Thiago Camargo Choquetta

Uma Apresentação Elementar da Integral de Lebesgue sobre Intervalos Fechados da Reta

OBJETIVO. Vamos apresentar aqui uma introdução elementar da integral de Lebesgue de funções definidas sobre intervalos fechados da reta. Utilizaremos ferramentas usuais da Análise elementar, como as sequências e séries de funções. Não usamos a teoria da medida, com exceção dos conceitos: conjunto nulo e medida zero. O texto mostra a viabilidade desta forma de introdução à integral de Lebesgue ser usada em uma disciplina de graduação.

Este trabalho foi orientado pelo Professor Dicesar Lass Fernandez.

1 Funções em Escada.

1.1 DEFINIÇÃO.

Chamaremos de **partição** de um intervalo $[a, b]$ uma sequência finita de números $P = \{a_0, \ldots, a_n\}$ tais que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.

1.2 DEFINIÇÃO.

Dizemos que uma função

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma **função em escada** (em relação a partição $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$) se existem números reais $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tais que

$$\varphi(x) = v_j \qquad \text{se } \ a_{j-1} < x < a_j \ , \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Usaremos a seguinte representação para as funções em escada

$$\varphi \sim (a_0, \ldots, a_n \ ; \ v_1, \ldots, v_n)$$

Observemos que na definição de função em escada não foram considerados os valores da função, φ, nos pontos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ da partição P.

Vamos identificar as funções em escada que diferem em apenas um número finito de pontos.

Denotemos por $S([a, b])$ o conjunto de todas as funções em escada definidas no intervalo $[a, b]$. O conjunto $S([a, b])$ quando munido das operações usuais de soma de funções e produto de função por escalar constitue um espaço vetorial. Com efeito: sejam φ e ψ duas funções em escadas representadas por

$$\varphi \sim (a_0, \ldots, a_n \ ; \ v_1, \ldots, v_n) \quad \text{ e } \quad \psi \sim (a_0, \ldots, a_n \ ; \ w_1, \ldots, w_n).$$

Então, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vamos ter

$$\alpha\varphi + \beta\psi \sim (a_0, \ldots, a_n \ ; \ \alpha v_1 + \beta w_1, \ldots, \alpha v_n + \beta w_n).$$

Vamos chamar de **função característica** de um subintervalo $I \subset [a, b]$ a função em escada definida por

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in I, \\ 0 & \text{se} \quad x \notin I. \end{cases}$$

Se $I = [c,d]$ é um subintervalo de um intervalo $[a,b]$, onde $a < c < d < d$, então χ_I é representado por

$$\chi_I \sim (a, c, d, b; 0, 1, 0)$$

1.3 PROPOSIÇÃO.

Toda função em escada $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é representada por uma combinação linear de funções características de subintervalos de $[a,b]$:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{]a_{k-1},a_k[},$$

onde $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ é uma partição de $[a,b]$,$c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Demonstração. Seja $I_k =]a_{k-1}, a_k[$, para todo $i, j \in \{1, 2, ...n\}$, temos : $I_i \cap I_j = \emptyset$,se $i \neq j$. Seja $x \in I_j$,então

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{]a_{k-1},a_k[} = \sum_{k=1, k\neq j}^{n} c_k 0 + c_j = c_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

■

2 Integral de Funções em Escada.

2.1 Seja $\varphi \in S([a,b])$ representada por

$$\varphi \sim (a_0, \ldots, a_n \; ; \; v_1, \ldots, v_n)$$

Definimos então

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} v_k(a_k - a_{k-1})}$$

OBSERVAÇÃO. Na definição de integral dada acima foi usada uma representação particular para a função φ. Para que esta definição seja válida é essencial que o valor da integral não dependa desta particular representação. Para verificar este fato, consideramos uma partição dada P e inserimos um ponto c:

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq c \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_n \leq b.$$

A função φ terá a seguinte representação

$$\varphi \sim (a_0, \ldots, a_k, c, a_{k+1}, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_k, v_k, \ldots, v_n)$$

e então

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\,dx &= v_1(a_1-a_0)+\cdots+v_k(c-a_k)+v_k(a_{k+1}-c)+\cdots+v_n(a_{n-1}-a_n)\\ &= v_1(a_1-a_0)+\cdots+v_k(a_{k+1}-a_k)+\cdots+v_n(a_{n-1}-a_n),\end{aligned}$$

ou seja a inserção de um ponto na partição P não mudou o valor da integral.

Denotemos por $I_P(\varphi)$ a integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ definida utilizando-se a partição P.

Consideremos, agora, a partição P de $[a,b]$ formada pelos pontos de *descontinuidade* da φ. Então, se P' é uma outra partição usada para representar φ, necessariamente P' é mais fina que a partição P, isto é, P' contém os pontos da P. Sejam então $c_1, c_2, \ldots, c_k$ os pontos de P' que não estão em P. Sejam também P_1 obtido da P pela inserção de c_1, P_2 obtido da P_1 por inserção de c_2, e por indução P_k obtido de P_{k-1} pela inserção de c_k. Vamos ter então

$$I_P(\varphi) = I_{P_1}(\varphi) = I_{P_2}(\varphi) = \cdots = I_{P'}(\varphi).$$

Desta forma se P' e P'' são duas partições quaisquer usadas para representar φ e definir a integral vamos ter

$$I_{P'}(\varphi) = I_P(\varphi) = I_{P''}(\varphi).$$

CONCLUSÃO:

A integral não depende da particular representação utilizada em sua definição.

2.2 PROPOSIÇÃO.

Sejam φ e $\psi \in S([a,b])$ e c e $d \in \mathbb{R}$, então

$$\int_a^b (c\,\varphi + d\,\psi)\,dx = c\int_a^b \varphi\,dx + d\int_a^b \psi\,dx.$$

Demonstração:
Seja o conjunto $P = \{a_0, \ldots, a_n\}$ uma nova partição resultante do refinamento das partições originais,temos:

$$c\varphi + d\psi \sim (a_0, \ldots, a_n\ ;\ cv_1 + dw_1, \ldots, cv_n + dw_n).$$

Da definição de integral:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (c\,\varphi + d\,\psi)\,dx &= \sum_{k=1}^{n}(cv_k + dw_k)(a_k - a_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(cv_k)(a_k - a_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}(dw_k)(a_k - a_{k-1}) \\
&= c\int_a^b \varphi dx + d\int_a^b \psi\,dx.
\end{aligned}$$

2.3 PROPOSIÇÃO.

Se $\varphi \in S([a,b])$ então

$$|\int_a^b \varphi(x)dx| \leq \int_a^b |\varphi(x)|dx \leq (b-a)||\varphi||_\infty.$$

Demonstração: Pela Desigualdade Triangular, segue:

$$|\int_a^b \varphi(x)dx| = |\sum_{k=1}^{n} v_k(a_k - a_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} |v_k|(a_k - a_{k-1}) = \int_a^b |\varphi(x)|dx.$$

Além disso, temos:

$$||\varphi||_\infty = |v_{max}| \geq |v_i|, \quad i = 1, 2...n.$$

Logo,

$$\int_a^b |\varphi(x)|dx = \sum_{k=1}^{n} |v_k|(a_k - a_{k-1}) \leq |v_{max}| \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = ||\varphi||_\infty(b-a)$$

2.4 PROPOSIÇÃO.

Sejam $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in S([a,b])$ tais que $\varphi \geq 0$ e $\varphi_1 \geq \varphi_2$. Então

(1) $$\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$$

(2) $$\int_a^b \varphi_1(x)dx \geq \int_a^b \varphi_2(x)dx$$

Demonstração. (1) segue obviamente da definição. (2) segue fazendo-se $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e utilizando-se a linearidade da integral (Proposição 4.2.2). ■

2.5 PROPOSIÇÃO.

Seja $\{\varphi_n\}$ uma sequência em $S([a,b])$ que e uniformemente para zero. Então

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = 0.$$

Demonstração. Se $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente para zero então $\{||\varphi_n||_\infty\}$ também converge para zero. Por outro lado

$$|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx| \leq (b-a)||\varphi_n||_\infty;$$

donde o resultado. ■

Observe que a condição de que (φ_n) converge *uniformemente* para zero é suficiente, mas não é necessária. De fato, se tomarmos $\varphi_n = \chi_{]0,1/n[}$ vemos que $||\varphi_n||_\infty = 1$ e portanto $\{\varphi_n\}$ não pode convirgir uniformemente para zero; entretanto

$$\int_0^1 \chi_{]0,1/n[}(x)dx = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3 Integral de Funções Contínuas.

Vamos demonstrar que toda função contínua pode ser aproximada por funções em escada. Esta aproximação será uniforme e o ponto crucial da demonstração está no fato das funções contínuas sobre intervalos fechados e limitados serem uniformemente contínuas.

3.1 PROPOSIÇÃO.

Se $f \in C([a,b])$ então existe uma sequência $\{\varphi_n\}$ em $S([a,b])$ que converge uniformemente para a função f.

Demonstração. Seja $\{\varepsilon_k\}$ uma sequência de números positivos tais que $\varepsilon_k \to 0$. Como f é uniformemente contínua, para cada ε_k existe um $\delta_k > 0$ tal que se $x, y \in [a,b]$ e $|x-y| < \delta_k$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_k$. Seja $n(k)$ um inteiro tal que $b - a < \delta_k\, n(k)$ e $P_k = (a_0, \ldots, a_n)$ uma partição de $[a,b]$ tal que $|a_j - a_{j-1}| < (b-a)/n(k)$. Definimos então

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} f(a_{j-1})\,, & a_{j-1} \leq x < a_j \\ f(b) & x = b = a_n \end{cases}$$

Vamos ter, para todo $x \in [a,b]$

$$|\varphi_k(x) - f(x)| < \varepsilon_k.$$

Com efeito, se $x \in [a,b]$ então $x \in [a_{j-1}, a_j[$ para algum j, onde $a_j - a_{j-1} < \delta_k$ e consequentemente $|x - a_{j-1}| < \delta_k$. Como $\varphi_k(x) = f(a_{j-1})$ vamos ter

$$|\varphi_k(x) - f(x)| = |f(a_{j-1}) - f(x)| < \varepsilon_k.$$

Desta forma, quando $k \to \infty$ temos $\varepsilon_k \to 0$ e $\varphi_k \to f$ uniformemente. ■

3.2 PROPOSIÇÃO.

Dada uma função $f \in C([a,b])$, existe uma sequência de funções φ_n, em $S([a,b])$, tal que $\varphi_n \longrightarrow f$ uniformemente, em $[a,b]$, e que verifica $\varphi_n \leq f$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja f contínua em $[a,b]$, então f é uniformemente contínua neste intervalo, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$, para todos $x, c \in [a,b]$. Por outro lado, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$, tal que $\dfrac{1}{n_\delta} < \delta$. Então, para todo $n > n_\delta$, consideramos uma partição : $a_1, .., a_n$, cujos intervalos tenham comprimento $\dfrac{1}{n}$.
Seja $x_{0,k} \in [a_{k-1}, a_k]$ tal que $f(x_{0,k}) \geq f(x)$, para todo $x \in [a_{k-1}, a_k]$. Por hipótese de continuidade uniforme, temos: $|f(x_{0,k}) - f(x)| < \varepsilon$, quando $a_{k-1} \leq x \leq a_k$.
Definimos a função escada: $\varphi_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_{0,k}) \chi_{]a_{k-1}, a_k[}(x)$
Daqui, concluímos que : $|f(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$, pois $\varphi_n(x) = f(x_{0,k})$ Por fim, nota-se que , à medida que n aumenta, os $f(x_{0,k})$ tendem a diminuir.Portanto $f(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$

3.3 PROPOSIÇÃO.

Seja $\{\varphi_k\}$ uma sequência de Cauchy uniforme. Então, a sequência $\{\int_a^b \varphi_n(x)dx\}$ é uma sequência de Cauchy de números reais (e portanto convergente) ou seja, existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx.$$

Demonstração. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $M = m(\varepsilon) > 0$ tal que se $m, n \geq M$ então

$$||\varphi_n - \varphi_m||_\infty = \sup |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} |\int_a^b \varphi_n(x)\, dx - \int_a^b \varphi_m(x)\, dx| &= |\int_a^b (\varphi_n - \varphi_m)\, dx| \leq \int_a^b |(\varphi_n - \varphi_m)|\, dx \\ &\leq (b-a)||\varphi_n - \varphi_m||_\infty < \varepsilon(b-a), \end{aligned}$$

o implica a assertiva. ■

3.4 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in C([a,b])$, (φ_n) e (ψ_n) sequências em $S([a,b])$ que convergem uniformemente para f. Então, $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ são sequências de Cauchy uniforme e

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx.$$

Demonstração. A sequência $\{\varphi_n - \psi_n\}$ converge uniformemente para zero. Então

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b (\varphi_n - \psi_n)dx = \lim_{n\to\infty}[\int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \psi_n(x)dx] \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx - \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx\ , \end{aligned}$$

donde o resultado. ■

Estamos agora em condições de definir a integral de uma função contínua.

3.5 DEFINIÇÃO.

Seja $f \in C([a,b])$ e $\{\varphi_n\}$ uma sequência em $S([a,b])$ que converge uniformemente para f. Definimos então

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

A proposição anterior implica que a definição da integral de uma função contínua independe da sequência que aproxima a função. A definição é portanto válida.

3.6 EXEMPLO: Cálculo de uma integral de função contínua.

Seja $f(x) = x \in C([0,1])$ e φ_n tais que:

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \chi_{]\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}[} \ ; \lim_{n\to\infty} \varphi_n = f(x) = x$$

Pela definição 3.4 temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \chi_{]\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}[} dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} = \int_0^1 x\ dx$$

4 Propriedade de Continuidade

4.1 TEOREMA (Propriedade de Continuidade)

Suponhamos que (φ_n) seja uma sequência de funções em $S([a,b])$ tais que

$$\varphi_n \geq \varphi_{n+1} \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e, para para todo $x \in [a,b]$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\ dx = 0.$$

Demonstração. Se $M = \sup \varphi_1$ então $M^{-1}\varphi_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e se $\lim_{n\to\infty} \int_a^b M^{-1}\varphi_n\ dx = 0$ então também $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\ dx = 0$. Logo podemos supor que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar o teorema ,devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$, então

$$\int_a^b \varphi_n\ dx < \varepsilon.$$

Este será o caso se determinarmos N tal que

$$\varphi_N \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ \chi_{[a,b]},$$

pois então

$$\int_a^b \varphi_n\ dx \leq \int_a^b \varphi_N\ dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b \chi_{[a,b]}\ dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

se $n \geq N$.

Seja (a_k) a sequência formada pelos pontos de descontinuidade das funções φ_n. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função ψ_n por

$$\psi_n := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\, \chi_{[a,b]} + \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k},$$

onde

$$I_k =]a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}[.$$

Se $a_1 = a$ tomar $I_1 = [a, a + \frac{\varepsilon}{2^2}[$, e se $a_n = b$ tomar $I_n =]b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b]$. Vamos ter $\psi_n(x) \geq 1$, se $x \in I_k$, para algum k. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_n \; dx &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b \chi_{[a,b]} \; dx + \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \chi_{I_k} \; dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto é suficiente demonstrar que $\varphi_N \leq \psi_N$, para algum N, pois então teremos, para todo $n \geq N$,

$$\int_a^b \varphi_n \; dx \leq \int_a^b \varphi_N \; dx \leq \int_a^b \psi_N \; dx < \varepsilon.$$

Consideremos os seguintes conjuntos

$$E_n := \{ \; x \; ; \; \varphi_n(x) > \psi_n(x) \; \} = \{ \; x \; ; \; \varphi_n(x) - \psi_n(x) > 0 \; \}.$$

Cada E_n é uma união de intervalos disjuntos. Como $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ e $\varphi_n \geq \varphi_{n+1}$, temos

$$\varphi_n - \psi_n \geq \varphi_{n+1} - \psi_{n+1},$$

e portanto

$$E_{n+1} \subset E_n \subset [a, b].$$

Para demonstrar que $\varphi_N \leq \psi_N$, para algum N, precisamos mostrar que E_N é vazio para esse N.

Suponhamos que este não seja o caso: $E_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\overline{x}_n$ o menor dos extremos inferiores dos intervalos qu constituem E_n. Como $E_{n+1} \subset E_n \subset [a, b]$, temos

$$\overline{x}_n \leq \overline{x}_{n+1} \leq b.$$

Desta forma vemos que $(\overline{x}_n)$ é uma sequência crescente e limitada, converge portanto para um $\overline{x} \in [a, b]$. Porém, $\overline{x}$ não pode ser qualquer dos pontos de descontinuidade a_k, pois nos pontos de I_k temos $\varphi_n \le 1 \le \psi_n$, para todo $n \ge k$; portanto $\overline{x}_n \notin I_k$, qualquer que seja $n \ge k$.

Logo $\overline{x}$ é um ponto de continuidade de todos as φ_n. Como $\overline{x}_n$ é um ponto extremo de E_n, existe $y_n \in E_n$ tal que $\overline{x} \le y_n \le x + 2^{-n}$. Então $\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{x}$, também, e para $n \ge k$,

$$\varphi_k(y_n) \ge \varphi(y_n) > \psi_n(y_n) \ge \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Portanto, como φ_k é contínua em $\overline{x}$, temos

$$\varphi_k(\overline{x}_n) \ge \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) \ge \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

para todo k, o que contraria a hipótese de que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$. ■

4.2 COROLÁRIO.

Sejam $\varphi_n, \psi, \varphi \in S\{[a,b]\}$, tais que :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)\ dx = \int_a^b \psi(x)\varphi(x)\ dx$$

Demonstração. Como $\varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x)$, e $\varphi_n(x)$ converge para $\varphi(x)$, então $(\varphi - \varphi_n)$ é decrescente e converge para zero. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi(x)(\varphi(x) - \varphi_n(x))dx = 0$$

Agora, utilizando o teorema anterior,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi(x)(\varphi(x) - \varphi_n(x))\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi_n(x))\ dx.$$

Portanto, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)dx.$$

5 Conjuntos Nulos

5.1 A Propriedade de Continuidade, demonstrada na seção anterior, tem a seguinte consequência. Suponhamos que (φ_n) seja uma sequência crescente de funções em escada que converge para uma função em escada φ. Então

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx = \int_a^b \varphi\, dx.$$

De fato, a sequência $\varphi - \varphi_n$ é decrescente e constituida de funções em escada não negativas que convergem para zero. A Propriedade de Continuidade e a linearidade da integral (Propriedade da Integral 1.1.3) implicam a assertiva.

5.2 DEFINIÇÃO.

Um conjunto $E \subset [a,b]$ é *negligível* ou um **conjunto nulo** se existe uma sequência crescente de funções em escada (φ_n), $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, tal que $(\varphi_n(x))$ diverge quando $x \in E$, enquanto a sequência $(\int_a^b \varphi_n \, dx)$ converge.

É claro que qualquer subconjunto de um conjunto nulo é também nulo.

A seguinte reformulação do conceito de conjunto nulo é muitas vezes conveniente.

5.3 PROPOSIÇÃO.

Um conjunto E é nulo se e somente se existe uma série $\sum_n \varphi_n$ de funções em escada tal que $\sum_n \varphi_n(x)$ diverge, quando $x \in E$, enquanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n| \, dx < \infty.$$

Demonstração. Suponhamos que E seja um conjunto nulo e (φ_n) uma sequência crescente de funções em escada, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, tais que $(\varphi_n(x))$ diverge, quando $x \in E$, enquanto $(\int_a^b \varphi_n \, dx)$ converge. Definindo

$$\psi_n := \varphi_{n+1} - \varphi_n;$$

vamos ter

$$\sum_{n=1}^{m} \psi_n = \varphi_{m+1} - \varphi_1.$$

Então, $\sum_n \psi_n(x)$ diverge, quando $x \in E$, enquanto $\sum_n \int_{\mathbb{R}} |\psi_n| \, dx$ converge:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n| \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (\int_a^b \varphi_{n+1} \, dx - \int_a^b \varphi_n \, dx) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_{n+1} \, dx - \int_a^b \varphi_1 \, dx < \infty. \end{aligned}$$

Recíprocamente, seja $\sum_n \varphi_n$ uma série de funções em escada que diverge nos pontos de um conjunto E mas tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n| \, dx < \infty.$$

Neste caso, $\sum_n |\varphi_n(x)|$ diverge, quando $x \in E$. Agora,

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_n|$$

é uma sequência de funções em escada que diverge em E, no entanto a sequência de integrais

$$\int_a^b \psi_n \, dx$$

converge. Portanto E é um conjunto nulo. ■

5.4 PROPOSIÇÃO.

Seja E_n uma sequência de conjuntos nulos. então $E := \bigcup_{n \geq 1} E_n$ é também um conjunto nulo.

Demonstração. Para cada n, seja $\sum_k \varphi_{nk}$ uma série de funções em escada que diverge em E_n mas tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_{nk}| \, dx < \infty.$$

Podemos supor que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_{nk}| \, dx < \frac{1}{2^n},$$

pois sempre podemos trocar φ_{nk} por $2^{-n} M^{-1} \varphi_{nk}$, onde

$$M > \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_{nk}| \, dx.$$

O conjunto $\{ \ \varphi_{nk} \ ; \ n \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N} \ \}$ é enumerável. Logo, podemos enumerá-lo na forma $(\varphi_m \ ; \ m \in \mathbb{N})$, Então, $\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(x)|$ diverge, quando $x \in E$, enquanto

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_m| \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_{nk}| \, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Portanto, $E = \bigcup_k E_k$ é um conjunto nulo. ■

5.5 COROLÁRIO.

Seja $E \in [a, b]$, então $[a, b] \setminus E$ não pode ser nulo

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $[a, b] \setminus E$ seja nulo. Logo, do Teorema 5.4, $E \cup ([a, b] \setminus E) = [a, b]$ é um conjunto nulo.

6 Conjuntos de Medida Zero

O conceito de conjunto nulo pode ser caracterizado como um conjunto de *medida zero.*

6.1 DEFINIÇÃO.

Um conjunto $E \subset [a, b]$ tem **medida zero** se para todo $\varepsilon > 0$ existe um sequência de intervalos abertos $(]a_k, b_k[)$ tais que

MZ1) $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[;$

MZ2) $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon.$

NOTAÇÃO. Se I é um intervelo em $\mathbb{R}$, de extremos a e b $(a < b)$, escrevemos

$$\ell(I) := b - a.$$

6.2 PROPOSIÇÃO.

Todo conjunto enumerável tem medida zero e é portanto negligível.

Demonstração.
Seja $E = \{a_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$, um conjunto enumerável. Dado $\varepsilon > 0$,definimos:
$I_i =]a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i-1}}, a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i-1}}[$. Deste modo, $a_i \in I_i$, $\ell(I_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$ e $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_i$
Como,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

o conjunto E é um conjunto de medida zero.

6.3 TEOREMA.

Seja E um subconjunto de $[a, b]$. As seguintes assertivas são equivalentes:

A) E é um conjunto nulo;

B) E tem medida zero;

C) E esta contido em uma reunião enumerável de intervalos abertos I_k tais que $\sum_k \ell(I_k) < \infty$, e cada $x \in E$ pertence a infinitos intervalos da sequência.

Demonstração. A) $\Longrightarrow$ B) Seja E um conjunto nulo. Então, existe uma sequência crescente de funções em escada tal que $(\varphi_n(x))$ diverge, quando $x \in E$, enquanto existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx = M.$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, podemos supor que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx < \varepsilon;$$

de fato, se esse não fosse o caso trocariamos φ_n por $\frac{\varepsilon}{M}\varphi_n$. Seja $\psi_n = [\varphi_n]$, a parte inteira de φ_n; por definição

$$\psi_n(x) = m \quad \text{se} \quad m \leq \varphi_n(x) < m+1,$$

onde m é um inteiro não negativo. A sequência (ψ_n) é crescente e formada por funções em escada. Além disso, $(\psi_n(x))$ diverge, quando $x \in E$, enquanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \, dx < \varepsilon,$$

pois $\psi \leq \varphi$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por conveniência definimos $\psi_0 \equiv 0$. O conjunto onde $\psi_n - \psi_{n+1}$ é positivo, isto é, maior ou igual a 1, é uma união finita de intervalos cuja soma dos comprimentos é menor ou igual a

$$\int_a^b (\psi_n - \psi_{n-1}) \, dx.$$

Cada $x \in E$ está contido em algum desses intervalos, para algum n; pois se $\psi_n(x) = \psi_{n+1}$, para todo n, teríamos $\psi_n(x) = \psi_0(x) = 0$. Seja (I_k) a coleção de todos esse intervalos; vamos ter

$$\sum_k \ell(I_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (\psi_n - \psi_{n+1}) \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \, dx < \varepsilon$$

e $E \subset \bigcup_k I_k$; portanto E tem medida zero.

B) $\Longrightarrow$ C) Seja E um conjunto de medida zero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja (I_{nk}) uma sequência de intervalos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{nk}) < \frac{1}{2^n}.$$

Reordenamos a sequência dupla (I_{nk}) na forma $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Vamos ter

$$\sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{nk}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Vemos também que cada $x \in E$ pertence a infinitos intervalos da sequência.

C) $\Longrightarrow$ **A)** Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto nas condições de **C)** e (I_n) uma sequência de intervalos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \infty$$

e que, para cada $x \in E$, admite uma subsequência $(E_{k(n)})$ tal que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{k(n)}.$$

É claro que a série $\sum_n \chi_{I_{k(n)}}$ diverge em E, enquanto

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) > \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \chi_{I_{k(n)}}\, dx.$$

A demonstração esta completa. ■

7 Convergência Quase Sempre

Os conjuntos nulos podem ser negligênciados em diversas situações. Para tornar precisas essas situações introduzimos o seguinte conceito.

7.1 DEFINIÇÃO.

Se alguma propriedade for válida para números reais x pertencentes ao complementar de um conjunto nulo, dizemos que essa propriedade vale **quase sempre** (abreviadamente q.s.) ou ainda que a propriedade vale **para quase todo** x (abreviadamente p.q.t. x).

Por exemplo, se (φ_n) é uma sequência crescente de funções em escada tais que a sequência $\int_a^b \varphi_n\, dx)$ converge, então

$$(\varphi_n) \qquad \text{converge} \quad \text{q.s.}$$

ou

$$(\varphi_n(x)) \qquad \text{converge} \quad \text{p.q.t. } x,$$

pela própria definição de conjunto nulo.

7.2 TEOREMA.

Seja (φ_n) uma sequência decrescente de funções em escada, $\varphi_n \geq \varphi_{n+1} \geq 0$, tais que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0, \qquad \text{p.q.t. } x.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx = 0.$$

Demonstração. Seja E um conjunto nulo tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0,$$

se $x \in E^{\mathbf{c}}$. Pela definição de conjunto nulo, existe uma sequência (ψ_n) crescente de funções em escada, não-negativas, tal que

$$M = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \, dx,$$

existe. A sequência (η_n) de funções em escada definidas por

$$\eta_n := (\varphi - \varepsilon\, \psi)^+ = (\varphi_n - \varepsilon\, \psi) \vee 0$$

é decrescente, $\eta_n \geq \eta_{n+1}$, e, para todo $\varepsilon > 0$, satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n(x) = 0,$$

pra todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, aplicando o Teorema da Continuidade, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \eta_n \, dx = 0.$$

Agora, como

$$\varphi_n = (\varphi_n - \varepsilon\, \psi_n) + \varepsilon\, \psi_n \leq \eta_n + \varepsilon\, \psi_n,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx &\leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b \eta_n \, dx + \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varepsilon\, \psi \, dx \\
&\leq \varepsilon \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \, dx = \varepsilon\, M.
\end{aligned}$$

Como ε é arbitrário segue o resultado. ■

7.3 COROLÁRIO.

Seja ψ uma função em escada e suponhamos que $\sum_n \varphi_n$ seja uma série de funções em escada não negativas, tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \geq \psi, \qquad q.s.$$

Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx \geq \int_a^b \psi \, dx.$$

Demonstração. Se $\sum_n \int_a^b \varphi_n \, dx$ diverge, a desigualdade é imediata. Suponhamos então que $\sum_n \int_a^b \varphi_n \, dx < \infty$. A sequência (η_n) de funções em escada, definidas por

$$\eta_n := (\psi - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k)^+$$

é decrescente e satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0, \qquad q.s.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \eta_n \, dx = 0.$$

Como

$$\psi = (\psi - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \leq \eta_n + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi \, dx \quad &\leq \quad \int_a^b \eta_n \, dx + \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \varphi_k \, dx \\ &\leq \quad \int_a^b \eta_n \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos a assertiva do corolário. ■

7.4 TEOREMA.

Se (φ_n) é uma sequência de funções em escada, não-negativas, tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx < \infty,$$

então a série $\sum_n \varphi_n$ converge, quase sempre.

7.5 COROLÁRIO.

Seja $\sum_n \varphi_n$ uma série de funções em escada tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = 0$, q.s. Então, se a série $\sum_n \int_a^b |\varphi_n|\, dx$ convergir, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx = 0.$$

Demonstração. A série $\sum_n |\varphi_n|$ converge q.s. Como $\varphi_n^+ \leq |\varphi_n|$ e $\varphi_n^- \leq |\varphi_n|$, segue que $\sum_n \varphi_n^+$ e $\sum_n \varphi_n^-$ também convergem q.s. Além disso,

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^-, \qquad q.s.$$

Logo, para cada m,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^+ \geq \sum_{n=1}^{m} \varphi_n^-, \qquad q.s.$$

Pelo Corolário anterior, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^+ \, dx \geq \sum_{n=1}^{m} \int_a^b \varphi_n^- \, dx,$$

Agora, da hipótese e da definição de φ_n^+ e φ_n^- temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^+ \, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n| \, dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^- \, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n| \, dx.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^+ \, dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^- \, dx.$$

Trocando os papeis de φ_n^+ e φ_n^- vemos que vale também a desigualdade oposta. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^+ \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^- \, dx,$$

o que implica

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^+ \, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^- \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx.$$

8 Funções Integráveis

8.1

Sejam $\sum_n \varphi_n$ e $\sum_n \psi_n$ séries de funções em escada convergentes q.s. e tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x),$$

para quase todo $x \in [a,b]$. Suponhamos, além disso, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n|\, dx < \infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\psi_n|\, dx < \infty.$$

Nestas condições temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \psi_n\, dx.$$

De fato, por um lado $\sum_n(\varphi_n - \psi_n)$ converge q.s. para zero. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n - \psi_n|\, dx &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\int_a^b |\varphi_n|\, dx + \int_a^b |\psi_n|\, dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n|\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\psi_n|\, dx < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, usando o Corolário 4.5, podemos concluir que

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (\varphi_n - \psi_n)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \psi_n\, dx,$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \psi_n\, dx.$$

Esta observação mostra que a seguinte definição é válida.

8.2 DEFINIÇÃO.

Uma função f, definida em $[a,b]$, é **integrável** se existe uma série $\sum_n \varphi_n$ de funções em escada tais que

I1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, p.q.t. x;

I2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n|\, dx < \infty$.

A integral de f é então definida por

$$\int_a^b f\, dx := \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx.$$

8.3 LEMA.

Seja (φ_n) uma sequência decrescente de funções em escada, $\varphi_n \geq \varphi_{n+1}$, tal que existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx = I.$$

Então, (φ_n) converge quase sempre e, se f é uma função tal que

$$f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n, \qquad q.s.$$

a função f será integrável e

$$\int_a^b f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx = I.$$

Demonstração. Seja E um conjunto nulo fora do qual (φ_n) converge. Definimos

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x), & x \notin E, \\ 0, & x \in E. \end{cases}$$

Podemos definir uma série $\sum_n \psi_n$, que converge em todos os pontos de $[a,b]$, fazendo

$$\psi_1 := \varphi_1, \qquad \psi_n := \varphi_n - \varphi_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Vamos ter

$$\sum_{n=1}^{m} \psi_n = \varphi_m.$$

Agora, como

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} \int_a^b |\psi_n|\, dx &= \int_a^b |\varphi_1|\, dx + \sum_{n=2}^{m} \int_a^b (\varphi_n - \varphi_{n-1})\, dx \\ &= \int_a^b |\varphi_1|\, dx + \int_a^b \varphi_m\, dx - \int_a^b \varphi_1\, dx \\ &\leq \int_a^b |\varphi_1|\, dx + I - \int_a^b \varphi_1\, dx, \end{aligned}$$

vemos que a série

$$\sum_n \int_a^b |\psi_n|\, dx$$

converge. Logo, f é integrável e

$$\int_a^b f\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \psi_n\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx = I,$$

o que demonstra o Lema. ■

Vamos agora apresentar uma caracterização das funções integráveis usando sequências.

8.4 TEOREMA.

Uma função f, definida em $[a,b]$, é integrável se e somente se existe uma sequência de funções em escada ,$\{\varphi_n(x)\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x) \quad p.q.t.\ \ x,$$

e

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_a^b |\psi_n - \psi_m|\, dx = 0.$$

Neste caso

$$\int_a^b f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n\, dx.$$

Demonstração. Suponhamos que f seja integrável. Então existe uma série $\sum_n \varphi_n$, de funções em escada que converge para f, quase sempre, e tem a propriedade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_n|\, dx < \infty.$$

Definimos

$$\psi_n := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k.$$

Desta forma, vamos ter

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x),$$

para quase todo $x \in [a,b]$. Agora, para todo $m \geq n$, resulta

$$\int_a^b |\psi_n - \psi_m|\, dx = \int_a^b |\sum_{k=n+1}^{m} \varphi_k|\, dx \leq \sum_{k=n+1}^{m} \int_a^b |\varphi_k|\, dx.$$

Pela hipótese e o Critério de Cauchy segue que

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_a^b |\psi_n - \psi_m|\, dx = 0.$$

Recíprocamente, suponhamos que exista uma sequência (ψ_n), de funções em escada, que converge para f quase sempre e satisfaz

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_a^b |\psi_n - \psi_m|\, dx = 0.$$

Vamos mostrar que existe uma subsequência $(\psi_{n(k)})$ tal que

$$\int_a^b |\psi_{n(k)} - \psi_m|\, dx \le \frac{1}{2^k},$$

para $m \ge n(k)$. Vamos escolher as funções em escada $\psi_{n(k)}$ por indução. Por hipótese, existe $n(1) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_a^b |\psi_{n(1)} - \psi_m|\, dx \le \frac{1}{2^1},$$

para todo $m \ge n(1)$. Se $\psi_{n(k)}$ foi determinada, escolhemos $n(k+1) > n(k)$ de modo que

$$\int_a^b |\psi_{n(k+1)} - \psi_m|\, dx < \frac{1}{2^{k+1}},$$

para $m \ge n(k+1)$. A subsequência $(\psi_{n(k)})$ tem então a propriedade requerida.

Vamos, agora, construir uma série $\sum_n \varphi_n$ que converge, quase sempre, para f. Definimos

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \psi_{n(1)} & \text{se} \quad k = 1, \\ \psi_{n(k)} - \psi_{n(k+1)} & \text{se} \quad k \ge 2. \end{cases}$$

Desta forma

$$\sum_{k=1}^m \varphi_k = \psi_{n(1)} + \sum_{k=2}^m (\psi_{n(k)} - \psi_{n(k-1)}) = \psi_{n(m)},$$

e portanto $\sum_k \varphi_k$ converge para f, quase sempre. Além disso

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_a^b |\varphi_n(1)|\, dx &= \int_a^b |\psi_{k(1)}|\, dx + \sum_{k=2}^m \int_a^b |\psi_{n(k)} - \psi_{n(k-1)}|\, dx \\ &\le \int_a^b |\psi_{n(1)}|\, dx + \sum_{k=2}^m \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\le \int_a^b |\psi_{n(1)}|\, dx + 1. \end{aligned}$$

Logo, a série $\sum_k \int_a^b |\varphi_k|\,dx$ converge e demonstra que f é uma função integrável. Além disso, temos

$$\int_a^b f\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_k\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_{n(m)}\,dx.$$

A sequência $(\int_a^b \psi_n\,dx)$ é uma sequência de Cauchy porque

$$|\int_a^b \psi_n\,dx - \int_a^b \psi_m\,dx| \leq \int_a^b |\psi_n - \psi_m|\,dx;$$

portanto é convergente e deve convergir para o mesmo limite que sua subsequência $(\int_a^b \psi_{n(k)}\,dx)$, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

A demonstração está completa. ■

8.5 COROLÁRIO.

Seja f uma função integrável e g uma função tal que $f = g$, quase sempre. Então, g é integrável e

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx.$$

8.6 PROPOSIÇÃO.

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma funcão integrável. Então $f(x)\varphi(x)$ será integrável se
i) $\varphi \in S\{[a,b]\}$ ou
ii) φ definida e contínua em $[a,b]$

Demonstração.
Por hipótese, existe $\psi_n(x) \in S\{[a,b]\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x)$ $\quad (p.q.t.$x)
i) Se $\varphi(x) \in S\{a,b\}$, existe uma constante M, tal que $\varphi(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n > n_0$, então $|\psi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, portanto,

$$|\psi_n(x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x)| = |\varphi(x)||\psi_n(x) - f(x)| < |M||\psi_n(x) - f(x)| < |M|\varepsilon.$$

A demonstração de ii) é análoga à anterior. ■

9 Propriedades Básicas da Integral

Vamos denotar por
$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([a,b])$$
a classe de todas as funções integráveis definidas em $[a,b]$.

9.1 TEOREMA.

A classe das funções integráveis tem a propriedade de linearidade:
$$f, g \in \mathcal{L}^1 \ \text{ e } \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha\, f + \beta\, g \in \mathcal{L}^1.$$

Além disso, neste caso
$$\int_a^b (\alpha\, f + \beta\, g)\, dx = \alpha \int_a^b f\, dx + \beta \int_a^b g\, dx.$$

Demonstração. Pela hipótese de f e g serem integráveis, temos:
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \ (p.q.t.\ x) \ e \ \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = g(x) \ (p.q.t.\ x)$$
Daqui, segue que:
$$\begin{aligned} \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx &= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\ dx + \beta \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \alpha\varphi_n(x) + \beta\psi_n(x)\ dx. \end{aligned}$$
Mas,
$$\lim_{n\to\infty} \alpha\varphi_n(x) + \beta\psi_n(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \ (p.q.t.\ x)$$
Deste modo, resulta que:
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \alpha\varphi_n(x) + \beta\psi_n(x)\ dx = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$$

9.2 LEMA.

Se f é uma função integrável então $|f|$ também é integrável.

Demonstração. Como f é integrável, existe uma sequência (ψ_n) de função em escada que converge quase sempre para a função f e tal que
$$\lim_{n,m\to\infty} \int_a^b |\psi_n - \psi_m|\, dx = 0.$$

É claro que a sequência $(|\psi_n|)$ converge para $|f|$, quase sempre, e como

$$||\psi_n| - |\psi_m|| \leq |\psi_n - \psi_m|,$$

segue que

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_a^b ||\psi_n| - |\psi_m|| \, dx = 0.$$

Portanto, $|f|$ é uma função integrável e

$$\int_a^b |f| \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |\psi_n| \, dx \geq 0.$$

o que demonstra a assertiva. ■

9.3 TEOREMA.

Se $f,\, g \in \mathcal{L}^1$ então $f \vee g \in \mathcal{L}^1$ e $f \wedge g \in \mathcal{L}^1$. Em particular, se $f \in \mathcal{L}^1$ então f^+ e f^- também pertencem a $\mathcal{L}^1$.

Demonstração. A assertiva segue das identidades

$$f \vee g = \frac{1}{2}[(f+g) + |f-g|],$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}[(f+g) - |f-g|],$$

$$f^+ = f \vee 0 \qquad \text{e} \qquad f^- = -f \wedge 0.$$

9.4 COROLÁRIO.

Se $f \in \mathcal{L}^1$ então

$$|\int_a^b f \, dx| \leq \int_a^b |f| \, dx.$$

Além disso, se g também é uma função integrável e $g \leq f$, então

$$\int_a^b g \, dx \leq \int_a^b f \; dx.$$

10 Referências

[1] E. Asplund, L. Bungart, A First Course In Integration.
HOLT,RINEHART and WINSTON, 1966.

[2] D. L. Fernandez, Elementos de Análise.Parte III: Integração e Análise de Fourier. IMECC - UNICAMP, 2004.

[3] C.S. Hönig, A Integral de Lebesgue e suas Aplicações.
IMPA, 1977.