

# Modelagem e Simulação Numérica das Dinâmicas Populacionais interativas no caso do Controle Biológico da Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*)

Tiago Yuzo Miyaoka<sup>1</sup>

Aluno

Prof. Doutor João Frederico C. A. Meyer<sup>2</sup>

Professor Orientador

DMA, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP

**Resumo.** Este trabalho é uma continuação do estudo da dinâmica populacional interativa da mosca-dos-chifres, do gado de corte (que sofre com a presença da mosca) e de besouros coprófagos (que são inseridos no ambiente para controle da mosca). A principal diferença deste trabalho para o anterior é a mudança nas condições de contorno do sistema não linear de equações, que incluem agora condições genéricas de *Robin*.

## 1. Introdução

A importância da mosca-dos-chifres surge no estudo da criação de gado de corte, pois esta sofre significativamente com o parasitismo da mosca (ao aproveitar a pele mais fina na base dos chifres do gado bovino para alimentar-se do sangue, interfere de muitos modos no desenvolvimento da rês). Uma possível solução para o controle populacional deste inseto é a inclusão de besouros coprófagos no meio, pois estes agem como um predador indireto, não deixando os ovos da mosca eclodirem. Já foram realizados estudos sobre o convívio dessas 3 espécies, e o leitor interessado pode consultá-los em [1] e [2].

O objetivo deste novo trabalho é, baseando-se em [2], modificar a condição de contorno do domínio, considerando agora a possibilidade da espécie (neste caso, somente do besouro, mas nada impede que a condição seja aplicada também à mosca) interagir com o exterior da região estudada, onde ocorre a criação confinada do gado.

## 2. Modelagem Matemática

Continuamos considerando um sistema não-linear de Equações Diferenciais Parciais combinando Equações de Dispersão-migração com características Lotka-Volterra (presa-predador) para modelar a interação entre as 3 espécies. Reproduzimos aqui as equações do trabalho anterior [2], onde representamos o gado por  $R$ , a mosca por  $M$  e o besouro por  $B$ , em uma região definida por  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e com  $J = (0, T]$ , tais que:

---

<sup>1</sup>tiagoyuzo@gmail.com

<sup>2</sup>joni@ime.unicamp.br

## Rês

Para o gado,  $R(x, y, t) = R$ , consideraremos reprodução malthusiana pois é controlada, ou seja, seu crescimento não é limitado por falta de espaço ou falta de alimento, mas há uma porcentagem da população que é destinada ao abate. O contato da rês com a mosca é prejudicial, pois a mosca é seu parasita, logo temos a seguinte equação para a variação populacional da rês:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \nu_{RM} RM \quad (2.1)$$

onde:

- $\lambda_R R$  denota a reprodução do gado, que é malthusiana pois a criação é assistida;
- $-\mu_A R$  é uma porcentagem fixa de abate do gado; e
- $-\nu_{RM} RM$  representa o prejuízo causado pela mosca ao gado.

## Mosca

Para a mosca,  $M(x, y, t) = M$ , temos reprodução verhulstiana, ou seja, dependente do meio em que vive, mas como a mosca é parasita do gado, o meio é relacionando à população de rês. Também há espalhamento geográfico, pois ela tem autonomia de vôo, e um termo advectivo. Vamos considerar que a mosca não pode viver do sangue de outros animais, pois no domínio estudado, o único animal presente será o gado (esta é uma característica de predador especialista). Logo, o contato com a rês é benéfico à mosca enquanto a presença de besouros coprófagos lhe é prejudicial. Com isto, temos que a variação populacional da mosca é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \alpha_M \nabla^2 M + \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot M) = -\lambda_M M \left(1 + \frac{M}{\rho R}\right) + \nu_{MR} RM - \nu_{MB} MB \quad (2.2)$$

onde:

- $-\alpha_M \nabla^2 M$  representa o processo de difusão da mosca;
- $\vec{\nabla} \cdot M$  descreve um processo migratório da mosca;
- $-\lambda_M M \left(1 + \frac{M}{\rho R}\right)$  denota a reprodução da mosca, verhulstiana, onde o sinal negativo, além de representar um decréscimo da população se não houver gado no meio, indica que o modelo considera a mosca como predador especialista e não oportunista;
- $\rho R$  é a capacidade de suporte do meio da mosca, dependente da rês;
- $\nu_{MR} RM$  é o termo de efeito benéfico que a mosca recebe da rês; e
- $-\nu_{MB} MB$  é o termo de efeito de presa indireta que a mosca sofre do besouro.

## Besouro

Para o besouro,  $B(x, t, y) = B$ , também temos reprodução verhulstiana, mas com capacidade de suporte do meio constante. Também temos espalhamento geográfico, mas com menor autonomia de vôo, pois o besouro também vive em terra. Sua relação com a rês é benéfica, pois se alimenta de suas fezes. Temos portanto que sua variação populacional é descrita por:

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \nabla^2 B = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{\kappa_B}\right) + \nu_{BR} RB \quad (2.3)$$

onde:

- $-\alpha_B \nabla^2 B$  representa o processo de difusão do besouro;
- $\lambda_B B \left(1 - \frac{B}{\kappa_B}\right)$  denota a reprodução do besouro, também verhulstiana, mas sem sinal negativo e com capacidade de suporte constante; e
- $\nu_{BR} RB$  é o termo de efeito benéfico que o besouro recebe da rês;

Destas três equações obtemos o seguinte sistema não linear de equações diferenciais parciais :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \nu_{RM} RM \\ \frac{\partial M}{\partial t} - \alpha_M \nabla^2 M + \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot M) = -\lambda_M M \left(1 + \frac{M}{\rho R}\right) + \nu_{MR} RM - \nu_{MB} MB \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \nabla^2 B = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{\kappa_B}\right) + \nu_{BR} RB \end{cases} \quad (2.4)$$

onde:

- $\lambda_R$ ,  $\lambda_M$  e  $\lambda_B$  são as taxas de crescimento intrínseco das espécies;
- $\mu_A$  é a taxa de abate de gado;
- $\alpha_M$  e  $\alpha_B$  são coeficientes de difusão;
- $\vec{\nabla} = (u, v)$ , com  $\nabla \cdot \vec{\nabla} = 0$  é o campo de velocidades relacionado ao processo migratório da mosca;
- $\rho R$  e  $\kappa_B$  são capacidades de suporte do meio em que vivem a mosca e o besouro, respectivamente, onde  $\rho R$  varia com  $R$  enquanto  $\kappa_B$  é constante;
- $\nu_{RM}$ ,  $\nu_{MR}$ ,  $\nu_{MB}$ ,  $\nu_{RB}$  são os coeficientes de interação entre as espécies.

Desenvolvendo as equações desse sistema temos, inicialmente:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \nu_{RM} RM \\ \frac{\partial M}{\partial t} - \alpha_M \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial M}{\partial x} + v \frac{\partial M}{\partial y} = -\lambda_M M \left(1 + \frac{M}{\rho R}\right) + \nu_{MR} RM - \nu_{MB} MB \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \left( \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{\kappa_B}\right) + \nu_{BR} RB \end{cases} \quad (2.5)$$

Definimos  $\Omega$  como uma região retangular, com a largura maior que altura para facilitar a compreensão intuitiva dos resultados.

As condições de contorno para  $\partial\Omega$  são:

Condições de *Von Neumann* homogêneas:

- $\left. \frac{\partial R}{\partial \eta} \right|_{\partial\Omega} = 0;$
- $\left. \frac{\partial M}{\partial \eta} \right|_{\partial\Omega} = 0.$

Condição de *Robin*:

- $-\alpha_B \frac{\partial B}{\partial \eta} \Big|_{\partial \Omega} = cB;$

As condições iniciais são:

- $R(x, y, 0) = R_0(x, y) = r_0$  (constante);
- $M(x, y, 0) = M_0(x, y) = m_0$  (constante, aleatoriamente distribuída); e
- $B(x, y, 0) = B_0(x, y) = b_0$  (constante);

Para a discretização do domínio  $\Omega$ , uma região retangular, definimos  $nnx$  como o número de nós em  $x$  e  $nnny$  como o número de nós em  $y$ .

Para desenvolver o tratamento matemático do sistema usaremos o Método das Diferenças Finitas nas coordenadas espaciais e o Método de Crank-Nicolson na coordenada temporal. Portanto, temos:

Discretizações espaciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x_i, t_n) &= \frac{G_{i+1}^{(n)} - G_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= \frac{G_{i+1}^{(n)} - 2G_i^{(n)} + G_{i-1}^{(n)}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Discretização temporal:

$$\begin{aligned} G(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{G_i^{(n+1)} + G_i^{(n)}}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ G'(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{G_i^{(n+1)} - G_i^{(n)}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Obtemos então, para pontos interiores ao domínio, as seguintes aproximações de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{G_{i+nnny}^{(n+\frac{1}{2})} - G_{i-nny}^{(n+\frac{1}{2})}}{2\Delta x}, & \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{G_{i+nnny}^{(n+\frac{1}{2})} - 2G_i^{(n+\frac{1}{2})} + G_{i-nny}^{(n+\frac{1}{2})}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{G_{i+1}^{(n+\frac{1}{2})} - G_{i-1}^{(n+\frac{1}{2})}}{2\Delta y}, & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \frac{G_{i+1}^{(n+\frac{1}{2})} - 2G_i^{(n+\frac{1}{2})} + G_{i-1}^{(n+\frac{1}{2})}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo no sistema, obtemos:

Primeira equação:

$$\left[ 1 - \frac{\lambda_R \Delta t}{2} + \frac{\mu_A \Delta t}{2} + \frac{\nu_{RR} \Delta t}{2} \left( \frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{2} \right) \right] R_i^{(n+1)} = \left[ 1 + \frac{\lambda_R \Delta t}{2} - \frac{\mu_A \Delta t}{2} - \frac{\nu_{RR} \Delta t}{2} \left( \frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{2} \right) \right] R_i^{(n)} \quad (2.9)$$

Segunda equação:

$$\begin{aligned} &\left[ -\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u \Delta t}{4\Delta x} \right] M_{i+nnny}^{(n+1)} + \left[ -\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v \Delta t}{4\Delta y} \right] M_{i+1}^{(n+1)} + \left[ 1 + \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \left( 1 + \frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{\rho(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)})} \right) - \frac{\nu_{MR} \Delta t}{2} \left( \frac{R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}}{2} \right) + \frac{\nu_{MB} \Delta t}{2} \left( \frac{B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}}{2} \right) \right] M_i^{(n+1)} \\ &+ \left[ -\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v \Delta t}{4\Delta y} \right] M_{i-1}^{(n+1)} + \left[ -\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u \Delta t}{4\Delta x} \right] M_{i-nny}^{(n+1)} = \left[ \frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u \Delta t}{4\Delta x} \right] M_{i+nnny}^{(n)} + \left[ \frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v \Delta t}{4\Delta y} \right] M_{i+1}^{(n)} + \left[ 1 - \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta y^2} - \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \left( 1 + \frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{\rho(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)})} \right) + \frac{\nu_{MR} \Delta t}{2} \left( \frac{R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}}{2} \right) - \frac{\nu_{MB} \Delta t}{2} \left( \frac{B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}}{2} \right) \right] M_i^{(n)} \\ &+ \left[ \frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v \Delta t}{4\Delta y} \right] M_{i-1}^{(n)} + \left[ \frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u \Delta t}{4\Delta x} \right] M_{i-nny}^{(n)} \end{aligned} \quad (2.10)$$



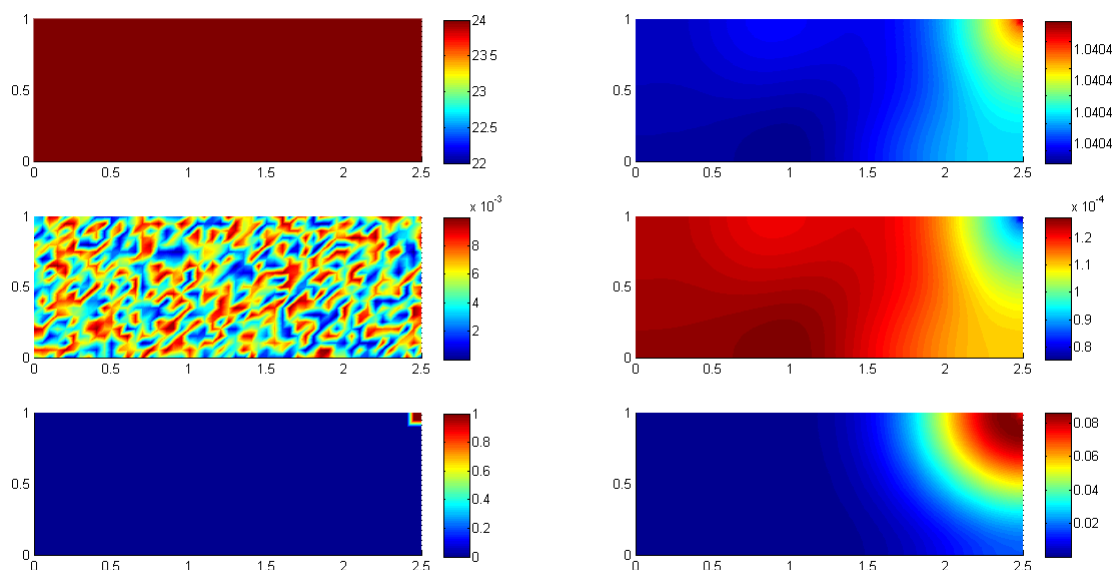


Figura 1: Gráficos referentes à condição inicial (à esquerda) e à distribuição após 125 interações (à direita) das espécies (rês, mosca e besouro, respectivamente)

## 4. Conclusão

Podemos observar nas simulações obtidas que os resultados são semelhantes aos obtidos no trabalho anterior [2], ou seja, ilustram claramente o fato do modelo ser do tipo presa-predador, pois pode-se observar que a rês se concentra em regiões em que há menos mosca, e esta por sua vez encontra-se em menor quantidade em regiões onde a incidência de besouros é maior, pois este impede seu crescimento populacional. Também podemos observar que a população de besouros não mais se acumula nas bordas (como no estudo anterior), mas tem um suave decréscimo nestas, devido às condições de contorno de *Robin*. Isto resulta em um cenário mais realístico, pois no ambiente estudado (um pasto de criação confinada de gado) os besouros tem total liberdade e não se prendem de modo algum aos limites do domínio.

## Referências

- [1] Koga, M. T., Meyer, J. F. C. A. e Tabares, P. C. C. (2011). *Dinâmica Populacional Interativa da Mosca-dos-chifres (Haematobia Irritans) na Presença de um Predador: Simulações computacionais*. Biomatemática 21 (2011), 71-86
- [2] Miyaoka, T. Y., Meyer, J. F. C. A. (2012). *Dinâmica Populacional em um Caso de Convívio Interspecífico: Gado, Mosca-dos-Chifres e Besouro Coprófago - Modelagem e Simulação Computacional*. Projeto Supervisionado (MS777) Primeiro semestre de 2012

## Anexo

Algoritmo 1 (em linguagem MATLAB)

```
clear all
clf
clc
tic;

%
% programa para simular ações interespecíficas
% mosca-dos-chifres (m), gado bovino (r) e besouro (b)
%
% dados do domínio
l=2.5; h=1; tf=50;
%
% parâmetros do problema

am=00000.001;
ab=00000.002;
ma=00000.001;
lr=00000.1;
lm=00000.075;
lb=00000.0375;
u=000000.0025;
v=000000.0015;
r=000100.0;
kb=100000.0;
c=0.05;
nrm=0000.000000025;
nmr=0000.0005;
%nmb=0000.0075;
nmb=0000.1;
nbr=0000.000005;
%
% parâmetros da discretização
nt=125; dt=tf/nt; npit=4;
nx=50; dx=l/nx; nnx=nx+1;
ny=20; dy=h/ny; nny=ny+1;
nn=nnx*nny;
% numero de Peclet
[u*dx/am v*dy/am];
%
% condições iniciais
%
rz=24*ones(nn,1); mz=0.01*rand(nn,1); bz=zeros(nn,1);
bz(nn)=1; bz(nn-1)=1; bz(nn-nny)=1; bz(nn-nny-1)=1;
```

```

%rz(1)=0.25; rz(2)=0.25; rz(nny+1)=0.5; rz(nny+2)=0.5;
%mz(nn-nny+1)=0.25; mz(nn-nny+2)=0.125; mz(nn-2*nny+1)=0.25;
%mz(nn-2*nny+2)=0.125;
%
% valores auxiliares
dt2=dt/2; ddx=dx*dx; ddy=dy*dy;
amx=am*dt2/ddx; amy=am*dt2/ddy; abx=ab*dt2/ddx; aby=ab*dt2/ddy;
ctx=c*dt/dx; cty=c*dt/dy; %
ut=u*dt/(4*dx); vt=v*dt/(4*dy); plre=1-dt2*(lr-ma);
plrd=1+dt2*(lr-ma); nrmt=nrm*dt2;
lmt2=lm*dt2; lbt2=lb*dt2;
nmrt=nmr*dt2; nmbt=nmb*dt2;
nbrt=nbr*dt2;
sidem=-amx-ut; siddm=amx+ut;
sipem=-amy-vt; sipdm=amy+vt;
ssdem=-amx+ut; ssddm=amx-ut;
sspem=-amy+vt; sspdm=amy-vt;
dpem=1+2*(amx+amy); dpdm=1-2*(amx+amy);
sideb=-abx; siddb=abx;
sipeb=-aby; sipdb=aby;
ssdeb=-abx; ssddb=abx;
sspeb=-aby; sspdb=aby;
dpeb=1+2*(abx+aby); dpdb=1-2*(abx+aby);
%
% preparação das matrizes
mem=sparse(nn); mdm=sparse(nn);
meb=sparse(nn); mdb=sparse(nn);
moem=sparse(nn); modm=sparse(nn);
moeb=sparse(nn); modb=sparse(nn);
%
% preenchimento da parte constante, linear
for i=1:nn
    mem(i,i)=dpem; mdm(i,i)=dpdm;
    meb(i,i)=dpeb; mdb(i,i)=dpdb;
end
for i=1:nn-1
    mem(i+1,i)=sipem; mem(i,i+1)=sspem;
    mdm(i+1,i)=sipdm; mdm(i,i+1)=sspdm;
    meb(i+1,i)=sipeb; meb(i,i+1)=sspeb;
    mdb(i+1,i)=sipdb; mdb(i,i+1)=sspdb;
end
for i=1:nn-nny
    mem(i+nny,i)=sidem; mem(i,i+nny)=ssdem;
    mdm(i+nny,i)=siddm; mdm(i,i+nny)=ssddm;
    meb(i+nny,i)=sideb; meb(i,i+nny)=ssdeb;
    mdb(i+nny,i)=siddb; mdb(i,i+nny)=ssddb;

```



```

end
%
% corrigindo contorno
% lateral da esquerda
for kc=1:nny
    ind=kc;
    mem(ind,ind+nny)=-2*amx; mdm(ind,ind+nny)=2*amx;
    meb(ind,ind+nny)=-2*abx; mdb(ind,ind+nny)=2*abx; %
    meb(ind,ind)=meb(ind,ind)+ctx; meb(ind,ind)=meb(ind,ind)-ctx; %
end
%
% lateral da direita
for kc=1:nny
    ind=(nx)*nny+kc;
    mem(ind,ind-nny)=-2*amx; mdm(ind,ind-nny)=2*amx;
    meb(ind,ind-nny)=-2*abx; mdb(ind,ind-nny)=2*abx; %
    meb(ind,ind)=meb(ind,ind)+ctx; meb(ind,ind)=meb(ind,ind)-ctx; %
end
%
% horizontal inferior
mem(1,2)=-2*amy; mdm(1,2)=2*amy; %o que eh isso
for kc=1:nx
    ind=kc*nny+1;
    mem(ind,ind-1)=0; mdm(ind,ind-1)=0;
    mem(ind,ind+1)=-2*amy; mdm(ind,ind+1)=2*amy;
    meb(ind,ind-1)=0; mdb(ind,ind-1)=0; %
    meb(ind,ind+1)=-2*aby; mdb(ind,ind+1)=2*aby; %
    meb(ind,ind)=meb(ind,ind)+cty; meb(ind,ind)=meb(ind,ind)-cty; %
end
%
% horizontal superior
for kc=1:nx
    ind=kc*nny;
    mem(ind,ind-1)=-2*amy; mdm(ind,ind-1)=2*amy;
    mem(ind,ind+1)=0; mdm(ind,ind+1)=0;
    meb(ind,ind-1)=-2*aby; mdb(ind,ind-1)=2*aby; %
    meb(ind,ind)=meb(ind,ind)+cty; meb(ind,ind)=meb(ind,ind)-cty; %
    meb(ind,ind+1)=0; mdb(ind,ind+1)=0; %
end
meb(nn,nn-1)=-2*aby; mdm(nn,nn-1)=2*amy;
%
% inicio das iterações temporais
rst=rz; mst=mz; bst=bz;
verr = zeros(nny,nnx);
verm = zeros(nny,nnx);
verb = zeros(nny,nnx);

```

```

vx = [0:dx:1]; vy = [0:dy:h];

for it=1:nt
    moem=mem; modm=mdm;
    moeb=meb; modb=mdb;
    for k=1:npit
        % calculo dos termos de r
        for i=1:nn
            ter=plre+nrmt*((mz(i)+mst(i))/2);
            rst(i)=(plrd-nrmt*((mz(i)+mst(i))/2))/ter;
        end
        % para calcular m, os operadores
        for il=1:nn
            r2=(rst+rz)/2; m2=(mst+mz)/2; b2=(bst+bz)/2;
            moem(il,il)=mem(il,il)+lmt2*(1+m2(il)/(r*r2(il)))-nmrt*r2(il)+nmbt*b2(il);
            modm(il,il)=mdm(il,il)-lmt2*(1+m2(il)/(r*r2(il)))+nmrt*b2(il)-nmbt*b2(il);
            moeb(il,il)=meb(il,il)-lbt2*(1-b2(il)/kb)-nbrt*r2(il);
            modb(il,il)=mdb(il,il)+lbt2*(1-b2(il)/kb)+nbrt*r2(il);
        end
        mst=moem/(modm*mz);
        bst=moeb/(modb*bz);
    end
    rz=rst; bz=bst; mz=mst;

    %Visualizacao dos resultados
    for j=1:nnx
        for i=1:nny
            ind = (j-1)*nny + i;
            verr(i,j) = rz(ind);
            verm(i,j) = mz(ind);
            verb(i,j) = bz(ind);
        end
    end
    end
    %Gráfico do resultado
    subplot(3,2,1)
    surf(vx,vy,verr)
    view(0,90),colorbar off, shading interp;
    subplot(3,2,2)
    %subplot(3,1,1)
    contour(vx,vy,verr,50),grid
    subplot(3,2,3)
    surf(vx,vy,verm)
    view(0,90),colorbar off, shading interp;
    subplot(3,2,4)
    %subplot(3,1,2)
    contour(vx,vy,verm,50),grid

```

```
subplot(3,2,5)
surf(vx,vy,verb)
view(0,90),colorbar off, shading interp;
subplot(3,2,6)
%subplot(3,1,3)
contour(vx,vy,verb,50), grid
pause(0.00001);
%toc;
end
toc;
```