Projeto Supervisionado
Métodos de Otimização para o problema de portfólio

Orientando: Lucas Augusto Zoia

Orientador : Roberto Andreani

IMECC - UNICAMP

Julho 2013

Sumário

1 Introdução

O estudo de otimização de portfólio é usado em diversos investimentos, sejam estes ações de empresas, mercadorias, entre outros. Entretanto, estes são baseados em minimizar os riscos de perdas e/ou maximizar os ganhos, porém é impossível conseguir ambos, assim sendo, temos que atribuir pesos para o risco e para os ganhos. Em geral, calculamos os resultados esperados os quais podem ser muito confiáveis ou nada confiável. A maneira de calcular o resultado esperado em geral são pelos acontecimentos passados e/ou por especulações futuras e com estes dados podemos tentar medir a incerteza do resultado esperado. Para isso precisamos montar um modelo matemático o qual deve associar o ganho médio e a incerteza sujeito a diversas restrições.

2 Portfólio

No ramo da Economia e Finanças, o portfólio abrange um conjunto de investimentos ou aplicações financeiras como ações de empresas, títulos de renda, etc mantidas por determinada empresa ou indivíduo, fazendo parte de sua estratégia com o objetivo de diminuir riscos ou aumentar lucros.

3 Ativos

Chamaremos de *ativo* a qualquer coisa que possamos negociar, neste caso serão em geral ações de empresas, títulos de empresa. Todo ativo tem um preço em dinheiro o qual pode variar.

4 Calculando a Incerteza

Supomos que temos um histórico de preços de 2 ativos como na tabela abaixo.

	Período 1	Período 2	Período 3
Ativo 1	1.3	1.0	0.8
Ativo 2	0.9	1.1	1.0

Tabela 1: Tabela de preços dos ativos nos últimos 3 períodos

Em geral, calculamos o preço médio de cada ativo como:

$$\overline{r}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} r_{ij}}{m}$$

onde $\overline{r}_i$ é o preço médio para o ativo i e r_{ij} é o preço do ativo i no período j. Assim sendo, temos para este caso:

$$\overline{r}_1 = 1.0334 \quad \overline{r}_2 = 1.0000$$

A medida da incerteza deveria refletir a diferença entre a média e a variável em cada período. Poderíamos calcular a incerteza para o ativo 2 como:

$$Incerteza = \frac{|\overline{r}_2 - r_{21}| + |\overline{r}_2 - r_{22}| + |\overline{r}_2 - r_{23}|}{3} = 0.0667$$

Porém, é mais popular definirmos a incerteza como o *desvio padrao* o qual é calculado da seguinte maneira :

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(\overline{r}_2 - r_{21})^2 + (\overline{r}_2 - r_{22})^2 + (\overline{r}_2 - r_{23})^2}{3}} = 0.0816$$

Chamamos de variância o quadrado do *desvio padrao*, o qual podemos dizer que é o somatório do quadrado das diferença da média com os valores das variáveis, ou seja:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m}(\overline{r}_i - r_{ij})^2}{m}$$

No caso do ativo 2 teríamos a variância como:

$$\sigma_2^2 = 0.0067$$

Porém, neste caso calcula-se a incerteza para um único ativo. Vamos agora calcular a incerteza de investir frações de dinheiros y_1 e y_2 onde y_i corresponde a fração de dinheiro a investir no ativo i e $y_1 + y_2$ corresponde ao total a investir. Como temos 3 períodos e 2 ativos relacionaremos na seguinte matriz:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix}$$

onde R_{ij} é o valor do ativo j no período i. Assim temos em média o seguinte valor:

$$\frac{r_{11} + r_{21} + r_{31}}{3} \cdot y_1 + \frac{r_{12} + r_{22} + r_{32}}{3} \cdot y_2$$

Calculando agora a variância do capital final. Analogamente a variância, temos 1/3 da seguinte soma de quadrados:

$$[r_{11}y_1 + r_{12}y_2 - (\overline{r}_1 y_1 + \overline{r}_2 y_2)]^2 + [r_{21}y_1 + r_{22}y_2 - (\overline{r}_1 y_1 + \overline{r}_2 y_2)]^2 + (r_{31}y_1 + r_{32}y_2 - [\overline{r}_1 y_1 + \overline{r}_2 y_2)]^2$$

ou melhor:

$$\sigma^2(x) = \frac{[(r_{11} - \overline{r}_1)y_1 + (r_{12} - \overline{r}_2)y_2]^2 + [(r_{21} - r_1)y_1 + (r_{22} - \overline{r}_2)y_2]^2[(r_{31} - \overline{r}_1)y_1 + (r_{32} - \overline{r}_2)y_2]^2}{3} :$$

Logo,

$$\sigma^2(y) = \frac{||Ay||^2}{3}$$

onde A é a matriz de cenários. Tal matriz é definida como:

$$A = \begin{pmatrix} r_{11} - \overline{r}_1 & r_{12} - \overline{r}_2 \\ r_{21} - \overline{r}_1 & r_{22} - \overline{r}_2 \\ r_{31} - \overline{r}_1 & r_{32} - \overline{r}_2 \end{pmatrix}$$

E consequentemente, o desvio padrão é: $\sqrt{\frac{||Ay^2||}{3}}$ Agora, $||Ay||^2 = (Ay)^T(Ay) = y^T A^T Ay$, portanto:

$$\sigma^2(y) = \frac{y^T A^T Ay}{3}$$

Ou melhor:

$$\sigma^2(y) = y^T Qy$$

Onde $Q = \frac{A^T A}{3}$ é chamada de matriz de covariância. Generalizando, temos que a variância do capital é:

$$\sigma^2(y) = y^T Qy$$

e a matriz de covariância Q pode ser calculada simplesmente a partir de uma tabela como a da Tabela 1 da seguinte maneira ou como feito acima.

$$q_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{m}(r_{ij} - \overline{r_i})(r_{kj} - \overline{r_k})}{m}$$

onde m é o número de períodos.

Com isso, podemos criar modelos para minimizar o risco e maximizar o retorno como descrito abaixo.

$$Minimizar \quad o \quad risco = \begin{cases} Min : F(y) = y^T Qy \\ \quad s.a : \quad \sum y_i = 1. \end{cases}$$

$$Maximizar \quad o \quad retorno = \begin{cases} Min : F(y) = -r^T y \\ \quad s.a : \quad \sum y_i = 1. \end{cases}$$

E também podemos relacionar os dois de maneira a ponderá-los da seguinte maneira:

$$\begin{cases} Min : F(y) = -r^T y + \rho y^T Qy \\ \qquad\qquad s.a : \quad \sum y_i = 1. \end{cases}$$

Assim podemos encontrar as frações ótimas a serem investidas de maneira a ponderar a constante ρ, por exemplo, colocando um valor alto para ρ seremos mais conservadores ou então numa decisão mais arriscada deixar o valor de ρ muito baixo.

Tentou-se fazer algumas simulações aplicadas a realidade usando o modelo acima com o método do gradiente. Penalizou-se a função objetivo da seguinte maneira e assim forçamos que ele satisfaça a restrição:

$$Min : F(y) = -r^T y + \rho y^T Qy + M \cdot (\sum y_i - 1)$$

5 Condições de Otimalidade

5.1 Definições

Suponha que $F(x)$ é uma função contínua e diferenciável e x está em $\mathbb{R}$, então quando $x = x^*$:

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad e \quad \frac{d^2F}{dx^2} > 0$$

E x^* é chamado mínimo local. Tal definição implica que $F(x^*)$ é o menor valor de F em uma determinada região próxima de $x*$. Pode ser que $F(x^*) \leq F(x)$ para todo x mas não podemos garantir isso. Se as condições acima são satisfeitas e se $F(x^*) \leq F(x)$ para todo x então x^* é chamado de Mínimo Global.

Proposição 1 : Condições necessárias de primeira ordem

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \subset C^1$. Se x^* é um minimizador local de f em $\mathbb{R}^n$, ent˜ao $\nabla f(x^*) = 0$.

Proposição 2: Condições necessárias de segunda ordem

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \subset C^2$. Se x^* é um minimizador local de f em $\mathbb{R}^n$, então:

$(i)\nabla f(x^*) = 0$;

$(ii)\nabla^2 f(x^*)$ é semidefinida positiva.

Proposição 3: Condições Suficiente de segunda ordem

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \subset C^2$. Se $x^* \subset \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*) > 0$, então x^* é um minimizador local estrito de f em $\mathbb{R}^n$

Podemos observar que se as condições de otimalidade são satisfeitas, então $F(x^*+h) > F(x^*)$ para h pequeno.

Sabemos que:

$$F'(x^*) = \lim_{h->0} \frac{F(x^* + h) - F(x^*)}{h}$$

Então podemos fazer :

$$F'(x^*) = \lim_{x->x^*} \frac{F(x) - F(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x->x^{*-}} \frac{F(x) - F(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x->x^{*+}} \frac{F(x) - F(x^*)}{x - x^*}$$

Logo, se para $x^* < x < x^* + h$ então $F'(x^*) \geq 0$ e para $x^* + h < x < x^*$ então $F'(x^*) \leq 0$ então:

$$F'(x^*) = 0$$

6 O método do Gradiente

6.1 O Método

O Método do Gradiente é um dos métodos mais conhecidos e mais antigos para minimizar várias variáveis. Tal método é de suma importância para um ponto de vista teórico pois ele é um dos mais simples para entender.

O Método do Gradiente requer que a função tenha ao menos as primeiras derivadas parciais contínuas. O método do Gradiente é basicamente resumido em escolher uma direção de descida

$-\nabla f(x^k)$. Ou seja, o algoritmo é definido pelo seguinte algoritmo iterativo:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \cdot \nabla_k f(x^k)$$

onde α_k é um escalar não negativo que reduz a função $f(x_k - \alpha_k \cdot \nabla f(x_k)$, ou melhor que faça $f(x_k - \alpha_k \cdot \nabla f(x_k) < f(x_k)$.

Podemos melhorar o algoritmo otimizando o tamanho do passo α_k. Ou seja, queremos escolher α_k que encontre o tamanho do passo que reduza o valor de $\phi(\alpha_k)$. Para fazermos isso derivamos a função $\phi(\alpha_k) = f(x_k - \alpha_k \cdot \nabla f(x_k))$ com relação a α_k e igualamos o resultado a zero. Formalizando o que queremos é:

$$\frac{d\phi(\alpha_k)}{d\alpha_k} = 0 \tag{1}$$

Com (1) podemos encontrar α_k para o passo da iteração. Chama-se Método do Gradiente com busca linear exata o algoritmo que utiliza o valor de α_k como mostrado acima.

6.2 O Método do Gradiente com busca linear exata para uma função quadrática

Seja $f(x) = 1/2 \cdot x^t G x + b^t x + c$ com G simétrica e positiva definida. Neste caso o gradiente de $f(x_k)$ é dado por :

$$\nabla f(x_k) = Gx + b$$

Assim, o minimizador da função é $Gx = -b$ Queremos calcular α_k então seja $\phi(\alpha_k)$ definida como abaixo:

$$\phi(\alpha_k) = f(x_k - \alpha_k \cdot \nabla f(x_k)$$

Então queremos encontrar α_k tal que:

$$\frac{d\phi(\alpha_k)}{d\alpha_k} = 0 \Rightarrow \alpha_k = \frac{\nabla^t f(x_k) \cdot \nabla f(x_k)}{\nabla^t f(x_k) \cdot G \cdot \nabla f(x_k)}$$

Logo podemos considerar o algoritmo como:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\nabla^t f(x_k) \cdot \nabla f(x_k)}{\nabla^t f(x_k) \cdot G \cdot \nabla f(x_k)} \cdot \nabla f(x_k)$$

7 Simulações

Foi aplicado o método do gradiente com busca exata. Porém o resultado não foi satisfatório pois encontrou-se valores negativos para alguns y_i e a Hessiana em algumas ocasiões ficavam semi-positiva definida e também quando M crescia a Hessiana ficava numericamente instável.

Então foi realizada uma simulação usando o método do gradiente projetado com o software Matlab para o modelo abaixo o qual não permite frações negativas.

$$\begin{cases} Min : F(y) = -r^T y + \rho y^T Q y \\ \quad s.a : \quad \sum y_i = 1; \quad y_i \geq 0. \end{cases}$$

Usamos o seguinte portfólio para a simulação. Usamos 6 ativos com o histórico do preço médio de cada ativo durante 19 dias úteis de janeiro. Tais dados foram retirados da Bovespa.

Cod. Ação | Dia	2	3	4	7	8	9	10	11
AMAR3	32,82	32,04	32,01	31,91	31,82	32,07	31,44	30,96
BEEF3	11,22	11,21	11,23	11,19	11,16	11,2	11,38	11,44
BRKM5	13,6	13,72	13,7	13,49	13,65	13,47	13,4	13,28
BRSR6	15,8	16,06	16,54	17,14	16,63	16,24	16,48	16,67
CCRO3	19,4	19,26	19,73	19,62	19,62	19,64	19,67	19,62
GOAU4	23,56	24,13	23,84	24,06	23,71	23,3	23,1	22,93
Cod. Ação | Dia	14	15	16	17	18	21	22	23
AMAR3	32,04	32,45	32,02	32,68	32,51	32,56	32,2	31,98
BEEF3	11,55	11,6	11,6	11,86	12,36	12,45	12,32	12,75
BRKM5	13,55	13,69	13,64	13,75	13,81	14,16	14,23	14,42
BRSR6	16,81	16,92	16,9	17,19	17,15	17,58	17,2	17,28
CCRO3	19,79	19,85	20,13	20,26	19,89	20,08	20,36	20,74
GOAU4	22,97	22,81	22,7	22,96	22,65	22,53	22,61	22,63
Cod. Ação | Dia	24	28	29					
AMAR3	32,28	32,2	32,14					
BEEF3	12,86	12,92	12,91					
BRKM5	14,2	13,97	14,63					
BRSR6	17,3	17,24	17,28					
CCRO3	20,5	20,33	20,49					
GOAU4	22,4	21,69	21,78					

Figura 1: Histograma do preço médio de cada ativo durante 19 dias úteis

Foi encontrado o seguinte resultado usando o parâmetro $\rho = 500$.

$$y = \begin{pmatrix} 0.163079994994212 \\ 0.031829575611139 \\ 0.000000000000000 \\ 0.017280784026012 \\ 0.461088749247299 \\ 0.326720896121338 \end{pmatrix}$$

Se a compra fosse realizada no dia 29/01/2013 e a venda no dia 06/02/2013 obteria-se um ganho de 4.1%. Usando o parâmetro $\rho = 100000$ nas mesmas condições acima teríamos a distribuição ótima a ser investida abaixo:

$$y = \begin{pmatrix} 0.065571853987955 \\ 0.187763784365673 \\ 0.000000000000000 \\ 0.022856612998955 \\ 0.336204737013531 \\ 0.387603011633886 \end{pmatrix}$$

e um ganho de 3.4%. Vejamos a segunda simulação é menos arriscada porém obteve um lucro menor.

8 Agradecimentos

Agradeço a oportunidade dada pelo orientador Prof. Dr. Roberto Andreani para estudar o assunto e pelo apoio e orientação, me auxiliando e acompanhando no projeto.

Referências

[1] Nonlinear Optimization with Financial Applications, Michael Bartholomew-Biggs, Kluwer Academic Publishers, 2005.

[2] http://www.bmfbovespa.com.br/shared/iframe.aspx?idioma=pt-br&url=http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/cotacoes-historicas/FormSeriesHistoricas.asp.

[3] Linear and Nonlinear programming, David G. Luenberger, Springer,2008.

[4] Elementos de programação não linear, Ana Friedlander, Editora Unicamp, 1994.