

MS877 - Projeto Supervisionado II
Departamento de Matemática Aplicada - IMECC

Implementando o Problema de Corte de
Materiais na Indústria
Parte II

Aluno:
Matheus Pereira Garuti Mauricio

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti

Sumário

1. Problema Considerado	3
2. Algoritmo Gerador de Padrões de Corte	6
3. Resultados Obtidos	8
4. Discussão e Considerações Finais	15
5. Bibliografia	16

1. Problema Considerado

Conforme o abordado anteriormente no primeiro relatório, estamos interessados em encontrar uma solução ótima global para o Problema de Corte de Materiais em seu modelo utilizando cortes guilhotinados em duas dimensões. Para isso, apresentamos todo o modelo, com suas diversas variáveis de decisão e parâmetros, juntamente com a função objetivo e as restrições.

Dessa forma, podemos resumir todo o nosso modelo no seguinte Problema:

$$\max_{Az, Aop, Azao_r, L_r, Lzn_{j,r}, w_i, Y_r, Yz_{j,r}, M_r, Mz_{j,r}} \left\{ \mathbf{C} \cdot \mathbf{Az} + \mathbf{Cz} \cdot \mathbf{Aop} \right.$$

$$- \sum_{r=1}^R \left(\mathbf{Czm} \cdot \mathbf{Azao}_r + \frac{\mathbf{Cmaq}}{\mathbf{v}_m} \cdot \mathbf{L}_r + \mathbf{CL}_r \cdot \mathbf{Y}_r \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{j=1}^{J_r} [\mathbf{ctf}_{j,r} \cdot \mathbf{Yz}_{j,r} + \mathbf{ctfl}_{j,r} \cdot \mathbf{Mz}_{j,r}] \right) \right\}$$

Sujeito à

$$\left\{ \sum_{r=1}^3 \mathbf{Azao}_r \right\} - \mathbf{Aop} - \mathbf{Atl} - \mathbf{Az} = \mathbf{0}$$

$$\left\{ \sum_{r=1}^3 \sum_{j=1}^{J_r} \left(\sum_{i=1}^I b_i \mathbf{Nz}_{i,j,r} \right) \mathbf{Lzn}_{j,r} \right\} - \mathbf{Aop} - \mathbf{Az} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Aop} + \mathbf{Atl} - \mathbf{Fzn} \mathbf{Ao} \leq \mathbf{0}$$

$$Aza_o_r - Bmax_r L_r = 0$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{J_r} Lzn_{j,r} \right\} + D_r - L_r = 0$$

$$Mz_{j,r} - H_{j,r} Yz_{j,r} \leq 0$$

$$-(1 + Fzn) Aomax Y_r + Aza_o_r \leq 0$$

$$\sum_{r=1}^R Y_r \geq 1$$

$$Lznmin_{j,r} Mz_{j,r} \leq Lz_{j,r} \leq Lznmax_{j,r} Mz_{j,r}$$

$$Lmin_r M_r \leq L_r \leq Lmax_r M_r$$

$$\frac{1}{A_w b_i} w_i + \frac{1}{A_w b_i} wop_i + \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{J_r} Lz_{j,r} Nz_{i,j,r} = 0$$

$$Az - \sum_{i=1}^I \frac{1}{A_w} w_i = 0$$

$$Mzl_{j,r} = \sum_{k=1}^{K_r} 2^{k-1} \cdot b_{j,r,k}$$

$$M_r + Mmax_r b_{j,r,k} - s_{j,r,k} \leq Mmax_r$$

$$s_{j,r,k} - M_r \leq 0$$

$$s_{j,r,k} - Mmax_r b_{j,r,k} \leq 0$$

$$-\mathbf{Mz}_{j,r} + \sum_{k=1}^{K_r} 2^{k-1} \cdot \mathbf{s}_{j,r,k} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{j=1}^{J_r} \mathbf{Lz}_{j,r} - \sum_{j=1}^{J_r} \mathbf{Lzmax}_{j,r} \mathbf{Mz}_{j,r} \leq \mathbf{0}$$

$$\sum_{j=1}^{J_r} \mathbf{Lzmin}_{j,r} \mathbf{Mz}_{j,r} - \mathbf{L}_r \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{L}_r - \mathbf{Mmax}_r \mathbf{Lmax}_r \sum_{j=1}^{J_r} \mathbf{Yz}_{j,r} \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Azaomin}_r \leq \mathbf{Azao}_r \leq \mathbf{Azaomax}_r$$

$$\mathbf{wmin}_i \leq \mathbf{w}_i \leq \mathbf{wmax}_i$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{Mz}_{j,r} \leq \mathbf{H}_{j,r}$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{M}_r \leq \mathbf{Mmax}_r$$

$$\mathbf{Mz}_{j,r}, \mathbf{M}_r \in \mathbb{Z}^+$$

$$\mathbf{Y}_r, \mathbf{Yz}_{j,r}, \mathbf{b}_{j,r,k} \in \{0,1\}$$

$$\mathbf{Az}, \mathbf{Aop}, \mathbf{Azao}_r, \mathbf{L}_r, \mathbf{Lzn}_{j,r}, \mathbf{w}_i, \mathbf{s}_{j,r,k}, \mathbf{D}_r \in \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{i} \in \{1,2, \dots, I\} \quad \mathbf{j} \in \{1,2, \dots, J_r\} \quad \mathbf{k} \in \{1,2, \dots, K\} \quad \mathbf{r} \in \{1,2,3\}$$

Percebe-se claramente que a não-linearidade do modelo ocorre quando fazemos o produto $\mathbf{Nz}_{i,j,r}$ por $\mathbf{Lzn}_{j,r}$, fazendo com que ocorram termos bilineares. A forma encontrada para driblar essa dificuldade, é encontrarmos um modo de transformar $\mathbf{Nz}_{i,j,r}$ em um dado de entrada, ou seja, o esquema dos itens cortados em um certo padrão utilizando-se um certo material bruto é gerado antes da execução do problema no AIMMS.

2. Algoritmo Gerador de Padrões de Corte

Existem diversos modos para contornar esse problema como heurísticas de aproximação ou até mesmo transformações lineares sobre os termos envolvidos na não-linearidade do modelo. Porém, pelo conhecimento prévio do aluno na área de programação em C++, resolveu-se utilizar um algoritmo de geração de padrões de corte. Ele funciona de forma que, dados o número de produtos, o número máximo de itens cortados em um padrão, a perda máxima em relação à largura permitida e a lista das larguras dos itens, ele gera como resposta as diferentes configurações de padrões possíveis, de forma que se torna fácil e eficiente a posterior utilização como dados de entrada para o solver.

A seguir apresentaremos o procedimento implementado, levando em consideração que b_i representa a largura do item i , $n_{i,j} = Nz_{i,j,r}$ basta que fixemos o valor de r , repetindo o processo para os três tipos diferentes de material bruto, também considerando B_{max} como o valor máximo de largura do rolo pra um do tipo fixado. Dessa forma, se permitirmos uma perda em largura de Δ_{max} , podemos escrever o seguinte procedimento:

1. Inicialize $j = 0$, $n_j = \mathbf{0} \forall i$

2. Defina $j = j + 1$, $n_j = n_{j-1}$ (n_j um vetor com i fixado)

3. Defina $B_0 = 0$, $N_0 = 0$

Para cada i faça

$$N_i = N_{i-1} + n_i \quad (n_i \text{ vetor com } j \text{ fixado})$$

$$B_i = B_{i-1} + b_i n_i$$

$$\hat{N}_i = \min \{N_{max} - N_{i-1}, \max\{0, \lfloor (B_{max} - B_{i-1}) / b_i \rfloor\}\}$$

Fim das atribuições

Defina $i = I$

4. Se $n_i \geq \hat{N}_i$ vá para o Passo 5
 - $n_i = n_i + 1$
 - Se $\mathbf{b}^t \mathbf{n}_j < B_{max} - \Delta_{max}$ então
 - vá para o Passo 3
 - Senão
 - vá para o Passo 2

5. Defina $n_i = 0, i = i + 1$
 - Se $i > 0$ então
 - vá para o Passo 4
 - Senão
 - Defina $J = j - 1$
 - Realize a impressão dos padrões gerados
 - Término do procedimento

O algoritmo gera os padrões de corte como um dado de entrada imediato, o que torna o problema linear e elimina a dificuldade que encontramos ao trabalhar com o modelo apresentado. Entretanto, existem algumas ressalvas, se o número de padrões de corte possíveis de serem gerados for muito elevado, não existirá uma razão muito boa para se usar esse método, porém, se o número de padrões é um valor razoável, o problema tem seu tamanho consideravelmente diminuído.

Após utilizarmos esse algoritmo para cada um dos exemplos considerados, pudemos gerar os padrões de corte e posteriormente resolver todos utilizando o AIMMS. A seguir apresentaremos os Resultados Obtidos e finalmente, as Conclusões Finais.

3. Resultados Obtidos

O modelo apresentado na seção anterior foi implementado no AIMMS com sucesso durante os últimos meses de vigência da bolsa, e com base em exemplos retirados da literatura que remetem ao cotidiano de uma empresa de corte, pudemos obter os resultados descritos a seguir.

Notemos que, como já mencionado anteriormente, utilizaremos rolos de material bruto com três larguras diferentes, ou seja, estaremos fixando o valor para R , sendo as larguras pré-especificadas $B_1=1000$ mm, $B_2=1250$ mm e $B_3=1500$ mm. Podemos também apresentar de início os valores utilizados para os custos associados, todos sendo considerados em euros por metro quadrado, e outros dados de entrada, custos relacionados ao materiais bruto e itens produzidos $C = 7.85$ EUR/m², $C_z = 0$ EUR/m², $C_{zm} = 3.925$ EUR/m² e $C_{tl} = 0.785$ EUR/m², sendo este último o custo da área das aparas perdidas na produção dos itens listados.

O custo associado ao uso da máquina C_m é de 500 EUR/h, enquanto a velocidade de cada máquina de corte v_m é de 1500 m/h, e também, os custos para a troca de padrões de corte e repetições de um mesmo padrão são, respectivamente, $ctf_{j,r} = 500$ EUR e $ctfl_{j,r} = 50$ EUR. Além disso, o parâmetro F_{zn} que regula a quantidade produzida em excesso e de material vale 0.2, ou seja, o material perdido ou em excesso deve ser no máximo 20% do total de material produzido.

Pela grande quantidade de parâmetros na produção, foi definido que todos os cortes verticais $L_{zn_{j,r}}$ feitos pela máquina devem ter comprimento entre 50 m e 200 m, ou seja, poderão ser cortados, em um certo padrão de corte, pedaços que respeitem esse tamanho pré-especificado. Além disso, o número máximo N_{max_r} de produtos cortados em um rolo de material bruto é 30, e os rolos de material bruto encomendados para a produção devem ter comprimento total L_r entre 500 m e 750 m. O peso por área de material A_w é o

mesmo utilizado nos exemplos do artigo [4] com valor de 7,85 Kg/m² (por se tratar de aço).

Antes de qualquer resultado ser apresentado, vale lembrar que todos os parâmetros citados acima são de pura e livre escolha do usuário do programa. O fato de estarmos tomando como base os dados pré-especificados não impede a implementação do modelo para outros tipos de materiais como madeira, vidro, papel, entre outros, com os dados de entrada completamente diferentes dos demonstrados. O critério utilizado para nossa escolha foi o poder de compararmos os tempos de resolução ao utilizarmos o software AIMMS com o tempo de execução encontrado em [4]. A seguir, resolveremos alguns exemplos, expondo os resultados da pesquisa:

Exemplo 1

A lista de materiais encomendados com suas larguras, pesos e limites de comprimento é apresentada a seguir na Tabela 1:

Tabela 1: Itens produzidos com suas larguras, pesos e limites de comprimento			
b(i)	w(i) [kg]	Lzmin(i) [m]	Lzmax(i) [m]
1250 mm	21000	1926	2355
1250 mm	4000	366	449
1250 mm	10000	917	1122
387 mm	20000	5925	7242

Os limites referentes ao peso do material produzido serão de 10%, ou seja, teremos $w_{min_i} = 0,9 w_i$ e $w_{max_i} = 1,1 w_i$. Além disso, os limites relacionados ao comprimento final do item produzido foram calculados com base nos pesos máximo e mínimo de material, todos esses dados de entrada podem ser escolhidos pelo usuário. Para esse exemplo, a rotina programada em C++ produziu os padrões de corte apresentados na Figura 1:

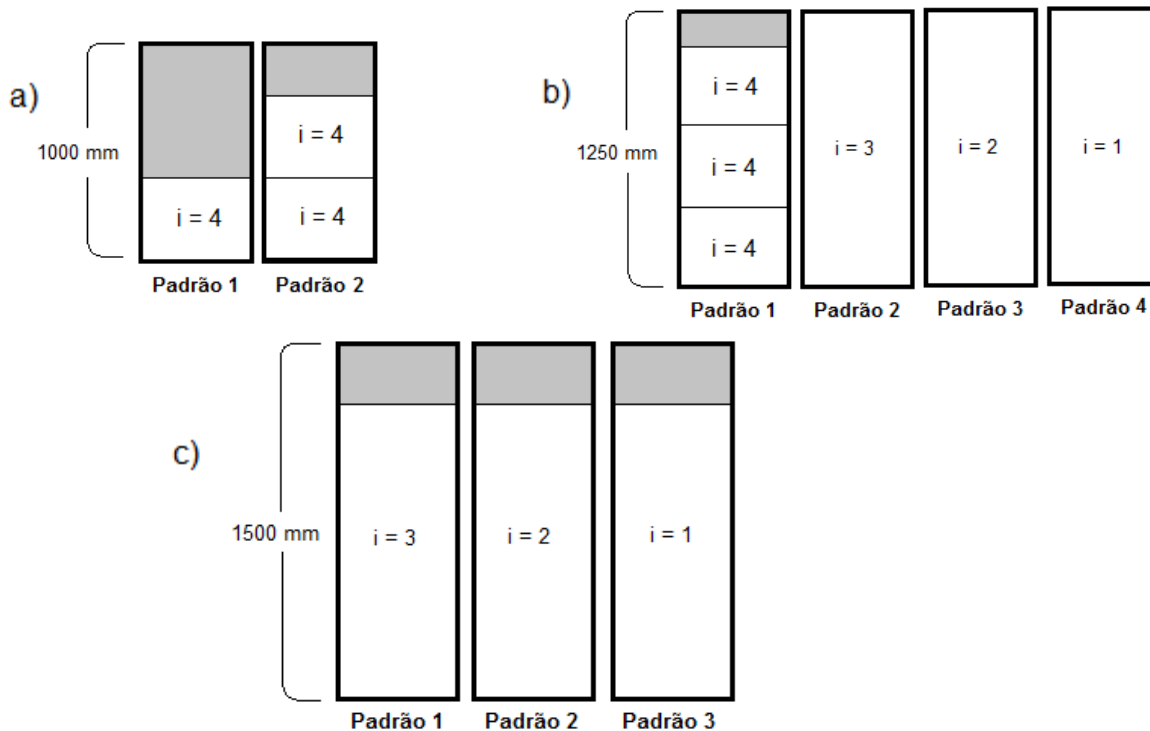


Figura 1: Padrões de corte gerados pela rotina programada em C++, cujos parâmetros são: a) $r = 1$, $B_1 = 1000$ mm e $\Delta = 1000$ mm; b) $r = 2$, $B_2 = 1250$ mm e $\Delta = 250$ mm; c) $r = 3$, $B_3 = 1500$ mm e $\Delta = 300$ mm. Os valores de Δ são parâmetros que representam o máximo de perda admissível nas aparas, em relação a largura, demonstrados pela região sombreada das figuras.

Utilizamos os padrões de corte acima como dados de entrada para obter a solução ótima no AIMMS, a qual será apresentada a seguir:

A solução ótima encontrada foi de 21383,32 EUR em um tempo médio de execução de 0,11 segundos.

Primeiramente, ele escolheu utilizar somente rolos de material bruto dos tipos $r = 2$ e $r = 3$. Para isso, rolos de material bruto foram repetidos $M(2) = 8$ e $M(3) = 1$ vezes, totalizando em comprimento $L(2) = 5889$ m e $L(3) = 500$ m. Isso significa que serão utilizados 8 rolos de material bruto do tipo 2 com $\frac{5889}{8} = 736,13$ m de extensão cada, e 1 rolo do tipo 3 com 500 m de extensão.

Para cada rolo de material bruto do tipo 2 de largura $B_2 = 1250$ mm, foram esquematizados os cortes da seguintes maneira:

- Dois cortes utilizando o Padrão 1, mostrado na Figura 1-b, com extensão de 150,87 m cada, produzindo 452,60 m de material do tipo $i = 4$. Como resultado, teremos um total de 905,22 m deste item por rolo.

- Um corte utilizando o Padrão 2, mostrado na Figura 1-b, com extensão de 140,13 m, produzindo este mesmo comprimento de material do tipo $i = 3$ por rolo.
- Dois cortes utilizando o Padrão 4, mostrado na Figura 1-b, com extensão de 147,13 m cada, produzindo material do tipo $i = 1$, resultando em 294,26 m deste item por rolo.

Observa-se que a soma do comprimento dos Padrões cortados, isto é, a extensão do Padrão multiplicado pelo número de vezes que este foi utilizado, resulta no comprimento total de cada um dos rolos de material bruto do tipo $r = 2$. Neste caso específico:

$$(2 \times 150,87 \text{ m}) + (140,13 \text{ m}) + (2 \times 147,13 \text{ m}) = 736,13 \quad \text{m} \quad (\text{I})$$

Agora, para o único rolo de material bruto do tipo 3 de largura $B_3 = 1500$ mm, foram esquematizados os cortes da seguintes maneira:

- Três cortes utilizando o Padrão 2, mostrado na Figura 1-c, com extensão de 149,47 m cada, produzindo um total de 448,41 m de item do tipo $i = 2$.

Dessa vez, porém, pode-se notar que o comprimento total do Padrão 2 cortado (448,41 m) é menor do que o tamanho $L(3) = 500$ m do rolo de material bruto do tipo $r = 3$, ao contrário do ocorrido para os rolos do tipo $r = 2$.

Finalmente, utilizando-se uma área total de material bruto igual a 8111 m², foram produzidos 7707 m² de itens encomendados e foram perdidos 404 m² em aparas não aproveitadas. As quantidades em peso dos materiais produzidos foram $w(1) = 23100$ kg, $w(2) = 4400$ kg, $w(3) = 11000$ kg e $w(4) = 22000$ kg, todas respeitando os limites de 10% pré-estabelecidos.

Assim, com a solução ótima valendo 21383.32 EUR, terminamos as considerações sobre esse exemplo.

Exemplo 2

Para esse exemplo, teremos uma lista de encomendas com cinco itens de comprimentos totalmente variados, demonstrados na Tabela 2:

$b(i)$	$w(i)$ [kg]	$Lzmin(i)$ [m]	$Lzmax(i)$ [m]
1000 mm	2000	229	281
900 mm	2000	255	312
800 mm	10000	1433	1752
750 mm	2000	458	561
745 mm	2000	461	565

Novamente, os limitantes ao peso de material produzido é de 10% e os limites impostos sobre o comprimento mínimo e máximo foram calculados com base no peso mínimo e máximo permitidos. Utilizando o programa em C++, produziu-se os padrões de corte apresentados na Figura 2:

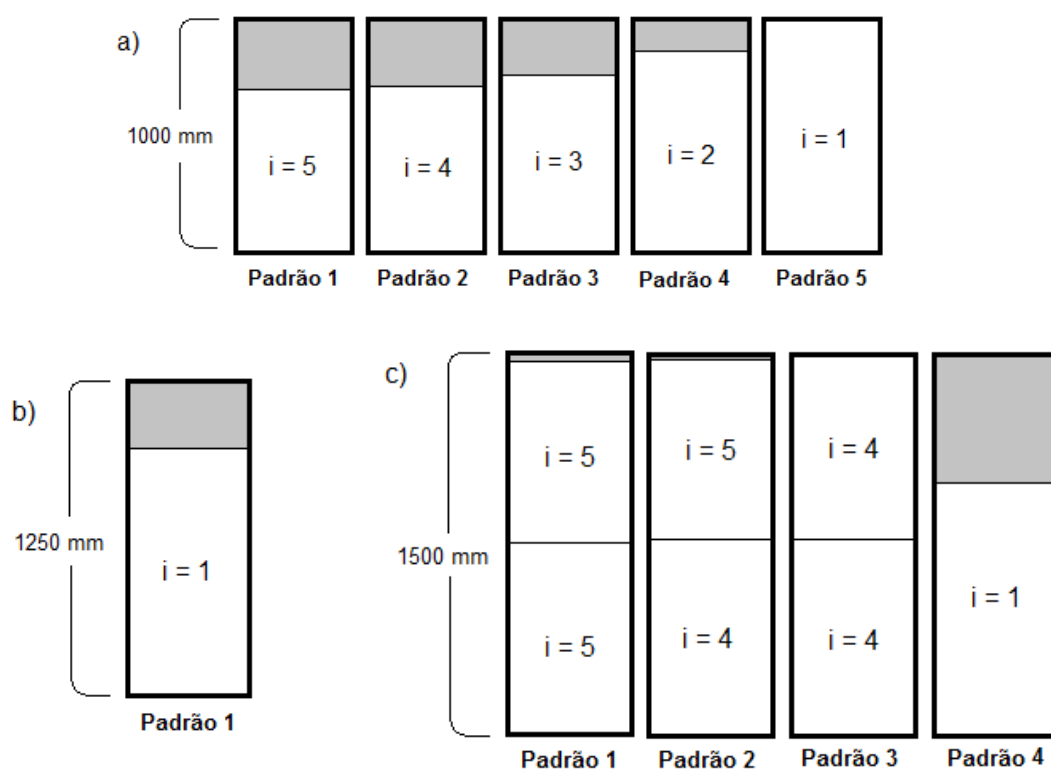


Figura 2: Padrões de corte gerados pela rotina programada em C++, cujos parâmetros são: a) $r = 1$, $B_1 = 1000$ mm e $\Delta = 1000$ mm; b) $r = 2$, $B_2 = 1250$ mm e $\Delta = 250$ mm; c) $r = 3$, $B_3 = 1500$ mm e $\Delta = 500$ mm. Os valores de Δ são parâmetros que representam o máximo de perda admissível nas aparas, em relação a largura, demonstrados pela região sombreada das figuras.

Utilizando os padrões gerados acima como dados de entrada para o AIMMS, pudemos encontrar o seguinte:

A solução ótima encontrada foi **4424,35** EUR em um tempo médio de execução de 0,05 segundos.

Primeiramente, o software apontou que a melhor escolha seria utilizar somente os rolos de material bruto dos tipos $r = 1$ e $r = 3$. Dessa forma, rolos de material bruto foram repetidos $M(1) = 3$ e $M(3) = 1$ vezes, totalizando em comprimento $L(1) = 2250$ m e $L(3) = 560,51$ m. Isso significa que serão utilizados 3 rolos de material bruto do tipo 1 com $\frac{2250}{3} = 750$ m de extensão cada, e 1 rolo do tipo 3 com 560,51 m de extensão.

Para cada rolo de material bruto do tipo 1 de largura $B_1 = 1000$ mm, foram esquematizados os cortes da seguinte maneira:

- Três cortes utilizando o Padrão 3, mostrado na Figura 2-a, com extensão de 184,26 m cada, produzindo material do tipo $i = 3$, resultando em 552,78 m deste item por rolo.
- Um corte utilizando o Padrão 4, mostrado na Figura 2-a, com extensão de 103,80 m, produzindo este mesmo comprimento de material do tipo $i = 2$ por rolo.
- Um corte utilizando o Padrão 5, mostrado na Figura 2-a, com extensão de 93,42 m, produzindo este mesmo comprimento de material do tipo $i = 1$ por rolo.

Observa-se que a soma do comprimento dos Padrões cortados, isto é, a extensão do Padrão multiplicado pelo número de vezes que este foi utilizado, resulta no comprimento total de cada um dos rolos de material bruto do tipo $r = 1$. Neste caso específico:

$$(3 \times 184,26 \text{ m}) + (1 \times 103,80 \text{ m}) + (1 \times 93,42 \text{ m}) = 750 \text{ m} \quad (\text{II})$$

Agora, para o único rolo de material bruto do tipo 3 de largura $B_3 = 1500$ mm, foram esquematizados os cortes da seguinte maneira:

- Três cortes utilizando o Padrão 2, mostrado na Figura 2-c, com extensão de 186,87 m cada, produzindo esta mesma quantidade de materiais dos tipos $i = 4$ e $i = 5$. Como resultado, teremos um total de 560,51 m produzidos destes dois tipos de itens encomendados.

Fica claro de se perceber que o comprimento total cortado a partir do Padrão 2 (560,51 m) é a mesma extensão do rolo de material bruto do tipo $r = 3$.

Finalmente, utilizando-se uma área total de material bruto igual a 3091 m², foram produzidos 2725 m² de itens encomendados e foram perdidos 366 m² em aparas não aproveitadas. As quantidades em peso dos materiais produzidos foram $w(1) = 2200$ kg, $w(2) = 2200$ kg, $w(3) = 10414$ kg, $w(4) = 3300$ kg e $w(5) = 3278$ kg, todas respeitando os limites de 10% pré-estabelecidos.

Assim, com a solução ótima valendo 4424,35 EUR, podemos passar para as considerações finais do nosso trabalho. Outros exemplos foram resolvidos, porém, decidiu-se analisar somente estes dois como forma de demonstrar o pleno funcionamento do modelo e a facilidade com que foram resolvidos pelo software AIMMS.

4. Discussão e Considerações Finais

Os resultados dos exemplares resolvidos do CSP bidimensional revelam a eficácia de sua implementação no AIMMS. Ao compararmos os tempos de execução utilizando este software com os tempos de execução obtidos da literatura [4], percebemos uma visível melhora, explicitada na Tabela 3 abaixo:

Tabela 3: Comparação entre os tempos de execução.		
	AIMMS	CPLEX 7.1
Exemplo 1	0,11 s	5,95 s
Exemplo 2	0,04 s	2,70 s
Exemplo 3	0,12 s	1,85 s
Exemplo 4	0,14 s	6,98 s

Os exemplos 3 e 4 foram resolvidos, apesar de não demonstrados, e se referem aos "Cases" 2.B e 4.B da página 66 de [4]. Vale mencionar que o AIMMS também utiliza o CPLEX como solver, porém, uma possível explicação para tamanha diferença nos tempos de execução é a versão utilizada nas implementações, dado que em [4] ele utiliza a versão 7.1 do CPLEX desenvolvida em 2001, enquanto o AIMMS utiliza a versão 12.4 do CPLEX [6], a versão mais recente utilizada no mercado hoje em dia.

Dessa maneira, percebemos que o principal objetivo do projeto foi atingido e, motivados por isso, podemos cada vez mais melhorar o modelo utilizado. Por exemplo, para um futuro trabalho de melhorias, poderíamos colocar prioridades na lista de materiais produzidos, ou seja, vale mais a pena produzir um item A do que um item B, ou ainda, tornar a largura dos materiais brutos uma variável, expandindo o problema e obtendo soluções cada vez mais complexas.

O trabalho realizado durante o ano de vigência da bolsa de Iniciação Científica foi muito bem planejado, e os resultados encontrados foram um reflexo disso. Durante os seis primeiros meses, tanto o modelo apresentado quanto o software de otimização foram estudados de maneira completa, para que não ocorresse nenhum imprevisto no desenvolvimento do projeto nos meses seguintes.

Naturalmente, o ambiente comercial é o mais adequado para a implementação do trabalho desenvolvido, e atualmente, qualquer empresa de corte poderia utilizar os seus próprios parâmetros para obter soluções ótimas em questão de segundos. Esse foi o principal objetivo do nosso trabalho e, aliado com o aprendizado sobre a teoria de modelagem matemática, mostramos que pode-se obter grandes lucros ao tomarmos as decisões apresentadas pelo modelo.

5. Bibliografia

1 – P. C. Gilmore and R. E. Gomory, “A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem”, *Operations Research Vol.9, No.6, 849-859 (1961)* .

2 – H. Dyckhoff, “A typology of cutting and packing problems”, *European Journal of Operational Research, 44: 145–159 (1990)*.

3 – Software AIMMS. Disponível em <<http://www.aimms.com>> – Último acesso: 14 de Fevereiro de 2012 .

4 – J. Karelaiti, “Solving the cutting stock problem in the steel industry”, (2002).

5 – Software de Programação C++. Disponível em < <http://gcc.gnu.org/>> – Último acesso: 14 de Fevereiro de 2012.

6 – Software CPLEX, versão 12.4. Disponível em < <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/> > – Último acesso: 20 de Agosto de 2012.

7 – Westerlund, T. "Solving a two-dimensional trim-loss problem with MILP", *European Journal of Operational Research*, 104 (1998) 572-581.