Projeto Supervisionado - MS777

# Um Estudo sobre o Problema do Carteiro Chinês

Orientadora: Profa. Dr. Maria Aparecida Diniz Ehrhardt
Aluna: Fernanda Bia Peteam
RA 102240

DMA - IMECC - UNICAMP

2ºS 2012

# 1 Resumo

O desenvolvimento do projeto foi baseado, principalmente, no estudo da Teoria dos Grafos, com foco nas ferramentas necessárias para o estudo do Problema do Carteiro Chinês (PCC) não-orientado. A Teoria dos Grafos é uma abordagem matemática para problemas que envolvem relações (representada por arestas) entre objetos discretos (representados por vértices) de um conjunto de qualquer tipo, sendo aplicada principalmente em problemas de roteamento, como o Problema do Caminho Mínimo, do Caixeiro Viajante e do Carteiro Chinês. O PCC consiste em minimizar a distância total percorrida por um carteiro em seu roteiro de entregas e procurar o caminho mais curto de tal forma que o carteiro passe por todas as arestas do grafo que representa o problema, onde as arestas representam as ruas e os vértices representam os cruzamentos e o caminho ótimo ocorre quando o grafo é euleriano, isto é, quando o caminho passa exatamente uma vez por cada aresta do grafo.

# 2 Introdução

A Teoria dos Grafos se originou no século XVIII a partir dos estudos do matemático suíço Leonhard Euler a partir do problema das sete pontes de Königsberg, que buscava um caminho fechado que passasse exatamente uma vez por cada uma das sete pontes do rio Pregel que ligavam duas ilhas às margens da cidade de Königsberg, na Rússia.

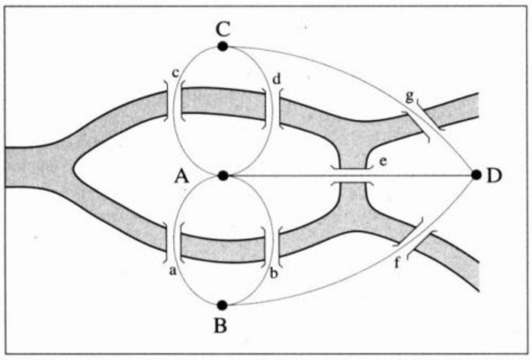


Figura 1: Sete pontes de Königsberg.

O PCC está diretamente ligado aos estudos de Euler relativos ao problema das sete pontes. Em 1962, o matemático Kwan Mei-Ko propôs em resolver um problema semelhante para os carteiros da sua cidade, interessando-se não só em como definir o caminho, de forma a visitar todas as casas que deveria, mas também qual o melhor percurso, com menor distância possível. Kwan Mei-Ko definiu o problema da seguinte maneira: *"Um carteiro tem que cobrir seu local de trabalho, antes de retornar ao posto. O problema é encontrar a menor distância de percurso para o carteiro."* [4, 5]. De fato, o Problema do Carteiro Chinês consiste em encontrar o caminho mais curto, ou circuito fechado, que visite cada aresta de um grafo (conexo) não-direcionado. Quando o grafo possui um circuito euleriano (um caminho fechado que contém cada aresta do grafo exatamente uma vez), este circuito é uma solução ótima do problema.

Observamos então que estudar detalhadamente o Problema do Carteiro Chinês exige que tenhamos conhecimento de Teoria dos Grafos, o que é também um dos objetivos deste projeto.

É importante conhecermos a terminologia e alguns resultados importantes referentes a grafos, sendo um tema rico em aplicações, em particular o Problema do Carteiro Chinês.

# 3 Desenvolvimento

Um grafo $G = (V, E)$ é formado por um conjunto finito e não vazio de vértices $V = \{1, 2, \cdots, m\}$ e por um conjunto finito de pares não ordenados que representa as arestas $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, com $e_k = (i, j)$ para $i, j \in V$ representando a aresta que liga o vértice $i$ ao vértice $j$, que são chamados **extremos** de $e_k$. A **aresta** $e_k$ é dita **incidente** aos vértices $i$ e $j$. A quantidade de arestas incidentes a um vértice é chamado de **grau do vértice**. O **tamanho** de um grafo é dado por $|V| + |E|$.

Dois **vértices** são **adjacentes** se são extremos da mesma aresta e duas **arestas** são **adjacentes** se tem um vértice em comum. A **vizinhança de um vértice** $i$ é o conjunto de vértices adjacentes a $i$.

Um **laço** é uma aresta com extremos idênticos (caminho $C_1$ na Figura 2) e **arestas múltiplas** ou **paralelas** são duas ou mais arestas com os mesmos extremos (caminho $C_2$ na Figura 2).

**Grafo simples** é um grafo onde $e_i \neq e_j$ para $i \neq j$, ou seja, um grafo sem laços e sem arestas múltiplas. Um **grafo** é **completo** se possui todas as possibilidades de arestas.

Se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E(V')$, então $G' = (V', E')$ é dito subgrafo de $G = (V, E)$ e $G'$ é um **subgrafo gerador** se $V' = V$.

Um **grafo** é **conexo** se, para todo par de vértices $u$,$v \in G$, existe um caminho de $u$ a $v$ em $G$. Quando um grafo não é conexo, podemos particioná-lo em subgrafos conexos maximais chamados **componentes conexos**. Todo vértice de $G$ pertence a algum componente conexo e componentes conexos diferentes de $G$ não têm vértice em comum (do contrário sua união seria um subgrafo conexo contendo ambos). Em outras palavras, todo vértice de $G$ está contido em um único componente conexo.

Um **caminho** é uma sequência de vértices $v_0, \cdots, v_k$ tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $i = 1, \cdots, k$ e todos os vértices são distintos. Um **passeio** é, também, uma sequência de vértices, contudo, pode passar através do mesmo vértice diversas vezes. Tanto no caminho quanto no passeio o vértice $v_0$ é dito vértice de origem e $v_k$ é dito vértice de destino e os outros vértices são ditos vértices intermediários. Também é possível representar caminho e passeio pela sequência de arestas $e_1, ..., e_k$ onde $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ para $i = 1, \cdots, k$. Um **caminho** é dito **fechado** se $v_0 = v_k$, $k \geq 3$ (caminhos $C_3$, $C_4$ e $C_5$ na Figura 2), o mesmo vale para o passeio. Se um grafo não possui um caminho ou um passeio fechado, ele é dito **acíclico** (Figura 3).

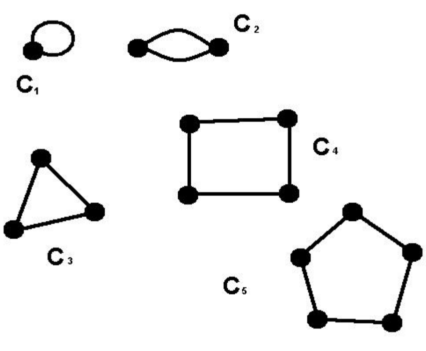


Figura 2: Grafos cíclicos.

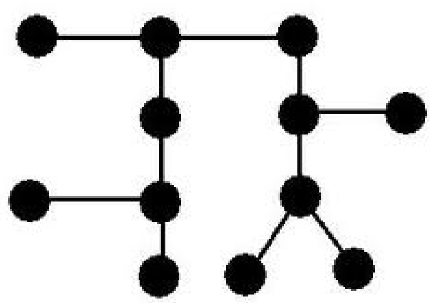

Figura 3: Grafo acíclico.

O **tamanho** de um caminho ou passeio é o número de arestas no caminho ou passeio. Um **caminho** ou **passeio** é dito **par** ou **ímpar** se o seu tamanho é par ou ímpar, respectivamente. **Grafo bipartido** é um grafo que admite uma bipartição $(A, B)$ do conjunto de vértices tal que toda aresta tem um extremo em $A$ e outro em $B$. Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclos ímpares.

***Com relação ao grau dos vértices*** :

**Teorema 1**: Em todo grafo, o número de vértices com grau ímpar é par. [7]
**Teorema 2**: A soma dos graus de todos os vértices em um grafo é duas vezes o número de arestas. [7]

Se dois vértices podem ser conectados por um passeio, então eles também podem ser conectados por um caminho. Isso pode ser visto da seguinte maneira: suponha dois vértices $a$ e $b$ que possam ser conectados por um caminho $P$ e um vértice $c$ que possa ser conectado ao vértice $b$ por um caminho $Q$. Podemos, então, ter um caminho conectando o vértice $a$ ao vértice $c$, mas não apenas ligando os caminhos $P$ e $Q$ pois esses caminhos podem se cruzar. Daí, devemos seguir o caminho $P$ até o primeiro vértice $d$ em comum com $Q$ e então seguir o caminho $Q$ até o vértice $c$. [7]

## 3.1 Grafo Euleriano

A solução para o problema das sete pontes de Königsberg foi dada por Euler em um artigo publicado em 1736, no qual Euler prova que é impossível encontrar um caminho fechado de modo que atravesse toda ponte exatamente uma vez, pois sempre se depara com o problema de entrar em alguma ilha por alguma ponte ainda não utilizada mas não conseguir sair, pois todas as pontes já foram passadas. A partir daí, procurou-se encontrar qual o tipo de grafo que possibilitaria encontrar tal caminho, isto é, um caminho fechado que passe por todas as arestas exatamente uma vez, conhecido como "caminho de Euler". Mais formalmente, um **caminho euleriano** é um caminho que passa exatamente uma vez por cada aresta do grafo, a definição para **passeio euleriano** é equivalente, isto é, um passeio que passa exatamente uma vez por cada aresta do grafo.

Um **grafo** $G$ é dito **euleriano** se existe um caminho fechado (circuito) em $G$ contendo cada aresta apenas uma vez e cada vértice pelo menos uma vez (**circuito euleriano**) [5]. Um grafo que não contém um circuito euleriano, mas contém um caminho euleriano será denominado **grafo semi-euleriano**. Um caminho é, por definição, sempre conexo. Como um circuito euleriano contém todas as arestas de um grafo, um grafo euleriano é sempre conexo, com exceção de vértices isolados.

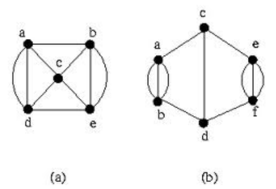


Figura 4: (a) Grafo euleriano (b) Grafo semi-euleriano.

**Teorema 3** [7]:

**(a)** Se um grafo conexo tem mais que dois vértices com grau ímpar, então ele não tem um passeio euleriano.

**(b)** Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano tem que começar em um desses vértices e terminar no outro.

**(c)** Se um grafo conexo não tem vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano é fechado.

A última asserção é condição necessária e suficiente para que um grafo $G$ conexo não orientado seja euleriano, ou seja, um grafo é euleriano se, e somente se, todo vértice possui grau par **(Teorema de Euler)**.

## 3.2 O Problema do Carteiro Chinês

O PCC busca um caminho tal que todas as ruas devem ser visitadas e que o caminho seja mínimo (não que passe, necessariamente, exatamente uma vez por cada rua do percurso). O estudo de grafos eulerianos é importante, pois nos dá o melhor resultado possível para um grafo.

Em 1995, Eiselt et al propuseram, em dois artigos [1, 2], divisões do PCC, baseadas essencialmente na ampliação do conjunto de arestas de um grafo $G = (V, L)$, onde $V$ representa o conjunto de vértices e $L$ o conjunto de arestas, para uma dupla de conjuntos $L = (E, A)$, onde $E$ é o conjunto das arestas não orientadas (elos) entre vértices de $G$ e $A$ o conjunto das arestas orientadas (arcos) entre vértices de $G$. Nesse problema as ruas são representadas pelas arestas (orientadas ou não) e os cruzamentos das ruas são representados pelos vértices. Estes trabalhos se constituíram no estado da arte em algoritmos sobre o assunto.

Nesse estudo trataremos, apenas, do caso de grafos não-orientados.

Para o problema de grafos não-orientados a melhor solução possível seria um circuito euleriano. Vamos analisar a prova do Teorema de Euler, que nos sugere um algoritmo para identificar um caminho euleriano.

(i) $G$ grafo euleriano $\Rightarrow$ todos os vértices de $G$ possuem grau par

Se o grafo $G$ é euleriano todas as arestas são percorridas somente uma vez e o vértice de origem é o mesmo que o de destino. Logo, para toda aresta que entra em cada vértice $v_i \in V$ há uma aresta que sai, o que resulta que o grau de todos os vértices é par.

(ii) Todos os vértices de $G$ possuem grau par $\Rightarrow$ $G$ é um grafo euleriano (por indução)

Como todo vértice possui grau par podemos, na construção de um caminho, entrar e sair por arestas distintas e não visitadas. Temos que, para um grafo conexo com todos os vértices de grau par, qualquer par de vértices faz parte de um caminho fechado. Portanto, podemos sair de um vértice $v$ e retornar a ele sem repetição de arestas. Escolhendo um caminho fechado arbitrário passando por $v$, se este contém todas as arestas de $G$

então temos um grafo euleriano. Caso contrário, retiramos as arestas pertencentes a esse caminho, o subgrafo resultante possuirá todos os vértices com grau par e algum desses vértices pertencerá ao caminho removido (pois o grafo é conexo). Assim, podemos partir desse vértice e encontrar outro caminho arbitrário fechado. Se este caminho percorrer todo o subgrafo temos que o subgrafo é euleriano e como dois caminhos fechado que possuem um vértice em comum podem formar um único caminho fechado, esse caminho resultante seria euleriano. Caso contrário, retomaríamos o mesmo processo, pegando um outro subgrafo e gerando outro caminho fechado, até percorrer todo o grafo (indução). Assim obteríamos, necessariamente, um circuito único que contém todas as arestas de G. Logo, o grafo é euleriano.

Essa prova por indução nos sugere um algoritmo. Podemos partir de um vértice $v$ qualquer do grafo e escolher arbitrariamente uma aresta nunca visitada a cada vértice que é visitado até voltar ao vértice de origem, até passar por todas as arestas incidentes de $v$. Como ainda existem arestas não visitadas, partimos de algum outro vértice desse caminho fechado e recomeçamos o processo até visitar todas as arestas do grafo e depois combinamos os caminhos fechados, de forma a cobrir todo o grafo. Temos, então um caminho fechado euleriano (circuito euleriano). Esse algoritmo é conhecido como Algoritmo de Hierholzer.

Esse algoritmo serve para grafos eulerianos, ou seja, grafos conexos onde todos os vértices possuem grau par. No entanto, ocorrem situações onde algum vértice ou algum conjunto de vértices pode ter grau ímpar, nesses casos, o caminho passará mais de uma vez por alguma aresta no caminho. Para contornar esse problema, podemos transformar o grafo não-euleriano em um grafo euleriano, acrescentando arestas artificiais ao grafo original de forma que transformem todos os vértices de grau ímpar em vértices de grau par. Tais arestas representam os eventuais percursos repetidos de custo mínimo entre pares de vértices de grau ímpar. O algoritmo desse método é chamado de algoritmo de emparelhamento (*Matching*) e sua funcionalidade está ligada ao *Teorema 1*, que diz que o número de vértices de grau ímpar é par.

O algoritmo busca no grafo a melhor maneira de conectar os vértices de grau ímpar através de novas arestas, ou seja, busca a menor aresta que liga cada par de vértices de grau ímpar. No fim do algoritmo, o grafo é euleriano e, então, pode ser determinado um circuito euleriano que fornece a rota ótima do carteiro.

Para esse problema, há os seguintes algoritmos mais conhecidos: ***Algoritmo de Edmonds e Johnson*** e o ***Algoritmo de Christofides***, há também um algoritmo guloso baseado no Algoritmo de Christofides.

No geral, para a resolução de um PCC não-orientado, partimos da análise de o grafo ser ou não euleriano, se for euleriano seguimos para o Algoritmo de Hierholzer, caso contrário partimos para algum dos algoritmos para grafos não eulerianos.

# 4 Referências bibliográficas


[1] H.A. Eiselt, M. Gendrau, G. Laporte, Arc routing problems, part 1: the chinese postman problem. Operations Research, 43 (2) pp. 231–242, 1995.

[2] H.A. Eiselt, M. Gendrau, G. Laporte , Arc routing problems, part 2: the rural postman problem. Operations Research, 43 pp. 399–414, 1995.

[3] I. Gribkovskaia, O. Halskau, G. Laporte, The bridges of Königsberg – a historical perspective. Networks, 49 (3) pp. 199–203, 2007.

[4] M. Kwan, Graphic programming using odds and even points. Chinese Mathematics, 1 pp. 273–277, 1962.

[5] M.J. Negreiros Gomes, W. Coelho Jr., A. W. de Castro Palhano, E. Ferreira Coutinho, G. Alves de Castro, F.J. Negreiros Gomes, G. Cutini Barcellos, B. Fernandes Rezende, L. W. Lessa Pereira, O problema do carteiro chinês, algoritmos exatos e um ambiente MVI para análise de suas instâncias: sistema XNÊS. Pesquisa Operacional, 29 (2) pp. 323–363, 2009.

[6] G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization. Jonh Wiley and Sons, 1999.

[7]L. Lovász, J. Pelikán e K. Vestergombi, Matemática Discreta, SBM, pp 121-135, 2005

[8] Prof. Dr. Ademir Constantino, Departamento de Informática, Universidade Estadual de Maringá, Notas de aula: Grafos Eulerianos e o Problema do Carteiro Chinês.