



Relatório de Pesquisa

Título do projeto de pesquisa: Método de Diferenças Espectrais de Alta Ordem Aplicado à escoamentos Compressíveis

Bolsista: Fábio Mallaco Moreira

Orientador(a): João Luiz Filgueiras de Azevedo

Co-Orientador(a): Carlos Breviglieri Junior

Período a que se refere o relatório: Agosto de 2012 a Fevereiro de 2013

Resumo

O trabalho contribui com uma linha de pesquisa atualmente desenvolvida no IAE em simulação de escoamentos de fluidos por métodos numéricos de alta ordem. O objetivo consiste na implementação do método de diferenças espectrais para aplicações aeroespaciais. Durante o período foi implementada e testada uma formulação 1-D do método de diferenças espectrais para a simulação de problemas puramente convectivos. Os resultados obtidos foram condizentes com a literatura e o método mostrou-se eficiente computacionalmente para ordens de precisão espacial entre dois e seis. A implementação do limitador não apresentou os resultados que se esperava em um limitador hierárquico e sua validação deverá continuar. Mesmo assim, deu-se continuidade ao trabalho, passando para a próxima etapa que consiste no desenvolvimento de uma implementação para modelos bidimensionais em uma formulação Euler, atualmente em andamento.

1. Introdução

O método de diferenças espectrais (*Spectral Difference*) é um método de discretização espacial para malhas não estruturadas aplicado à mecânica dos fluidos computacional, desenvolvido por Liu, Vinokur e Wang^[1], que apresenta um desempenho computacional superior a métodos similares em problemas de escoamento compressível. Em particular, o método é mais eficiente em malhas não estruturadas de quadriláteros do que os métodos de volumes espectrais e de Galerkin descontínuo. Além disso, este método possui uma formulação mais simples^[2] o que facilita sua implementação. O objetivo de longo prazo do presente trabalho consiste em utilizar o método de diferenças espectrais de alta ordem para a solução das equações não viscosas da gasdinâmica, ou seja, as equações de Euler.

Inicialmente o método foi empregado para a solução da equação modelo de convecção e estudo de um limitador para lidar com soluções que possam apresentar descontinuidades, como ondas de choque, típicas em escoamentos compressíveis.

2. Método

O método de diferenças espectrais trabalha com malhas não estruturadas convertendo cada célula em um elemento padrão de forma a manter uma reconstrução universal da solução para todas as células, ao invés de particularizar o processo de reconstrução de fluxo para cada elemento. Este elemento padrão incorpora um conjunto de pontos geométricos nos quais a solução é armazenada e um conjunto de pontos nos quais os fluxos e propriedades do escoamento são calculados. Estes pontos são denominados, respectivamente, pontos de fluxo (PF) e pontos de solução (PS). A quantidade de PF e PS é determinada pela ordem de precisão espacial desejada. Os valores das variáveis conservadas em cada ponto de solução são obtidos de seus pontos correspondentes na célula inicial. Usando os valores das variáveis conservadas nos pontos de solução uma função de interpolação pode ser calculada, sendo utilizada para determinar os valores das variáveis conservadas nos pontos de fluxo.

Com os valores das variáveis conservadas em todos os PF, calculam-se os fluxos correspondentes a cada um destes. Como os fluxos são obtidos de polinômios independentes em cada elemento, os valores do vetor de fluxo na fronteira entre duas células são diferentes no PF de cada uma delas, embora fisicamente estes fluxos estejam sendo calculados no mesmo ponto. Assim, para manter as condições de conservação, um fluxo numérico apropriado é utilizado nestes pontos de fronteira entre duas células. Este fluxo numérico se encarrega de introduzir os termos de dissipação artificial necessários para manter a estabilidade numérica do processo de solução. A formulação do método de diferenças espectrais, como encontrada na literatura, não permite o uso de malhas mistas, pois a localização dos PF em células triangulares difere de células de quadriláteros. Desta forma, não é possível fazer essa interação entre os fluxos de duas células e garantir que as condições de conservação sejam respeitadas nas fronteiras entre células. A solução das equações governantes para cada célula da malha vai permitir atualizar os valores das variáveis conservadas nos pontos de solução. A marcha no tempo destas equações, no presente trabalho, foi realizada por meio da aplicação do método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem à forma diferencial das equações de conservação ^[3].

A implementação em duas dimensões é similar à unidimensional. O elemento padrão é o quadrado ilustrado na Fig. 1, sendo que os pontos azuis são os PF e os vermelhos são os PS. Para o método atingir uma ordem de reconstrução n são usadas $2n$ reconstruções unidimensionais da mesma ordem de modo que não é necessária uma interpolação em duas dimensões. A distribuição dos pontos em cada reta segue as mesmas proporções usadas no problema de uma dimensão.

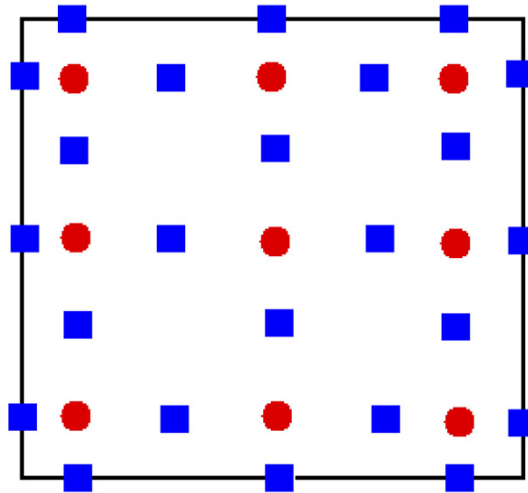


Figura 1: Pontos de fluxo e de solução para terceira ordem de precisão espacial.

A principal diferença é a necessidade de mapear cada célula da malha não estruturada em elementos padrão nos quais são feitas as reconstruções. Desta forma, para todos os elementos da malha, termos geométricos são calculados e armazenados para permitir esta transformação. Assim como no problema unidimensional, os coeficientes de interpolação são iguais, pois a distribuição dos PS e PF é igual para a distribuição horizontal e vertical dos pontos.

3. Implementação

O código foi construído com base em uma implementação do método de Volumes Finitos Espectrais (*Spectral Finite Volume*) que também utiliza malhas do tipo não estruturadas. A estrutura de dados é baseada em três listas, de vértices, de faces e de células. A estrutura de dados utilizada para representar as células armazena os termos da mudança de coordenadas local, uma lista para os vértices e uma para as arestas, ordenadas em sentido anti-horário, que definem o quadrilátero além das estruturas dos pontos de fluxo e solução contidos na célula. As arestas contêm os índices dos dois nós que as definem, os identificadores das células à esquerda e à direita, e ponteiros para os pontos de fluxo que se

encontram na fronteira entre os dois volumes. Por último, os vértices armazenam somente suas coordenadas na malha de entrada; os pontos de solução e de fluxo contêm as variáveis conservadas e seus fluxos, além da matriz jacobiana da mudança de coordenadas local e seu determinante.

O programa inicia adimensionalizando todas as propriedades da malha e impondo uma solução inicial de escoamento. Em seguida, a malha original é convertida em uma malha de diferenças espectrais, alocando-se os PF e PS na memória do computador e determinando suas coordenadas no domínio computacional. Assim, é possível calcular previamente os coeficientes dos polinômios da interpolação, que são comuns a todas as células utilizadas em todas as iterações. Com base nas coordenadas dos vértices, são calculados os termos da mudança de coordenadas local, o jacobiano da transformação e a localização de cada um dos pontos na malha original. Finalmente, os pontos de fluxo posicionados nas arestas são vinculados aos respectivos pontos.

Para cada iteração, e em cada célula, os valores das variáveis conservadas nos pontos de solução no domínio computacional são interpolados e convertidos para o domínio físico nos pontos de fluxo para que possa ser aplicado um método tradicional de cálculo do fluxo numérico, no caso, o método de Roe^[6]. O cálculo do fluxo numérico é feito após a imposição das condições de contorno nas extremidades da malha para cada par de pontos de fluxo de cada face. Em seguida os fluxos são convertidos de volta para o domínio computacional e seu divergente é interpolado para os pontos de solução e utilizado para a progressão no tempo.

4. Resultados

Para validar a implementação do método foram realizadas simulações de escoamentos subsônico sobre um aerofólio NACA 0012. As figuras a seguir ilustram os resultados obtidos para um escoamento de mach 0,6 e ângulo de ataque nulo. Por conta da geometria do perfil e do ângulo de ataque considerado uma condição de simetria foi usada para diminuir o custo computacional da simulação. Foram feitos testes para o método de segunda, terceira e quarta ordem cujas respectivas malhas são expostas na figura 2. A figuras 2(b), 2(c) e 2(d) mostram as malhas de alta ordem geradas após a adição dos pontos de fluxo e de solução à malha original, 2(a). A malha original contém 10608 células, portanto as malhas de alta ordem apresentam aproximadamente 42 mil, 95 mil e 169 mil graus de liberdade.

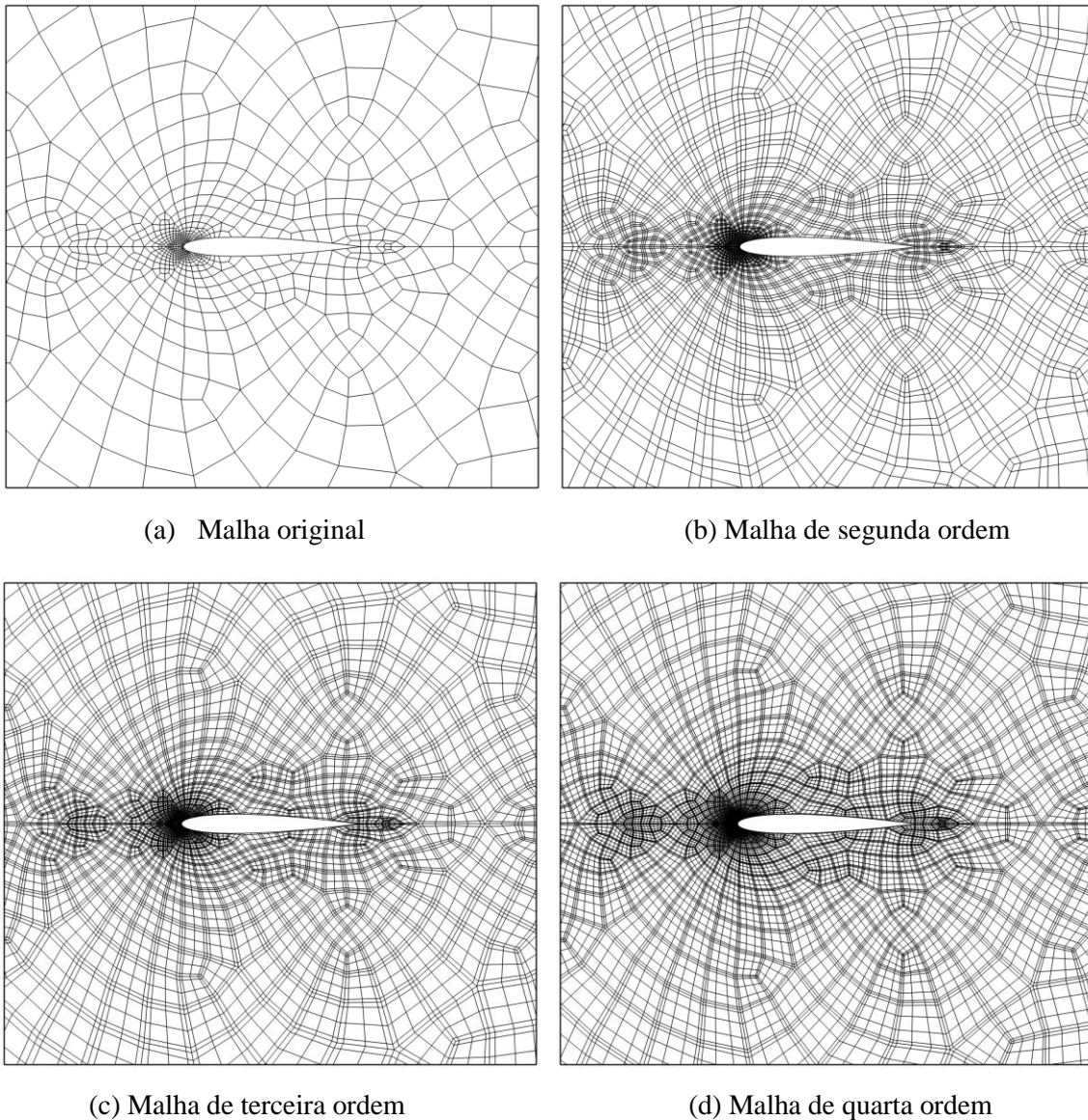


Figura 2: Malhas das simulações do aerofólio NACA 0012

Todos os casos convergiram até o erro de máquina com pode ser visto nos históricos de convergência na figura 3, o cálculo do resíduo é feito pela norma do máximo. A simulação de segunda ordem convergiu em aproximadamente 20 mil interações, a de terceira ordem em menos de 40 mil e a de quarta ordem em pouco mais de 70 mil. Essa discrepância é esperada pois as malhas mais finas das simulações de ordem maior exigem que a marcha no tempo seja feita mais lentamente.

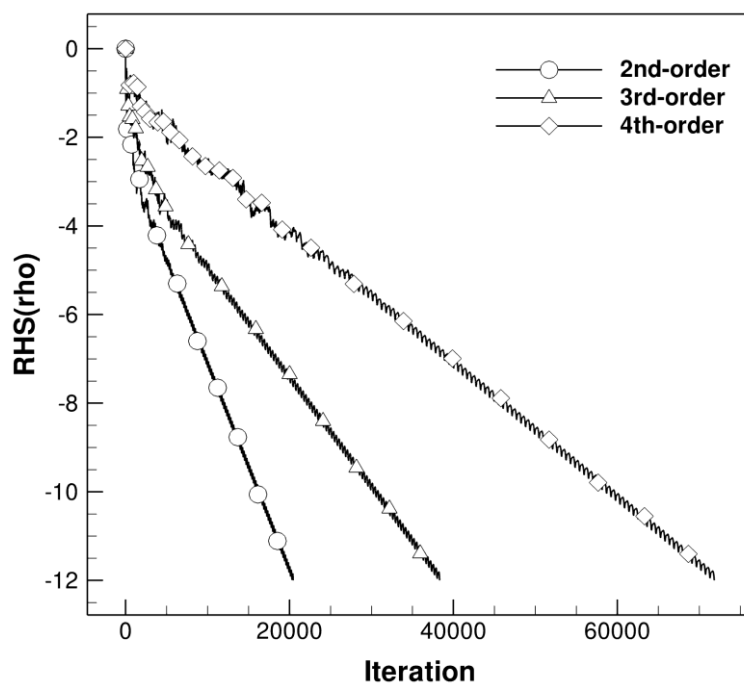


Figura 3: Histórico de convergência das simulações do aerofólio NACA 0012

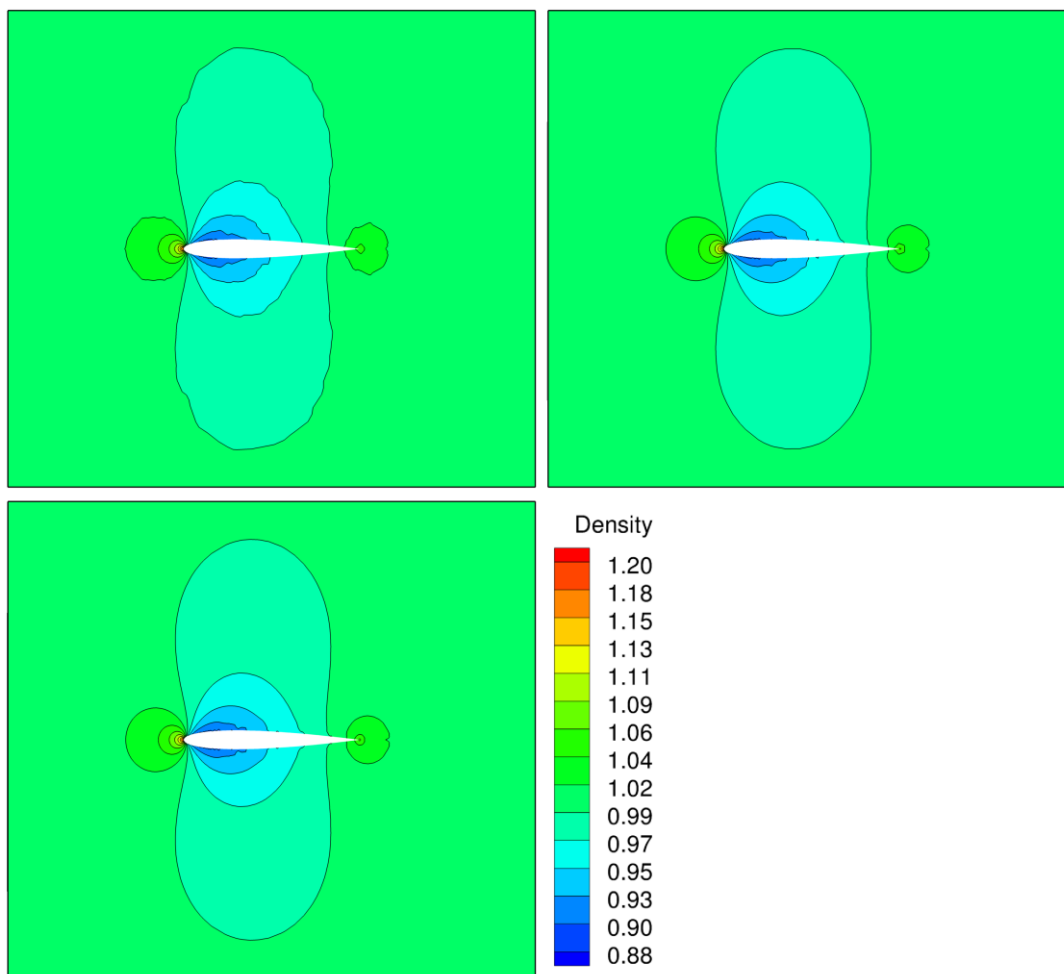


Figura 4: Curvas de densidade das simulações do aerofólio NACA 0012



A figura mostra os contornos de densidade obtidos, os valores encontram se adimensionalizados em relação a densidade de um escoamento livre. As curvas obtidas com o método de terceira e quarta ordem são claramente mais suaves que as obtidas com o de segunda ordem. A diferença entre os resultados de terceira e quarta ordem, porém, só é perceptível nas proximidades do aerofólio. Parte disso pode ser atribuído a representação de primeira ordem da geometria do aerofólio que limita a precisão do método na fronteira.

5. Trabalho Futuro

As principais limitações encontradas ao longo do projeto foram o alto número de interações necessárias para a convergência dos testes de alta ordem e a limitação da precisão do método causada pelas fronteiras lineares, para resolver esses problemas serão implementados métodos implícitos de marcha no tempo e suporte a fronteiras quadráticas e cúbicas. Com essas restrições solucionadas poderá ser feita uma avaliação numérica da ordem de precisão do método com simulações de escoamentos cujas soluções analíticas são conhecidas e o erro do método pode ser calculado precisamente.

Referências

- [1] Liu, Y., Vinokur, M., Wang, Z.J., "Discontinuous Spectral Difference Method for Conservation Laws on Unstructured Grids", *Proceedings of the 3rd International Conference on Computational Fluid Dynamics*, Toronto, Canada, July 2004.
- [2] Liu, Y., Vinokur, M., Wang, Z. J., "Multi-Dimensional Spectral Difference Method for Unstructured Grids", AIAA Paper No. 2005-0320, *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, Jan. 2005.
- [3] Wang, Z. J., Liu, Y., May, G., Jameson, A., "Spectral Difference Method for Unstructured Grids II: Extension to the Euler Equations", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 32, No. 1, July 2007, pp. 45-71.
- [4] Abeelee, K. V., Lacor, C., Wang, Z. J., "On the connection between the spectral volume and the spectral difference method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227. No. 2, Dec. 2007, pp. 877-885
- [5] Yang, M., Wang, Z.J., "A Parameter-Free Generalized Moment Limiter for High-Order Methods on Unstructured Grids", AIAA Paper No. 2009-605, *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, Orlando, FL, Jan. 2009.
- [6] Roe P. L. "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes."