculo máximo, em cima do qual o homem parece estar, o círculo do horizonte. Repare que, se consideramos a Terra esférica, ela tem que ser desprezivelmente pequena com relação à Esfera, para que o Hug-Bug sempre veja metade desta (do contrário, ele estaria muito mais perto de uma parte da Esfera Celeste, e o seu plano do horizonte não cortaria a Esfera em duas metades).

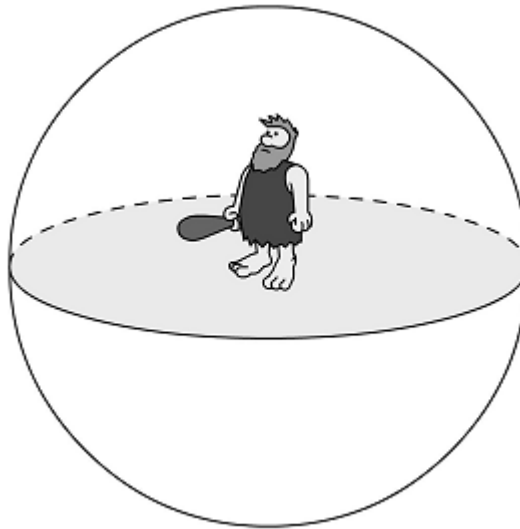


Figura 14: Hug-Bug, nosso homem antigo, continua parado na Esfera Celeste.

#### Primeiras Coordenadas

Chamamos de altura de um astro no céu à sua distância com relação ao horizonte. Mas como estamos falando de pontos que parecem estar todos à mesma distância, grudados numa esfera, distâncias correspondem a ângulos. Assim, a altura do astro é o ângulo entre o horizonte e astro, com vértice no observador (veja figura logo abaixo).

Contudo, se o Hug-Bug, mais desenvolvido, se perguntasse como determinar a posição exata de um objeto no céu, ele perceberia que só a altura do objeto não seria suficiente. Para uma mesma altura, existem vários pontos possíveis – pontos que formam um círculo no céu. A figura seguinte mostra o que foi dito agora.

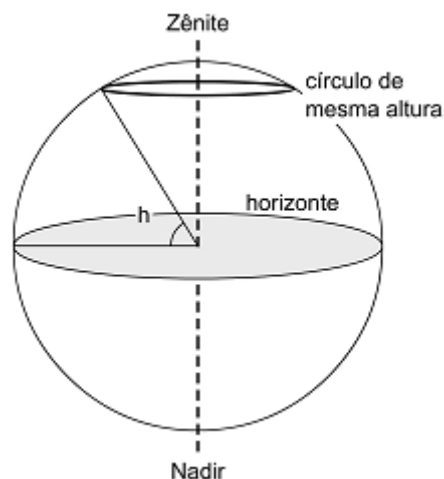


Figura 15: Altura, no Sistema Horizontal.

Falta mais uma coordenada para fixar apenas um ponto. Esta coordenada precisa diferenciar um ponto dentre os outros de uma mesma altura, assim ela deve ser contada paralela ao horizonte. Vamos chamá-la de azimute e ela será contada a partir de um ponto fixo no horizonte.

Mas qual será esse ponto?

Para fixá-lo, podemos pegar o marco na esfera celeste chamado de meridiano local<sup>2</sup>. O meridiano local é o semi-círculo que liga o pólo celeste sul ao pólo celeste norte, passando pelo zênite do lugar. Em outras palavras: é o círculo vertical norte-sul.

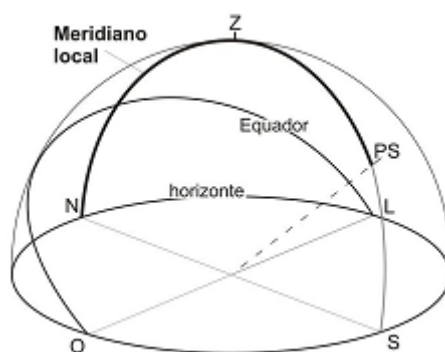


Figura 16: O Meridiano Local.

Ainda exploraremos mais a importância do Meridiano Local; por enquanto, basta destacar que ele é importante porque ele é a linha em que as estrelas alcançam suas maiores alturas, conforme se movimentam.

O Meridiano Local interceptará o horizonte em apenas um ponto. Este ponto pode ser tomado como o nosso ponto de partida para a contagem do azimute. Mas para que lado? Definimos como crescente no sentido horário (como se estivéssemos observando de cima, a partir do zênite), assim, no hemisfério Sul, o mais comum é a contagem do azimute começar no ponto cardinal Norte (no sentido N-E-S-W). Já no hemisfério Norte, o ponto de início normalmente é o ponto cardinal Sul, e aqui o sentido é S-W-N-E.

Lembre-se: a definição do ponto de início e do sentido de contagem do azimute é bastante arbitrária; existem pessoas em ambos os hemisférios que contam de maneira diferente.

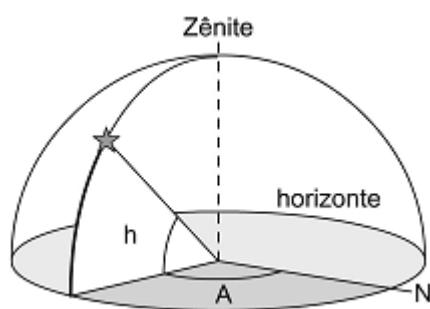


Figura 17: Sistema Horizontal. Repare na estrelinha, que tem altura  $h$  e azimute  $A$ . O N indica a direção norte, de onde começa a contagem do azimute. Repare também que o ângulo de altura é contado de 0 a 90, enquanto o azimute é contado de 0 a 360.

### Estrutura Básica

Ao definir acima o Sistema Horizontal de Coordenadas (isto é, baseado no Horizonte), acabamos criando uma estrutura geral para sistemas de coordenadas celestes, que podemos usar para construir outros sistemas. Eles sempre têm um círculo máximo (no caso do sistema horizontal, o horizonte), dois pólos (no caso, o zênite e o nadir), um ponto do círculo máximo, para referência da medida da segunda coordenada (no caso, o ponto cardinal norte/sul, para a medida do azimute) e também o sentido em

que esta segunda coordenada será contada (horário ou anti-horário). Isso pode ser visto na figura 6.5:

## Equador e Polos

O Sistema Horizontal, apesar de ser muito útil na localização de objetos no céu de um observador, apresenta uma deficiência: é local. Ou seja, as coordenadas de um determinado objeto, para um observador, serão diferentes para outro observador (o céu, em um mesmo instante, é diferente para uma pessoa no Brasil e na China, por exemplo), ou mesmo para o mesmo observador em outro instante do dia (o céu também é diferente aqui às dez da noite e às duas da manhã, visto que ele gira). Precisamos tentar criar, então, um outro sistema que não sofra deste problema, ou seja, que mantenha as coordenadas do objeto para qualquer observador, em qualquer instante. Assim, pelo que vimos acima, o primeiro passo para um sistema ser universal é que seu círculo máximo (i) seja o mesmo para qualquer observador, e que (ii) ele não se mova com o tempo. Para o segundo ponto, basta lembrarmos do movimento do céu, previamente discutido: girando como uma esfera sólida, com eixo definido pelos Pólos Celestes.

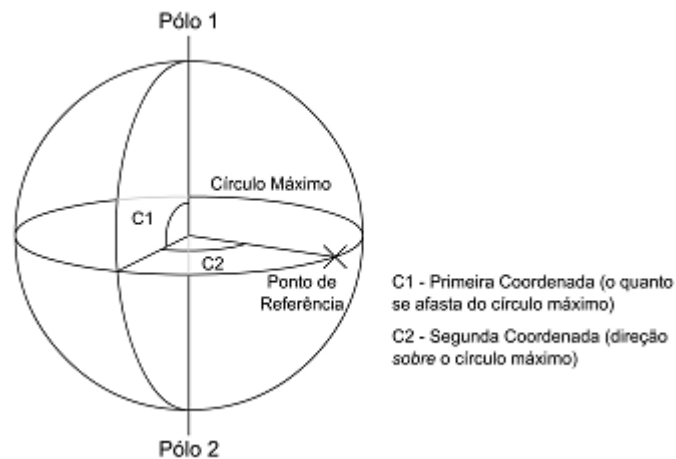


Figura 18: Esquema geral de um Sistema de Coordenadas Esféricas.

Um eixo sempre define um círculo máximo perpendicular a ele: o Equador Celeste. O equador é um círculo máximo que não se move com a rotação da Terra - na verdade, os astros se movem todos paralelos a ele. Ele é definido a partir de uma característica geral do sistema, e não de nenhum observador específico sobre a Terra.

Assim, da mesma forma que utilizamos o Horizonte para definir o Sistema Horizontal, definiremos agora um Sistema Equatorial baseado no Equador.

Nesse novo sistema, a distância (em ângulos, sempre) de um astro ao Equador será chamada declinação, indicada por  $d$  (um delta minúsculo). Naturalmente, ela variará entre  $-90$  e  $+90$ . Esta coordenada não depende de onde estamos na Terra, afinal o Equador Celeste é o mesmo para qualquer observador.

Ademais, tal como no Sistema Horizontal, precisamos de mais um ângulo, medido sobre o equador, para determinar onde o astro está. Contaremos o ângulo no Equador Celeste, a partir do ponto em que ele intercepta o meridiano local; e, como o azimute, contaremos no sentido horário (vendo do hemisfério norte). Esta coordenada recebe o nome de ângulo horário e é representada por um  $H$ . Contado em horas, esse ângulo variará entre 0 e 24h, ou entre  $+12$  e  $-12h$ .

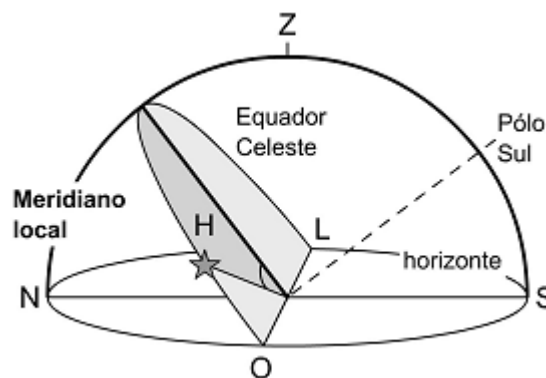


Figura 19. Sistema Equatorial Local. Z é o Zênite, N, o ponto cardinal Norte, e S o ponto cardinal Sul. O semicírculo que cobre a figura, com linha mais escura, é o Meridiano Local.

### A Terra nas Coordenadas Esféricas

Mas o sistema ainda não é completamente universal, pois o Meridiano Local, como o próprio nome diz, é local, depende do observador. Diferentes longitudes na Terra definem diferentes meridianos locais. Temos um Sistema Equatorial Local, mas estamos em busca do Sistema Equatorial Universal. Para isso, precisamos escolher um ponto de origem que não dependa do local de observação, e que tenha o mesmo

movimento dos outros astros, ou seja, que seja fixo em relação às estrelas. Basta escolher um ponto arbitrário então.

Mas nada é suficientemente arbitrário para seres humanos. Vocês já devem ter ouvido falar de um outro sistema de coordenadas, dessa vez sobre a superfície da Terra. Esse sistema é quase totalmente análogo ao Sistema Equatorial Local, da Esfera Celeste. Ele toma o Equador Terrestre como círculo máximo, e mede os ângulos contando os círculos paralelos ao Equador Terrestre e os círculos meridianos que ligam os Pólos Terrestres e cortam o Equador. O ângulo contado sobre o equador (ou sobre um paralelo) é a longitude e o ângulo contado sobre os meridianos, medindo a distancia ao Equador, é a latitude.

Para a contagem da longitude, cada país usava um meridiano diferente de referência (o Brasil provavelmente usaria o meridiano de Brasília, se isso acontecesse hoje). Mas durante o século XIX houve uma grande movimentação na Europa (e por conseqüência no resto do mundo, que na época era quase todo dominado econômica ou militarmente pelos europeus) para se criar sistemas universais de medida. Assim, um dos meridianos locais devia ser escolhido para ser aceito como padrão. Mesmo se tratando de uma escolha totalmente arbitrária, houve muita discussão sobre qual deveria ser esse meridiano. Pensava-se que, de alguma forma, o país cujo meridiano fosse escolhido teria, com isso, sua predominância cultural e política reforçada. No fim, a briga ficou entre o padrão francês (o meridiano que cruzava o Observatório de Paris, em Paris) e o inglês (meridiano que cortava o Observatório de Greenwich, em Londres). Os ingleses acabaram ganhando, e é por isso que ouvimos esse nome verde desde cedo no colégio, como referencia universal de coordenadas terrestres.

Então podemos fazer isso: contar nossas coordenadas a partir do “Meridiano de Greenwich Celeste”, que é a projeção do Meridiano de Greenwich no céu. Poderíamos, mas isso seria bastante tosco. Em vez disso, o caminho do Sol no céu pode nos dar uma dica melhor.

## O Sol nas Coordenadas Esféricas

Agora parece um bom momento para contar uma história que todo mundo sabe. Nossa concepção de universo não é mais a concepção clássica das Esferas. A esfera celeste foi explodida, e as estrelas foram espalhadas nas mais diferentes distâncias. Numa troca de referenciais que mantém todas as aparências, a rotação da Esfera Celeste, de leste para oeste, foi substituída pela rotação da Esfera Terrestre no sentido oposto, de oeste para leste. O Sol, que se movimentava em torno da Terra, também foi parado e cedeu à Terra seu movimento. Assim, nosso planeta acumulou dois movimentos: uma rotação em torno do seu próprio eixo, substituindo o movimento diário da Esfera Celeste, e uma revolução em torno do Sol, substituindo o movimento anual deste.

O sistema da Esfera é muito mais útil para visualizar tudo o que estamos discutindo, razão pela qual só tínhamos falado dele até agora. Mas o outro sistema, que acabamos de apresentar, é mais tido como “verdadeiro” por quase todas as pessoas; não poderíamos então prorrogar mais a apresentação dele. Daqui para frente, então, tentaremos usar os dois sistemas simultaneamente, deixando ao leitor a possibilidade de escolher qual parece mais confortável.

Assim, o Sol caminha em relação às estrelas ao fundo, descrevendo um círculo máximo chamado Eclíptica, que cruza o Equador Celeste com uma inclinação de  $23^{\circ}27'$ . Essa inclinação entre os dois círculos, no modelo “novo”, é interpretada como uma inclinação entre o movimento de rotação e o de revolução da Terra. Nesse modelo, o plano da Eclíptica corresponde ao plano da órbita da Terra em torno do Sol; portanto, os  $23^{\circ}27'$  (sendo mais precisos) são a inclinação entre o plano do Equador e o plano da órbita, ou entre o eixo de rotação e o eixo perpendicular à eclíptica.



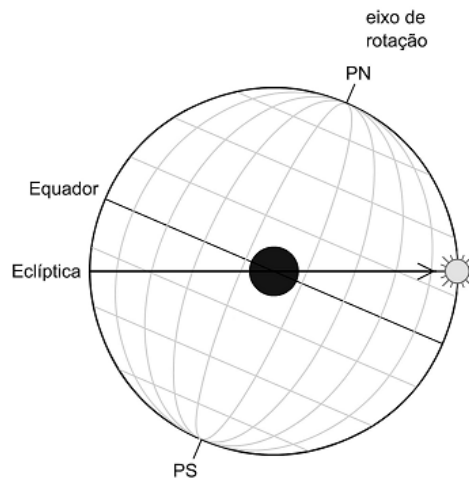


Figura 20. Equador e Eclíptica, visto de um referencial com a Terra parada.

Como dois círculos máximos, Eclíptica e Equador se cruzam em dois pontos, opostos em cada círculo. Um desses pontos é chamado Ponto Vernal, e o outro não. O Ponto Vernal é o ponto que o Sol ocupa no primeiro equinócio do ano, o de primavera do hemisfério Norte (vernes = primavera em latim); ou seja, é quando o Sol está passando do Hemisfério Sul para o Hemisfério Norte, definindo o início do nosso outono. É fácil perceber que os pontos em que os dois círculos se cruzam são os equinócios; afinal, são esses dias em que o Sol nasce exatamente a Leste, percorre o céu junto com o Equador Celeste e se põe exatamente a Oeste.

E quanto aos solstícios? São os pontos em que o Sol está a 90 de cada equinócio, na sua distância máxima do Equador. Com distância máxima, queremos dizer que os solstícios são os dias em que o Sol atinge seus maiores valores de declinação:  $23^{\circ}27'$ .

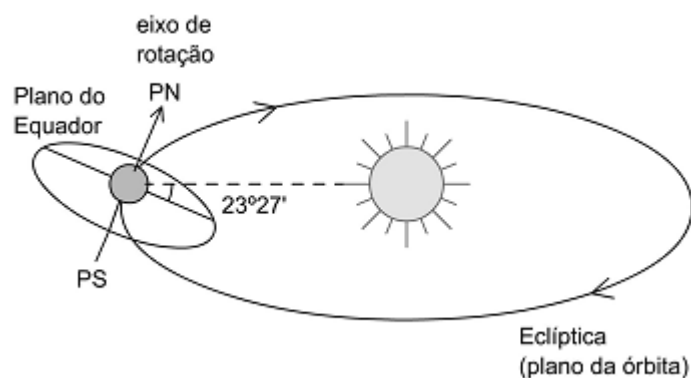


Figura 21. Equador e Eclíptica visto de um referencial com o Sol parado.

Tendo dito isso, podemos nos perguntar quais são as latitudes na Terra nas quais o Sol passará exatamente pelo zênite, nos solstícios. Nesses dias o Sol nasce e se põe com declinação de  $23^{\circ} 27'$ .

Mas sabemos que a latitude de um lugar é igual à altura do pólo celeste nesse lugar, ou a distância zenital do ponto mais alto do Equador Celeste (onde o Equador cruza o Meridiano Local). Vamos lá, é importante visualizar tudo isso. Num lugar cuja latitude seja  $50^{\circ}$ , o Equador cruzará o Meridiano Local com uma altura de  $90 - 50 = 40^{\circ}$ ;

Queremos os lugares em que, no solstício de verão, o Sol passe pelo zênite, isto é, tenha altura  $90^{\circ}$ . Para isto, basta que, no equinócio, o Sol passe a  $23^{\circ} 27'$  de distância zenital. Ou seja, basta que a altura do ponto mais alto do Equador Celeste seja  $90 - 23^{\circ} 27' = 66^{\circ} 33'$ . Ou seja, basta que a latitude seja também  $23^{\circ} 27'$ ! Essa latitude e esse fenômeno é o que definem os Círculos dos Trópicos.

São dois, um em cada hemisfério: Trópico de Câncer no Hemisfério Norte e Trópico de Capricórnio no Hemisfério Sul. O segundo passa um pouco ao norte da cidade de São Paulo.

Os nomes dos trópicos foram dados a partir das constelações em que o Sol estava durante os solstícios, na época em que os trópicos foram batizados, a Grécia Clássica. Hoje as constelações ocupadas pelo Sol nos solstícios já são outras. Assim, o Ponto Vernal (ou Ponto de Áries) não está mais em Áries, mas na divisa entre Peixes e Aquário.

Por outro lado, existem também duas latitudes em que, no solstício de inverno para aquele hemisfério, o Sol estará no horizonte ao meio-dia (se você estiver nesta latitude norte verá o Sol no Ponto Cardeal Sul; se estiver nesta latitude sul, verá o Sol no Ponto Cardeal Norte); no resto do dia deste solstício, o Sol se encontrará abaixo do horizonte. Simetricamente, no solstício de verão para estes mesmos lugares, o Sol passará as 24 horas do dia acima do horizonte, atingindo-o apenas à meia-noite! Para isso acontecer, basta que a distância máxima entre Equador e Horizonte (isto é, a altura) seja  $23^{\circ} 27'$ ; com isso, o Sol não nasce em um solstício e não se põe no outro. Essas latitudes são, portanto,  $90 - 23^{\circ} 27' = 66^{\circ} 33'$ . Elas definem os Círculos Polares, que

também são dois: Círculo Polar Ártico no Hemisfério Norte e Círculo Polar Antártico no Hemisfério Sul.

### Sistema Universal

Vamos voltar ao tema inicial: que ponto de origem devemos escolher para que nossas coordenadas equatoriais se tornem universais? A resposta que podemos extrair do Sol é: basta escolher um ponto da trajetória do Sol, que é o mesmo para todos os observadores. Vamos escolher, então, o ponto vernal. Nosso ângulo será contado, desta vez, de oeste para leste, de forma que o ângulo do Sol aumente ao longo do ano. O ângulo será batizado de ascensão reta, indicado por  $a$ , um alfa minúsculo; ou por AR. Por ser contado no mesmo plano do ângulo horário, a ascensão reta também é contada em horas, variando entre 0 e 24h. Em algumas ocasiões, entretanto, é possível ver a ascensão reta contada entre 0 e 360.

Com ascensão reta e declinação, definimos finalmente nosso Sistema Equatorial Universal. Segue abaixo uma figura do sistema:

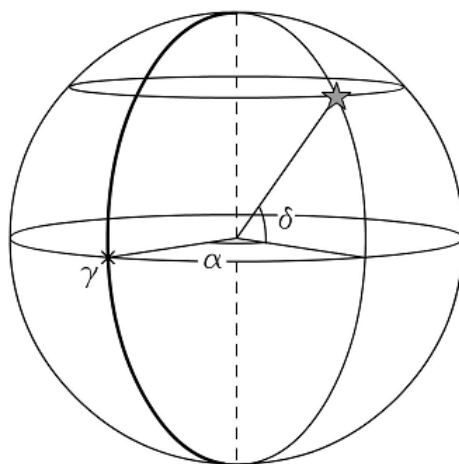


Figura 22. Sistema Equatorial Universal

O Sistema Equatorial Universal é muito útil para a localização de algum objeto para um observador aqui da Terra. É por isso que ele é utilizado em quase todos os catálogos de estrelas, nebulosas, planetas, satélites artificiais ou qualquer outra coisa - afinal, as coordenadas universais ( $a$ ,  $d$ ) de um objeto valem para qualquer observador da Terra, que esteja observando em qualquer horário.

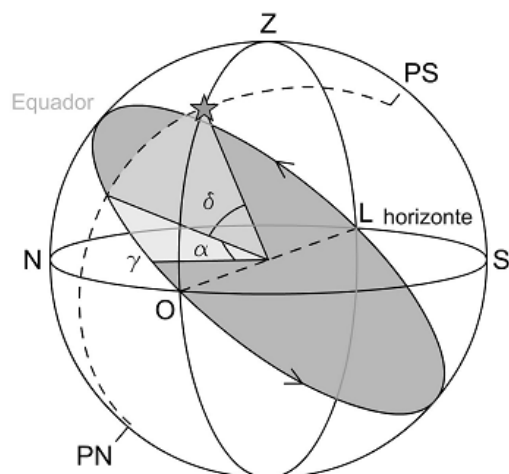


Figura 23. Sistema Equatorial visto por um observador. Para sabermos a posição no céu em que nós veremos de fato uma estrela, basta converter sua ascensão reta e declinação em altura e azimute para nossa posição.

O Sistema Equatorial é cômodo para nós e as estrelas; mas existem outros sistemas universais que podem ser mais como dos para problemas específicos. Para acompanhar, por exemplo, os movimentos de planetas e asteroides do Sistema Solar, seria mais interessante medir os ângulos a partir do círculo máximo da Eclíptica. Ele se chamaria, logicamente, Sistema de Coordenadas Eclíptico, e seria útil também para a navegação de sondas pelo Sistema Solar. Por outro lado, se quisermos estudar as posições de objetos na nossa Galáxia, ou navegar por ela (quando isso for possível), seria melhor usar, como círculo máximo, o plano da Via Láctea - um Sistema de Coordenadas Galáctico.

Pode parecer estranho, mas o primeiro sistema de coordenadas adotado no Ocidente era um sistema de coordenadas eclípticas (bem mais simples que o atual, é claro), dos gregos. Já falamos desse sistema na Unidade 1: o sistema das Casas Zodiacais. A eclíptica foi dividida em 12 casas de mesmo tamanho (30 de longitude eclíptica), cada uma associada à constelação que estava mais ou menos na região daquela casa. Assim havia a casa de Áries, a de Leão, de Touro, etc.

Este sistema grego era (ainda é) usado para descrever basicamente o movimento do Sol, da Lua e dos cinco planetas, e era muito eficiente nisso (como todos estes corpos caminham sobre o zodíaco, o sistema não precisava da segunda coordenada, algo que

seria equivalente de latitude eclíptica). Além disso, como é também o caminho do Sol ao longo do ano, o sistema podia ser usado diretamente para contagem do tempo, com função de calendário.

Na mesma época dos gregos, contudo, os chineses já tinham um sistema de coordenadas equatorial. Eles determinavam a posição sobre o equador, também de acordo com casas – que depois foram substituídas, dividindo-se um círculo em 365 graus - algo muito prático para astronomia; em particular, muito mais prático que nossa divisão em 360 graus - e determinavam também a distância zenital. É que, para os chineses, o céu era uma imagem do governo na Terra: a Estrela Polar, em torno da qual todas as outras giram, era a imagem do imperador, e os outros astros iam se sucedendo em importância, conforme sua distância ao pólo. O sistema horizontal só foi introduzido na Europa no final da Idade Média, ajudado em boa parte pela invenção do telescópio (os telescópios precisam se mover paralelos ao Equador para acompanhar o movimento das estrelas).

## 5. Quarto Encontro: Transformações Conformes: Utilizando Variáveis Complexas na Resolução de EDP's

### Transformações Conformes

Para analisar a forma como transformações definidas num plano deformam o espaço, é útil observar o seu efeito em curvas contidas nos domínios das transformações.

As noções de curva e de caminho em subconjuntos de  $\mathbb{C}$  são análogas às correspondentes noções em subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ . Em particular, um **caminho** em  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é uma função contínua definida num intervalo limitado e fechado de números reais com valores em  $\Omega$ . Chama-se **curva**  $\gamma^*$  em  $\Omega$  ao contradomínio de um caminho  $\gamma$  em  $\Omega$ . Um **caminho regular** é um caminho  $C^1$  cuja derivada nunca se anula. Para um caminho regular  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , a derivada  $\gamma'(t) \neq 0$  é um vector tangente à curva  $\gamma^*$  no ponto  $\gamma(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ .

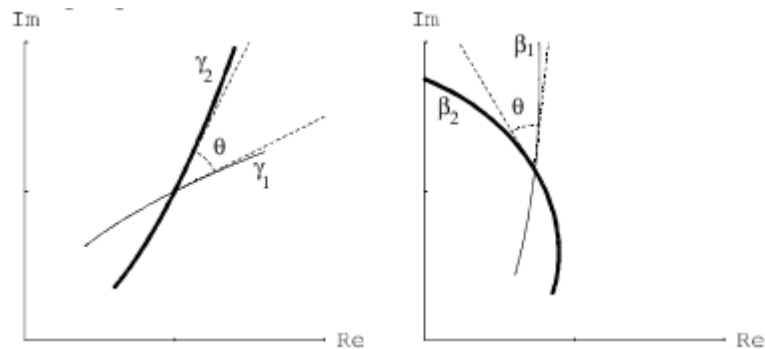


Figura 24. Transformação de Curvas por uma Função Holomorfa.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto,  $f \in H(\Omega)$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  um caminho regular. Então  $\beta = f \circ \gamma$  também é um caminho. A curva correspondente é a imagem pela função  $f$  da curva representada pelo caminho  $\gamma$  (Figura 3.2). Da regra de derivação da função composta obtém-se  $\beta'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t)$ , para  $t \in [a, b]$ . Portanto, sendo  $f \in C^1$ ,  $\beta$  é um caminho regular se e só se  $f'(z) \neq 0$ , para  $z \in \gamma^*$ . Além disso,

$$\arg \beta'(t) = \arg f'(\gamma(t)) + \arg \gamma'(t), \quad \text{para } t \in [a, b] \text{ com } f'(\gamma(t)) \neq 0.$$

Assim, se  $f'(z_0) \neq 0$  o ângulo entre as tangentes dirigidas  $\gamma'(t_0)$  e  $\beta'(t_0)$ , respectivamente, ao caminho  $\gamma$  em  $z_0 = \gamma(t_0)$  e ao caminho  $\beta$  em  $w_0 = f(z_0)$ , é igual a  $\arg f'(z_0)$ . Portanto, caminhos regulares que formam um ângulo  $\theta$  em  $z_0$  são transformados pela função  $f$  em caminhos que formam o mesmo ângulo  $\theta$  em  $w_0$  (Figura 24). Também se tem

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|,$$

pelo que pequenos segmentos de recta com origem em  $z_0$  são, no limite quando  $z \rightarrow z_0$ , contraídos ou expandidos na razão  $|f'(z_0)|$ . Assim, a mudança de escala em  $z_0$  resultante da transformação  $f$  é independente da direcção (Figura 24). Quando uma função satisfaz estas duas propriedades diz-se que é uma **transformação conforme**.

### Algumas Transformações Importantes

Consideremos  $\alpha$  e  $\beta$  constantes complexas, enquanto  $a$  e  $\theta_0$  constantes reais.

- ♦ **Translação:**  $W = z + \beta$  (Figuras no plano  $z$  são deslocadas ou transladadas em direcção ao vetor  $\beta$ )
- ♦ **Rotação:**  $W = e^{i\theta_0} z$  (Figuras no plano  $z$  são giradas de um ângulo  $\theta_0$ )

- ♦ **Dilatação:**  $W = az$  (Figuras no plano  $z$  são dilatadas (ou contraídas) na direção de  $z$ .)
- ♦ **Inversão:**  $W = 1/z$ .

## A Equação do Calor

### Contexto Histórico

Na metade do século XVIII, motivados pelo problema de vibração de cordas, matemáticos debateram sobre a expansão de funções arbitrárias em séries trigonométricas. D'Alembert, Euler, Bernoulli e Lagrange desenvolveram a matemática da época e aproximaram-se do que hoje é conhecido como série de Fourier.

Utilizando a teoria de seus antecessores, em 1807 Fourier submeteu seu primeiro trabalho a Academia Francesa, onde formalizou e solucionou o problema de condução do calor. Seu trabalho não foi aceito e um concurso foi criado para premiar quem solucionasse o problema. Em 1811, Fourier submeteu novamente seu trabalho, mas a banca julgadora mais uma vez resolveu não publicá-lo, alegando falta de rigor. A publicação dos seus trabalhos só ocorreu mais tarde, quando Fourier tornou-se secretário da Academia.

Assim, a teoria de Fourier foi reconhecida, porém não finalizada, pois novos problemas surgiram do seu trabalho. Equações Diferenciais, Análise, Integral e Teoria dos Conjuntos foram algumas das áreas que desenvolveram-se ou aprimoraram-se depois da teoria de Fourier.

### A Equação da Condução do Calor

Considere uma barra retilínea, de seção uniforme e de material homogêneo. Cada seção reta  $u(x,t)$  fornece a temperatura da barra na posição  $x$ .  $0 < x < L$  e  $t > 0$ . A barra está isolada nas laterais e a temperatura nas extremidades é mantida a  $0^\circ\text{C}$ . Condições de contorno:  $u(0,t) = 0$  e  $u(L,t) = 0$  com  $t > 0$ . Assume-se que em  $t = 0$ , a temperatura em cada seção reta vertical da barra é conhecida. Condição Inicial:  $u(x,0) = f(x)$  com  $0 \leq x \leq L$ .

## Método de Solução: Separação de variáveis

Considere que  $u(x,t)=X(x).T(t)$ . Substituindo as derivadas

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ T' + \sigma \alpha^2 T = 0 \end{cases}$$

Sistema homogêneo de duas EDP ordinárias, cujas soluções são:

$$T(t) = k_1 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \quad X(x) = k_2 \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

A hipótese inicial, no método de separação de variáveis, era encontrar  $u(x,t) = X(x).T(t)$ . Segue-se então que:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}}$$

Onde:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx$$

## Utilizando Transformações na Resolução

- I. Achar uma transformação conforme que leve o domínio dado em um *domínio mais simples*;
- II. Resolver o problema transformado;
- III. Usando a *transformação inversa* da utilizada, transforme a solução para as coordenadas originais, obtendo a solução do problema dado.





passsei a conhecer agora, devido aos encontros. Estou muito entusiasmado para continuar os trabalhos no próximo semestre.