Implementação eficiente da heurística de reordenamento de Cuthill-McKee Reversa

Raniere Silva* Aurelio Oliveira†
Orientando Orientador

19 de junho de 2013

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho revisitou-se a heurística de reordenamento Cuthill-McKee Reversa, proposta em 1969, que busca um reordenamento para matrizes esparsas que reduza a largura de banda destas. O autor deste trabalho implementou a heurística revisitada, testou com várias bibliotecas (dentre elas a “Netlib LP” e “Meszaros”) e concluiu, pelo menos para os problemas testados, que a heurística Cuthill-McKee Reversa é inferior a heurística de mínimo grau múltiplo por gerar mais elementos não nulos na decomposição de Cholesky.

*ra092767@ime.unicamp.br
†aurelio@ime.unicamp.br

2 Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual

Consideremos o Problema de Programação Linear na Forma Padrão (PPLFP):

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & c^T x \\ \text{sujeito a } & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de posto completo m e c, b e x são vetores colunas de dimensão apropriada. Associado a este problema temos o problema dual (PPLFD):

$$\begin{aligned} \text{maximizar } & b^T y \\ \text{sujeito a } & A^T y + z = c, \\ & z \geq 0, \end{aligned}$$

onde y é um vetor coluna de dimensão m de variáveis livres e z é o vetor coluna de dimensão n de variáveis de folga duais. O *gap* dual é dado por $\gamma = c^T x - b^T y$ que se reduz a $\gamma = x^T z$ para pontos primais e duais factíveis.

Os Métodos de Pontos Interiores Primais-Duais para resolver PPLFP consistem em, a partir de uma tripla inicial (x^0, y^0, z^0), construir uma sequência de triplas, (x^i, y^i, z^i), dada por

$$\begin{aligned} x^{i+1} &= x^i + \alpha^i \Delta x^i, \\ y^{i+1} &= y^i + \alpha^i \Delta y^i, \\ z^{i+1} &= z^i + \alpha^i \Delta z^i, \end{aligned}$$

onde $i \geq 0$ e $\alpha^i \in (0, 1]$, que tende para a tripla (x^*, y^*, z^*) que é solução de PPLFP e PPLFD. A constante α^i deve ser escolhida tal que $x^i, z^i > 0$ e, frequentemente, $\alpha^i << 1$ [Wri87].

A direção afim nos Métodos de Pontos Interiores Primais-Duais, $(\Delta x^i, \Delta y^i, \Delta z^i)$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^i \\ \Delta y^i \\ \Delta z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d \\ r_p \\ r_a \end{bmatrix}, \tag{1}$$

onde $X = \text{diag}(x^i)$, $Z = \text{diag}(z^i)$, $r_p = b - Ax^i$, $r_d = c - A^T y^i - z^i$, $r_a = -XZe$ e e representa o vetor de uns.

Eliminando as variáveis Δz^i de (1) obtemos o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} -D & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^i \\ \Delta y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

onde $D = X^{-1} Z$, $r_1 = r_d - X^{-1} r_a$ e $r_2 = r_p$, e

$$\Delta z^i = X^{-1} \left(r_a - Z \Delta x^i \right).$$

A forma mais utilizada para resolver (2) consiste em reduzir o sistema através de eliminação das variáveis Δx^i de forma a obter o sistema dado por

$$A D^{-1} A^T \Delta y^i = A D^{-1} r_1 - r_2 \tag{3}$$

e que

$$\Delta x^i = D^{-1}\left(r_1 - A^T \Delta y^i\right).$$

Para resolver (3) costuma-se utilizar a fatoração de Cholesky pois $AD^{-1}A^T$ é uma matriz simétrica definida positiva. Durante a construção da sequência de triplas (x^i, y^i, z^i) apenas D se altera na matriz e por esse motivo a estrutura esparsa de $AD^{-1}A^T$ é mantida durante todas as iterações do Método de Pontos Interiores Primal-Dual.

3 Matrizes Esparsas

Como visto na seção anterior, um dos passos dos Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual consiste em resolver um sistema linear simétrico definido positivo, cuja estrutura esparsa é mantida inalterada durante todo o método, utilizando a fatoração de Cholesky. Na próxima subseção introduziremos as definições de banda e envelope de matrizes para posteriormente apresentarmos a fatoração de Cholesky.

3.1 Banda e Envelope de Matrizes

Mudando a notação, considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica definida positiva genérica com entradas A_{ij}. Para cada linha i de A, $i = 1, \ldots, n$, seja

$$f_i(A) = \min\{j \mid A_{ij} \neq 0\},$$

isso é, $f_i(A)$ corresponde a primeira coluna cujo elemento na linha i é diferente de zero.

Seguindo Cuthill e McKee [CM69], definimos

$$\beta_i(A) = i - f_i(A), 1 \leq i \leq n,$$
$$\beta(A) = \max\{\beta_i(A) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

em que $\beta_i(A)$ é a largura de banda da i-ésima linha de A e $\beta(A)$ é a largura de banda da matriz A. A banda da matriz A é definida como

$$\mathrm{Band}(A) = \{\{i, j\} \mid 0 < i - j \leq \beta(A)\}$$

e ilustrada na Figura 1.

O envelope da matriz A é definido como

$$\mathrm{Env}(A) = \{\{i, j\} \mid 0 < i - j \leq \beta_i(A)\}.$$

e ilustrado na Figura 2.

3.2 Fatoração de Cholesky

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica definida positiva, então existe uma única matriz $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior com elementos positivos na diagonal tal que $A = GG^T$. A fatoração $A = GG^T$ é conhecida como fatoração de Cholesky e no algoritmo a seguir é apresentado uma forma de obter-se G.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 10 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 10 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 1: Ilustração da banda, sombreado e contornado por pontos, e da largura de banda, linha contínua, para duas matrizes simétricas.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 10 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 10 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 2: Ilustração do envelope, sombreado e contornado por pontos, para duas matrizes simétricas.

Proposição 1. *A fatoração de Cholesky preserva o envelope da matriz.*

Demonstração. Para calcular G no Algoritmo 1 ocorrem operações aritméticas apenas nas linhas 3, 5 e 9. Vamos mostrar que nenhuma dessas operações aritméticas altera o envelope da matriz.

Para a linha 3, como A é simétrica definida positiva, ocorre que $A_{k,k}$ é não nulo e, portanto, $G_{k,k}$ também.

Para a linha 5 é fácil verificar que $G_{i,k}$ é nulo se e somente se $A_{i,k}$ também for nulo.

Para a linha 9, se $A_{i,j}$ não pertence ao envelope de A então $A_{i,j}$ e $G_{i,k}$ são nulos e portanto o envelope não é alterado. □

Proposição 2. *A fatoração de Cholesky preserva a banda da matriz.*

Demonstração. Como o envelope da matriz está contido na banda da matriz e já provamos que a fatoração de Cholesky preserva o envelope podemos concluir que a fatoração de Cholesky também preserva a banda da matriz. □

Algoritmo 1 Pseudo-código da Fatoração de Cholesky

Entrada: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva.
Saída: $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$G \longleftarrow 0$
para $k \in 1, \ldots, n$ **faça**
  $G_{k,k} \longleftarrow \sqrt{A_{k,k}}$
  para $i \in k+1, \ldots n$ **faça**
    $G_{i,k} \longleftarrow A_{i,k}/G_{k,k}$
  fim
  para $j \in k+1, \ldots, n$ **faça**
    para $i \in k+1, \ldots, n$ **faça**
      $A_{i,j} \longleftarrow A_{i,j} - G_{i,k}G_{j,k}$
    fim
  fim
fim

4 Método Cuthill-McKee Reverso

Considere a matriz A e seu fator de Cholesky G dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & 3,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & -0,3 & 2,9 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & -0,3 & -0,3 & 2,9 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & -0,3 & -0,3 & -0,4 & 2,9 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & -0,3 & -0,3 & -0,4 & -0,4 & 2,8 & 0,0 \\ 1,0 & -0,3 & -0,3 & -0,4 & -0,4 & -0,5 & 2,8 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que vários elementos nulos na parte triangular inferior de A são não nulos em G. A perda de elementos nulos ao realizar a fatoração de Cholesky é denominada de preenchimento e deve ser evitada sempre que possível.

Na seção anterior verificou-se que a fatoração de Cholesky preserva a banda e envelope da matriz. Por esse motivo, ao utilizar matrizes de banda e envelope pequenos o preenchimento da matriz também será pequeno. Será que dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva existe uma matriz $A' = PAP^T$, onde P é uma matriz de permutação, tal que a banda e/ou envelope de A' é menor que o de A?

Exemplo 1. *Considere a matriz A e G dada por*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que a largura da banda de A e G é 5 e o envelope é 19.

Agora, considere a matriz $A' = PAP^T = G'G'^T$, em que P é uma matriz de permutação, dada por

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad G' = \begin{bmatrix} 1,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,70 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,70 & 0,40 & 0,57 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,70 & 0,40 & 0,57 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,70 & 0,40 & 0,57 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que a largura da banda de A e G é 4 e o envelope é 15.

De acordo com o exemplo anterior, verifica-se a possibilidade de preprocessar a matriz de forma a reduzir a banda e envelope.

Na próxima subseção apresentamos algumas definições da Teoria de Grafos que serão utilizadas no algoritmo estudado para obter uma permutação que busca reduzir a largura de banda e envelope.

4.1 Grafos e matrizes esparsas

Um grafo é, fundamentalmente, um modo de representar uma relação binária entre objetos. Para o propósito deste trabalho, considere um grafo $G = (V, E)$ como um conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ e um conjunto de arestas $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$, que são representadas por pares não ordenados, por exemplo, $e_1 = \{v_1, v_2\}$.

Assim como um grafo, uma matriz também descreve uma relação binária entre objetos através de seus elementos não nulos. Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ induz um grafo $G(A)$, onde os vértices do grafo correspondem as dimensões da matriz e a aresta $e = \{i, j\}$ existe se e somente se $A_{ij} \neq 0$. Na figura abaixo é ilustrado a relação entre uma matriz e um grafo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

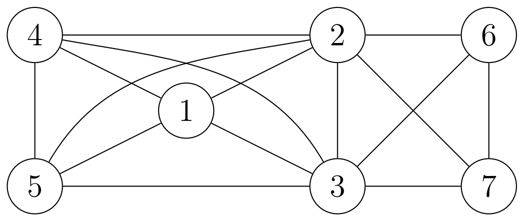

Figura 3: Ilustração do grafo (a direita) correspondente a uma matriz (a esquerda).

É importante destacar que permutar, simetricamente, linhas e colunas de uma matriz corresponde a renumerar os vértices do grafo. Na Figura 4 é ilustrado uma permutação da matriz presente na Figura 3 e a renumeração dos vértices do grafo.

Um resumo dos principais conceitos é dado a seguir:

Vértices adjacentes dois vértices v_1 e v_2 são adjacentes quando existe uma aresta entre eles, ou seja, $\{v_1, v_2\} \in E$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

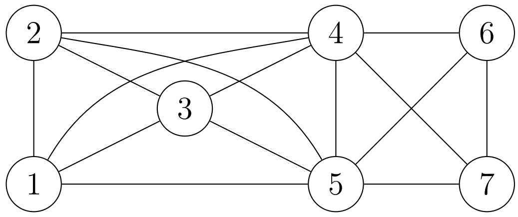

Figura 4: Ilustração da permutação simétrica de uma matriz e a renumeração dos vértices do grafo correspondente.

Incidência uma aresta incide em um vértice se ele for um dos extremos da aresta.

Grau do vértice número de arestas incidentes no vértice.

Caminho sequência de arestas disjuntas $((x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots (x_{k-1}, x_k))$. O tamanho de um caminho é o número de arestas que o compõe.

Grafo conectado (conexo) possui pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices.

Distância entre vértices ou $d(v_1, v_2)$, número de arestas que formam o menor caminho ligando os vértices v_1 e v_2.

Excentricidade ou $l(v)$, maior distância do vértice v a qualquer outro.

Diâmetro maior excentricidade dentre os vértices de um grafo.

Pseudo-diâmetro corresponde a uma alta excentricidade, porém não necessariamente a maior de todas.

Vértices periféricos são vértices cuja excentricidade é igual ao diâmetro do grafo.

Vértices pseudo-periféricos são vértices que apresentam altas excentricidades, mas não necessariamente a maior.

Estrutura de nível é uma partição do conjunto V em níveis $L_0, L_2, \ldots, L_{l(v)}$ tal que

1. todos os vértices adjacentes aos vértices do nível L_0 encontram-se nos níveis L_0 ou L_1,
2. todos os vértices adjacentes aos vértices no nível $L_{l(v)}$ encontram-se nos níveis $L_{l(v)}$ ou $L_{l(v)-1}$,
3. para $0 < i < l(v)$, todos os vértices no nível L_i encontram-se nos níveis L_{i-1}, L_i ou L_{i+1}.

A estrutura de nível com raiz no vértice v é corresponde a

1. $L_0 = \{v\}$,
2. para $i > 0$, L_i é o conjunto de vértices adjacentes aos vértices presentes no nível L_{i-1} e ainda não pertencentes a nenhum nível.

Na Figura 5 é ilustrado a estrutura de nível, dentre as várias possíveis, para um grafo.

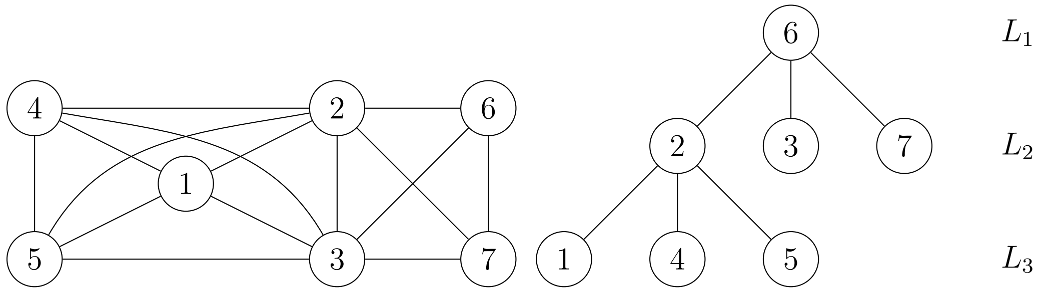

Figura 5: Grafo (esquerda) e sua estrutura de nível com raiz no vértice 6 (direita).

4.2 Método Cuthill-McKee Reverso

Cuthill e McKee [CM69] propuseram uma heurística de reordenação, ver algoritmo abaixo, cujo objetivo principal é reduzir a largura de banda de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cujo grafo é conexo.

Algoritmo 2 Pseudo-código de Cuthill-McKee

Entrada: Grafo $G(A)$ e um vértice inicial v.
Saída: o, novo ordenamento dos vértices de $G(A)$.
Marca todos os vértices como não visitados.
$o \longleftarrow$ vetor de zeros
$i \longleftarrow 1$
$f \longleftarrow$ fila vazia
Adicionar v na fila f.
Marca v como visitado.
enquanto f não for vazia **faça**
  Desenfileira f em v.
  $o_i \longleftarrow v$
  $i \longleftarrow i + 1$
  para todo vértice w adjacente a v, em ordem crescente de grau, **faça**
    se w ainda não foi visitado **então**
      Adicionar v na fila f.
      Marca w como visitado.
    fim
  fim
fim

Para o caso de uma matriz A cujo grafo não é conexo, Cuthill e McKee propõe aplicar a mesma heurística para cada uma das componentes conexas.

George [Geo71] verificou experimentalmente que ao reverter o ordenamento obtido pelo Algoritmo Cuthill-McKee, *i.e.*, trocando o_i por o_{n-i+1} para $i = 1, 2, \ldots, n$, o novo ordenamento mantém a mesma banda mas diminui o envelope da matriz. Liu e Sherman [LS76] provaram que essa modificação nunca aumenta o envelope da matriz. Essa versão do algoritmo é conhecida como Método Cuthill-McKee Reverso.

Uma dos parâmetros de entrada do Método Cuthill-McKee (Reverso) é o vértice inicial sendo que experimentos computacionais [CM69] sugerem que vértices pseudo-periféricos são bons candidatos.

Uma heurística para encontrar vértices pseudo-periféricos foi proposto por Alan George e Joseph W. H. Liu [GL79], ver algoritmo a seguir, e é uma modificação de um algoritmo anteriormente proposto por Gibbs *et. al* [GPS76] baseado na observação de que

$$y \in \mathcal{L}_{l(x)}(x) \Longrightarrow l(x) \leq l(y),$$

i.e., se y pertence ao nível mais elevado da estrutura de níveis com raiz em x então a excentricidade de x é menor ou igual a x. Essa observação é verificada com maior facilidade em grafos que são uma árvore, ver figura abaixo.

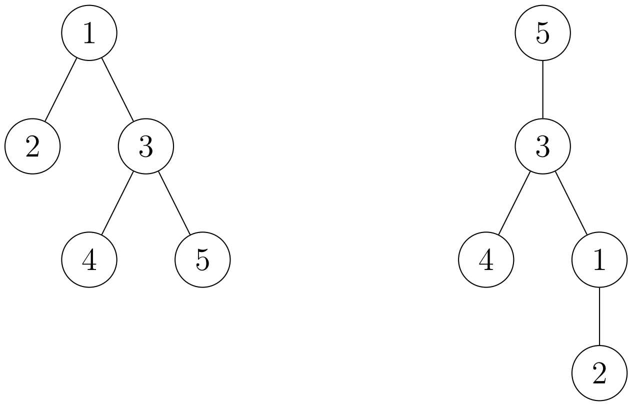

Figura 6: Grafo e sua estrutura de níveis com raiz em 1 (a esquerda) e sua estrutura de níveis com raiz em 5 (a direita).

Algoritmo 3 Pseudo-código para encontrar vértice pseudo-periférico, x.

Entrada: Grafo $G(A)$.
Saída: x.
1: $r \longleftarrow$ Nó arbitrário em $G(A)$
2: Construir estrutura de nível a partir de r, $\mathcal{L}(r)$.
3: Escolher um vértice x pertencente ao último nível de $\mathcal{L}(r)$.
4: Construir estrutura de nível a partir de x, $\mathcal{L}(x)$.
5: **se** $l(x) > l(r)$ **então**
6: $\quad r \longleftarrow x$
7: $\quad$ Retorna para a linha 2
8: **fim**

---

5 Implementação do Método e Testes Computacionais

O Método Cuthill-McKee Reverso foi implementado, na linguagem C, pelo autor deste trabalho como um patch para o PCx (`http://pages.cs.wisc.edu/~swright/PCx/`), e a implementação desenvolvida encontra-se disponível em `https://github.com/r-gaia-cs/PCx.git`.

Tabela 1: Resultados experimentais da biblioteca Kennington.

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
cre-a	0	3,3212E+04	23	1,8000E-01	0	2,6381E+06	18	2,3900E+01
cre-b	0	2,4863E+05	41	2,0900E+00	0	5,3999E+06	30	1,0192E+02
cre-c	0	2,8528E+04	25	1,5000E-01	0	3,4284E+05	23	1,9000E+00
cre-d	0	2,1209E+05	41	1,7300E+00	0	5,0801E+06	30	1,0852E+02
ken-07	0	1,0034E+04	13	4,0000E-02	0	9,6033E+04	13	2,8000E-01
ken-11	0	1,0291E+05	20	4,5000E-01	0	1,0638E+07	15	2,9063E+02
ken-13	0	2,9842E+05	23	1,2400E+00	0	2,6536E+07	20	1,4141E+03
ken-18	0	1,9289E+06	29	8,5100E+00	-1	0,0000E+00	0	0,0000E+00
osa-07	0	2,8276E+04	22	5,2000E-01	0	1,8898E+05	22	1,0100E+00
osa-14	0	6,0795E+04	25	1,3900E+00	0	8,5696E+05	24	6,7400E+00
osa-30	0	1,1508E+05	24	2,9800E+00	0	3,1262E+06	19	3,5540E+01
osa-60	0	2,6591E+05	33	1,0890E+01	0	1,5942E+07	20	4,9131E+02
pds-02	0	4,4301E+04	24	1,9000E-01	0	7,6833E+05	20	5,1300E+00
pds-06	0	5,8934E+05	31	4,3900E+00	0	7,7159E+06	27	2,4528E+02
pds-10	0	1,6877E+06	33	2,0660E+01	0	1,5180E+07	31	6,3432E+02
pds-20	0	7,0896E+06	43	1,8843E+02	0	4,1662E+07	41	2,8887E+03

O PCx é um solver de Programação Linear que utilizar a variante de Mehrotra do Método Preditor Corretor com a estratégia de correção de Gondzio e o Método do Mínimo Grau Múltiplo de Liu[GL81] (MMD) para o reordenamento da matriz $AD^{-1}A^T$.

Testou-se a implementação (tendo como último commit aquele cuja identificação inicia com 259cf79) com todos os problemas das bibliotecas:

- "Netlib LP" (`http://www.netlib.org/lp/`),
- "Kennington" (`http://www.netlib.org/lp/data/kennington/`),
- "Meszaros" (`http://www.sztaki.hu/~meszaros/public_ftp/lptestset/misc/`),
- "PDS" (`http://plato.asu.edu/ftp/lptestset/pds/`),
- "Rail" (`http://plato.asu.edu/ftp/lptestset/rail/`).

Juntando os problemas de todas a bibliotecas, foram utilizados mais de 200 problemas dos quais apenas 4 o RCM apresentou um memor número de elementos não zeros (3 problemas da Netlib e 1 da Meszaros). Em relação a problemas não resolvidos, destaca-se os problemas da PDS que o MMD resolveu 5 e o RCM 1 dentre 9 problemas.

Informações adicionas sobre o resultado obtido para cada um dos problemas testados encontram-se nas Tabelas 1-10 sendo que "R", "NNZ", "IT" e "T" significam, respectivamente, "código de retorno"[1], "número de elementos não nulos", "número de iterações" e "tempo computacional" (em segundos).

[1]Quando diferente de zero o resultado encontrado não é confiável ou programa foi abortado

Tabela 2: Resultados experimentais da biblioteca Meszaros (1/3).

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
3-mix	0	5,4100E+02	16	1,0000E-02	0	6,1300E+02	16	1,0000E-02
air02	0	1,1800E+03	18	2,7000E-01	0	1,1900E+03	18	3,0000E-01
air03	0	5,3030E+03	34	7,1000E-01	0	5,8610E+03	34	7,2000E-01
air04	0	2,0654E+05	76	3,7700E+00	0	2,5434E+05	96	7,0100E+00
air05	0	6,2864E+04	33	6,1000E-01	0	7,1846E+04	25	5,5000E-01
air06	15	1,8586E+05	53	2,3200E+00	0	2,4812E+05	28	2,1600E+00
aircraft	14	3,7540E+03	10	1,2000E-01	14	3,7540E+03	10	1,8000E-01
aramco	0	9,5000E+01	9	0,0000E+00	0	1,1800E+02	9	0,0000E+00
bas1lp	0	2,2168E+06	9	1,8540E+01	0	3,2825E+06	9	5,1880E+01
baxter-mat	0	5,8934E+06	30	3,9960E+01	0	2,9029E+07	27	1,0537E+03
complex1	14	4,7140E+05	16	4,0300E+00	15	4,9191E+05	37	1,0140E+01
cr42	14	1,8040E+03	15	4,0000E-02	14	1,8040E+03	15	4,0000E-02
crew	0	8,5880E+03	12	1,6000E-01	0	8,8230E+03	12	1,6000E-01
dano3mip	12	1,0902E+06	34	1,3600E+01	12	3,4466E+06	32	7,8680E+01
dbah00	0	2,8099E+05	43	1,2400E+00	0	4,8499E+06	32	1,0051E+02
dbic1	0	1,8631E+06	45	2,8700E+01	-1	0,0000E+00	0	0,0000E+00
dbir1	0	2,5235E+06	24	6,8810E+01	0	5,7974E+06	23	2,8589E+02
dbir2	0	2,8185E+06	26	8,4010E+01	0	6,7499E+06	26	3,9022E+02
delfland	0	3,4610E+03	46	4,0000E-02	0	1,2234E+04	46	8,0000E-02
ds90	0	9,9700E+04	28	3,7000E-01	0	1,1216E+06	21	9,9200E+00
dsbmip	0	1,6789E+04	48	1,6000E-01	0	5,9151E+04	48	4,3000E-01
emsdz	0	2,7497E+05	37	1,5000E+00	0	2,7832E+06	29	5,1400E+01
f2177	0	1,2932E+07	2	2,8520E+01	0	2,5060E+07	2	1,0095E+02
gamsmod	0	1,6610E+03	3	1,0000E-02	0	5,8360E+03	3	0,0000E+00
iiasa	0	4,5250E+03	15	3,0000E-02	0	4,6540E+03	15	4,0000E-02
indata	0	1,0008E+06	14	5,4600E+00	0	8,3833E+05	14	1,0150E+01
kleemin3	0	6,0000E+00	5	0,0000E+00	0	6,0000E+00	5	0,0000E+00
kleemin4	0	1,0000E+01	6	0,0000E+00	0	1,0000E+01	6	0,0000E+00
kleemin5	0	1,5000E+01	8	0,0000E+00	0	1,5000E+01	8	0,0000E+00

Tabela 3: Resultados experimentais da biblioteca Meszaros (2/3).

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
kleemin6	0	2,1000E+01	8	0,0000E+00	0	2,1000E+01	8	0,0000E+00
kleemin7	0	2,8000E+01	8	0,0000E+00	0	2,8000E+01	8	0,0000E+00
kleemin8	0	3,6000E+01	9	0,0000E+00	0	3,6000E+01	9	0,0000E+00
l09a13l1d	14	6,8450E+03	12	2,0000E-02	14	7,0910E+03	13	2,0000E-02
leader	0	3,9554E+05	49	2,8600E+00	14	4,7594E+06	48	5,1883E+02
lindo	0	2,0000E+01	9	0,0000E+00	0	2,0000E+01	9	0,0000E+00
lp22	0	9,4273E+05	56	1,5690E+01	0	2,0149E+06	37	3,5400E+01
lpl1	0	9,6124E+05	68	1,1760E+01	0	5,1342E+07	52	6,7786E+03
lpl2	0	4,2869E+04	21	1,8000E-01	0	5,0591E+05	20	3,0700E+00
lpl3	0	1,4890E+05	36	1,1200E+00	0	4,4995E+06	31	1,2124E+02
model10	0	3,2144E+05	45	2,0800E+00	0	1,1938E+06	37	1,4640E+01
model11	0	1,4007E+05	25	6,4000E-01	0	7,7321E+05	21	5,2500E+00
model1	0	6,8610E+03	8	1,0000E-02	0	1,5093E+04	8	2,0000E-02
model2	0	1,2167E+04	23	5,0000E-02	0	1,5749E+04	23	8,0000E-02
model4	0	8,8743E+04	35	5,0000E-01	0	1,8571E+05	35	1,3200E+00
model5	0	1,4052E+05	44	1,2300E+00	0	2,8807E+05	44	3,2300E+00
model6	0	1,0634E+05	33	4,3000E-01	0	3,8909E+05	33	2,1400E+00
model7	0	1,1000E+05	39	7,1000E-01	0	2,5601E+05	39	2,2000E+00
model8	0	2,2376E+05	17	4,2000E-01	0	2,7580E+05	17	1,1400E+00
model9	0	7,0839E+04	41	6,0000E-01	0	1,0504E+05	42	1,4400E+00
nemsafm	0	1,0160E+03	16	1,0000E-02	0	1,3240E+03	16	2,0000E-02
nemscem	0	2,5350E+03	18	2,0000E-02	0	1,4749E+04	18	3,0000E-02
nemsemm1	0	2,4298E+05	57	1,5710E+01	0	3,9867E+05	57	1,9620E+01
nemsemm2	0	6,2496E+04	35	8,7000E-01	0	3,8140E+05	35	3,3700E+00
nemspmm1	0	1,1464E+05	39	7,4000E-01	0	8,6560E+05	31	9,0400E+00
nemspmm2,in	0	1,1890E+05	44	1,0100E+00	0	7,1490E+05	34	7,4900E+00
nemswrld	0	7,8312E+05	42	7,8000E+00	0	4,4720E+06	38	9,3030E+01
nsct1	0	5,4180E+06	21	1,7080E+02	0	8,5935E+06	22	6,1142E+02
nsct2	0	5,6456E+06	28	2,3305E+02	0	8,3502E+06	30	7,0599E+02
nsic1	0	5,0420E+03	10	2,0000E-02	0	7,2400E+03	10	3,0000E-02
nsic2	0	5,5160E+03	14	2,0000E-02	0	8,0110E+03	14	4,0000E-02
nsir1	0	3,0346E+05	21	3,6600E+00	0	6,3039E+05	17	1,0390E+01
nsir2	0	3,2795E+05	30	5,9400E+00	0	6,5743E+05	26	1,4420E+01
olivier	14	4,6137E+05	50	4,5700E+00	14	5,6194E+06	43	4,4814E+02

Tabela 4: Resultados experimentais da biblioteca Meszaros (3/3).

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
p0033	0	5,8000E+01	8	0,0000E+00	0	6,0000E+01	8	0,0000E+00
p0040	0	9,6000E+01	9	0,0000E+00	0	9,6000E+01	9	0,0000E+00
p0201	0	2,9220E+03	5	1,0000E-02	0	7,8160E+03	5	1,0000E-02
p0282	0	9,5870E+03	13	2,0000E-02	0	1,3065E+04	13	4,0000E-02
p0291	0	4,8890E+03	12	1,0000E-02	0	8,7050E+03	12	2,0000E-02
p0548	0	1,0530E+03	24	2,0000E-02	0	1,1890E+03	24	2,0000E-02
p05	0	2,3647E+05	23	7,1000E-01	0	2,2887E+06	19	2,3310E+01
p10	0	4,6962E+05	27	1,6900E+00	0	7,7808E+06	29	2,5367E+02
p12345	0	6,4360E+03	14	8,0000E-02	0	6,4360E+03	14	8,0000E-02
p19328	0	1,6932E+04	15	2,7000E-01	0	1,6932E+04	15	3,1000E-01
p19	0	2,9710E+03	19	2,0000E-02	0	9,8150E+03	19	3,0000E-02
p2756	0	6,5240E+03	15	5,0000E-02	0	6,7656E+04	15	2,0000E-01
pcb1000	0	2,9753E+04	23	1,8000E-01	0	3,9440E+05	23	1,8200E+00
pcb3000	0	1,0109E+05	25	5,6000E-01	0	4,3551E+06	19	4,9320E+01
primagaz	0	1,2404E+04	13	1,1000E-01	0	1,2404E+04	13	1,4000E-01
progas	0	3,0946E+04	15	6,0000E-02	0	4,8144E+04	15	2,3000E-01
ps	15	1,1054E+07	40	5,1600E+02	15	1,2683E+07	48	6,2349E+02
qiu	0	4,6492E+04	5	2,0000E-02	0	1,0207E+05	5	8,0000E-02
r05	0	4,3308E+05	23	1,7800E+00	0	2,1250E+06	18	2,6230E+01
rlf,pre,dual	0	8,4078E+05	13	2,3400E+00	0	6,0951E+06	13	4,8841E+02
routing	0	3,1143E+06	20	6,0600E+00	0	1,2819E+07	17	8,7570E+01
sc205	12	5,0422E+04	15	5,3000E-01	12	5,3625E+04	15	6,0000E-01
seymour	0	4,5141E+06	15	3,6330E+01	0	8,2165E+06	15	1,3423E+02
slp-tsk	0	4,0878E+06	19	6,4860E+01	0	4,0918E+06	19	1,2514E+02
southern1	0	5,6710E+06	15	6,5000E+01	0	7,7658E+06	15	6,6628E+02
sturing	0	1,8861E+04	36	1,5000E-01	0	3,6899E+04	36	3,0000E-01
sws	0	5,8235E+04	10	2,1000E-01	0	4,6605E+05	10	5,9000E-01
t0331-4l	0	2,0167E+05	37	6,5800E+00	0	2,1556E+05	37	7,0600E+00
test	0	6,5540E+03	46	2,7000E-01	0	6,5540E+03	46	2,9000E-01
testps.mod	0	3,1000E+01	13	0,0000E+00	0	3,1000E+01	13	0,0000E+00
unilever2	15	4,2276E+05	36	3,4700E+00	0	5,8050E+06	73	2,4664E+02
world	14	1,1112E+06	60	9,2800E+00	-1	0,0000E+00	0	0,0000E+00
zed	0	3,3800E+03	9	2,0000E-02	0	3,9520E+03	9	2,0000E-02
zz	15	2,8570E+05	43	3,7000E+00	15	9,9260E+05	43	1,0700E+01

Tabela 5: Resultados experimentais da biblioteca Netlib (1/3).

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
25fv47	0	3,3809E+04	25	1,1000E-01	0	7,0740E+04	25	2,8000E-01
80bau3b	0	4,1367E+04	36	3,1000E-01	0	2,3030E+05	36	1,4400E+00
adlittle	0	4,0400E+02	11	0,0000E+00	0	5,0300E+02	11	0,0000E+00
afiro	0	1,0700E+02	7	0,0000E+00	0	1,6600E+02	7	0,0000E+00
agg2	0	2,1482E+04	21	6,0000E-02	0	5,9242E+04	21	1,7000E-01
agg3	0	2,1482E+04	19	6,0000E-02	0	5,9242E+04	19	1,5000E-01
agg	0	1,2297E+04	18	3,0000E-02	0	2,6647E+04	18	6,0000E-02
bandm	0	3,9360E+03	16	2,0000E-02	0	7,0830E+03	16	2,0000E-02
beaconfd	0	8,2000E+02	10	1,0000E-02	0	1,0290E+03	10	0,0000E+00
blend	0	9,1300E+02	9	0,0000E+00	0	1,8130E+03	9	1,0000E-02
bnl1	0	1,2089E+04	33	6,0000E-02	0	3,1463E+04	33	1,4000E-01
bnl2	0	8,1275E+04	33	3,1000E-01	0	2,3394E+05	33	1,3400E+00
boeing1	0	5,7250E+03	18	2,0000E-02	0	3,9025E+04	19	9,0000E-02
boeing2	0	2,0290E+03	13	1,0000E-02	0	3,0930E+03	13	2,0000E-02
bore3d	0	1,0340E+03	15	1,0000E-02	0	1,4080E+03	15	1,0000E-02
brandy	14	2,7550E+03	17	2,0000E-02	14	3,7080E+03	17	2,0000E-02
capri	0	3,9620E+03	17	2,0000E-02	0	5,7110E+03	17	2,0000E-02
cycle	0	5,6102E+04	23	1,6000E-01	0	1,7816E+05	23	8,0000E-01
czprob	0	3,5200E+03	26	4,0000E-02	0	9,1320E+04	26	2,2000E-01
d2q06c	0	1,3735E+05	27	5,4000E-01	0	4,5543E+05	24	3,0100E+00
d6cube	0	5,4840E+04	17	2,2000E-01	0	6,5467E+04	17	2,8000E-01
degen2	0	1,6319E+04	11	3,0000E-02	0	4,0896E+04	11	8,0000E-02
degen3	0	1,2091E+05	16	5,0000E-01	0	5,3148E+05	13	2,5300E+00
dfl001	0	1,6381E+06	45	2,4430E+01	15	5,7201E+06	60	3,4708E+02
e226	0	3,2290E+03	18	2,0000E-02	0	7,7150E+03	18	3,0000E-02
etamacro	0	1,0843E+04	26	3,0000E-02	0	2,3260E+04	26	7,0000E-02
fffff800	0	9,5730E+03	29	7,0000E-02	0	3,3386E+04	29	1,3000E-01
finnis	0	4,9840E+03	22	3,0000E-02	0	1,0466E+04	22	4,0000E-02
fit1d	0	2,9600E+02	17	6,0000E-02	0	2,9800E+02	17	6,0000E-02
fit1p	0	6,2700E+02	16	7,0000E-02	0	6,2700E+02	16	8,0000E-02
fit2d	0	3,2400E+02	22	7,1000E-01	0	3,2500E+02	22	7,1000E-01
fit2p	0	3,0000E+03	20	5,4000E-01	0	3,0000E+03	20	5,8000E-01
forplan	0	3,3040E+03	21	3,0000E-02	0	4,3520E+03	21	3,0000E-02
ganges	0	2,9677E+04	16	6,0000E-02	0	4,8834E+04	16	1,6000E-01
gfrd-pnc	0	2,1120E+03	16	2,0000E-02	0	3,3160E+03	16	2,0000E-02
greenbea	14	4,9055E+04	50	4,4000E-01	14	1,5087E+05	49	1,5200E+00

Tabela 6: Resultados experimentais da biblioteca Netlib (2/3).

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
greenbeb	14	4,7783E+04	40	3,5000E-01	14	1,6769E+05	39	1,1800E+00
grow15	0	6,0900E+03	19	4,0000E-02	0	6,0900E+03	19	5,0000E-02
grow22	0	9,0580E+03	21	6,0000E-02	0	9,0300E+03	21	8,0000E-02
grow7	0	2,7300E+03	16	2,0000E-02	0	2,7300E+03	16	2,0000E-02
israel	0	1,1488E+04	19	4,0000E-02	0	1,1506E+04	19	6,0000E-02
kb2	0	5,0300E+02	11	0,0000E+00	0	7,4700E+02	11	0,0000E+00
lotfi	0	1,3690E+03	13	1,0000E-02	0	2,6940E+03	13	1,0000E-02
maros	0	1,3454E+04	18	4,0000E-02	0	3,3456E+04	18	1,0000E-01
maros-r7	0	5,3419E+05	14	1,6100E+00	0	4,3984E+05	14	4,1000E+00
modszk1	0	1,0550E+04	20	3,0000E-02	0	8,2365E+04	20	1,7000E-01
nesm	0	2,1776E+04	25	1,2000E-01	0	2,9048E+04	25	1,6000E-01
perold	0	2,1782E+04	33	9,0000E-02	0	4,4505E+04	33	2,1000E-01
pilot4	0	1,4279E+04	46	1,4000E-01	0	2,6482E+04	46	2,1000E-01
pilot87	0	4,2565E+05	29	3,3500E+00	0	7,7134E+05	25	7,7100E+00
pilot,ja	0	4,7924E+04	29	2,0000E-01	0	9,5733E+04	29	4,8000E-01
pilot	0	2,0081E+05	34	1,3000E+00	0	4,3589E+05	30	4,1800E+00
pilotnov	0	4,6353E+04	16	1,1000E-01	0	9,5971E+04	16	2,6000E-01
pilot,we	0	1,5605E+04	45	1,3000E-01	0	3,2919E+04	45	2,1000E-01
recipe	0	2,7700E+02	8	0,0000E+00	0	2,7800E+02	8	1,0000E-02
sc105	0	5,6900E+02	9	0,0000E+00	0	8,2500E+02	9	0,0000E+00
sc205	0	1,1560E+03	10	1,0000E-02	0	1,7160E+03	10	1,0000E-02
sc50a	0	2,4200E+02	7	0,0000E+00	0	3,2600E+02	7	0,0000E+00
sc50b	0	2,3100E+02	6	0,0000E+00	0	3,6100E+02	6	0,0000E+00
scagr25	0	2,9440E+03	17	2,0000E-02	0	4,2580E+03	17	3,0000E-02
scagr7	0	7,3000E+02	13	1,0000E-02	0	1,0360E+03	13	1,0000E-02
scfxm1	0	4,4300E+03	17	2,0000E-02	0	7,4190E+03	17	3,0000E-02
scfxm2	14	9,2840E+03	19	4,0000E-02	14	1,5458E+04	19	7,0000E-02
scfxm3	0	1,4138E+04	19	6,0000E-02	0	2,3442E+04	19	1,3000E-01
scorpion	0	2,2750E+03	11	1,0000E-02	0	4,9260E+03	11	2,0000E-02
scrs8	0	4,4770E+03	21	2,0000E-02	0	8,3040E+03	21	3,0000E-02
scsd1	0	1,3920E+03	8	1,0000E-02	0	1,4720E+03	8	0,0000E+00
scsd6	0	2,5450E+03	11	2,0000E-02	0	2,7400E+03	11	2,0000E-02
scsd8	0	5,8790E+03	10	3,0000E-02	0	5,9420E+03	10	3,0000E-02
sctap1	0	2,4350E+03	14	1,0000E-02	0	5,3670E+03	14	2,0000E-02
sctap2	0	1,1736E+04	12	3,0000E-02	0	5,5394E+04	12	1,1000E-01
sctap3	0	1,6100E+04	14	6,0000E-02	0	1,0257E+05	14	2,6000E-01
seba	0	5,3711E+04	13	1,7000E-01	0	5,5513E+04	13	4,0000E-01
share1b	0	1,4170E+03	18	1,0000E-02	0	1,7620E+03	18	2,0000E-02
share2b	0	1,0410E+03	17	1,0000E-02	0	1,5420E+03	17	1,0000E-02
shell	0	3,9830E+03	20	2,0000E-02	0	9,5390E+03	20	4,0000E-02

Tabela 7: Resultados experimentais da biblioteca Netlib (3/3).

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
ship04l	0	2,6410E+03	12	2,0000E-02	0	7,9440E+03	12	2,0000E-02
ship04s	0	1,7780E+03	12	1,0000E-02	0	4,0910E+03	12	2,0000E-02
ship08l	0	4,4420E+03	14	3,0000E-02	0	1,5947E+04	14	4,0000E-02
ship08s	0	2,2950E+03	11	2,0000E-02	0	4,2900E+03	11	2,0000E-02
ship12l	0	5,5060E+03	15	4,0000E-02	0	1,6980E+04	15	5,0000E-02
ship12s	0	2,5070E+03	12	2,0000E-02	0	3,8010E+03	12	2,0000E-02
sierra	0	1,2862E+04	18	6,0000E-02	0	4,3552E+04	18	1,4000E-01
stair	0	1,4682E+04	13	3,0000E-02	0	1,5047E+04	13	5,0000E-02
standata	0	2,3950E+03	13	1,0000E-02	0	3,9530E+03	13	2,0000E-02
standgub	0	2,3950E+03	13	1,0000E-02	0	3,9530E+03	13	1,0000E-02
standmps	0	3,9570E+03	23	2,0000E-02	0	9,1360E+03	23	3,0000E-02
stocfor1	0	8,0500E+02	11	0,0000E+00	0	1,3880E+03	11	1,0000E-02
stocfor2	0	2,2841E+04	19	7,0000E-02	0	3,2610E+04	19	2,4000E-01
tuff	0	7,0510E+03	18	2,0000E-02	0	9,8200E+03	18	4,0000E-02
vtp,base	0	5,0500E+02	10	0,0000E+00	0	5,0400E+02	10	0,0000E+00
wood1p	0	1,1645E+04	22	3,4000E-01	0	1,4537E+04	22	3,6000E-01
woodw	0	3,0027E+04	30	1,8000E-01	0	1,2672E+05	30	5,8000E-01

Tabela 8: Resultados experimentais da biblioteca Netlib-QAP.

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
qap12	15	2,1386E+06	41	3,4270E+01	15	3,4398E+06	42	8,6770E+01
qap15	15	8,1980E+06	46	3,3534E+02	15	1,3674E+07	54	8,1852E+02
qap8	0	1,9394E+05	8	2,4000E-01	0	2,7351E+05	32	1,7200E+00

Tabela 9: Resultados experimentais da biblioteca PDS.

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
pds-20	0	4,1662E+07	39	2,8013E+03	0	4,1662E+07	39	2,8013E+03
pds-30	0	1,4644E+07	48	5,4419E+02	0	1,4644E+07	48	5,4419E+02
pds-40	0	2,8195E+07	50	1,6533E+03	0	2,8195E+07	50	1,6533E+03
pds-50	0	4,1767E+07	54	3,0229E+03	0	4,1767E+07	54	3,0229E+03
pds-60	0	5,8119E+07	53	5,1108E+03	0	5,8119E+07	53	5,1108E+03

Tabela 10: Resultados experimentais da biblioteca Rail.

Problema	MMD				RCM			
Nome	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
rail2586	0	1,2368E+06	90	2,3844E+02	0	1,4425E+06	90	2,6242E+02
rail4284	0	5,8048E+06	71	6,3984E+02	0	7,0453E+06	71	8,4889E+02
rail507	0	6,8847E+04	36	3,3400E+00	0	7,7942E+04	30	3,6300E+00
rail516	0	5,7220E+04	29	2,1600E+00	0	7,3268E+04	29	2,3700E+00
rail582	0	8,6529E+04	35	4,0400E+00	0	1,1498E+05	35	4,3800E+00

6 Conclusões

Concluímos, pelo menos para os problemas testados, que a heurística de mínimo grau múltiplo é superior à heurística de Cuthill e McKee por gerar menos elementos não nulos na decomposição de Cholesky (levando em conta o tamanho do envelope).

A Informações adicionais

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo Processo 126874/2012-3.

É possível adquirir uma cópia deste trabalho em `https://github.com/r-gaia-cs/cnpq_126874_2012-3`.

Referências

[CM69] E. Cuthill and J. McKee. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In *Proceedings of the 1969 24th national conference*, ACM '69, pages 157–172, New York, NY, USA, 1969. ACM.

[Geo71] J.A. George. *Computer implementation of the finite element method.* Report. Department of Computer Science, Stanford University, 1971.

[GL79] Alan George and Joseph W. H. Liu. An implementation of a pseudoperipheral node finder. *ACM Trans. Math. Softw.*, 5(3):284–295, September 1979.

[GL81] Alan George and Joseph W. H. Liu. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems.* Prentice Hall Series in Computational Mathematics, 1981.

[GPS76] Norman E. Gibbs, Jr. Poole, William G., and Paul K. Stockmeyer. An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2):pp. 236–250, 1976.

[LS76] Wai-Hung Liu and Andrew H. Sherman. Comparative analysis of the Cuthill-McKee and the Reverse Cuthill-McKee ordering algorithms for sparse matrices. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2):pp. 198–213, 1976.

[Wri87] S.J. Wright. *Primal-Dual Interior-Point Methods.* Miscellaneous Bks. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.