

MS 877: Projeto Supervisionado 2

Título: Teoria de elasticidade em meios anisotrópicos

Aluno: David Ricardo Barreto Lima Silva, RA:042885

Orientador: Jörg Schleicher

1 Introdução

Um meio é chamado de isotrópico com respeito a um certo parâmetro quando ocorre a igualdade do comportamento do parâmetro em todas as direções e homogêneo quando ocorre a igualdade do parâmetros em todos os pontos.

Seguindo a definição de isotropia, podemos também chamar um meio de anisotrópico com respeito a um certo parâmetro quando nega a validade de um meio isotrópico, ou seja, quando a igualdade do comportamento do parâmetro em todas as direções ocorre.

Podemos considerar as definições apresentadas no estudo de certos parâmetros das ondas sísmicas como a velocidade, a amplitude, o comprimento, a direção ou qualquer outro aspecto da onda podendo mudar ou não no decorrer do caminho ou nas direções.

Estudos indicam que a anisotropia no solo é causada pela combinação de certos fatores que podem mudar com o tempo, como fraturas nas rochas, camadas sedimentares, distribuição mineral heterogênea, presença de poros ou buracos.

O estudo da anisotropia é muito importante quando queremos prever a presença de alguma estrutura no solo (petróleo, minerais, rochas...), já que podemos dizer a grosso modo que quase todos os solos são anisotrópicos. Com isso o estudo se baseia em induções controladas de ondas sísmicas e receptores que indicam os parâmetros de tais ondas quando são refletidas em direção à superfície.

O propósito do nosso material é fazer um estudos dos parâmetros elásticos, para isso vamos fazer um estudo das equações da onda na corda, na membrana, no meio elástico, definir o tensor de tensão e o tensor de deformação.

A equação geral da onda em um meio elástico, anisotrópico ou isotrópico, pode ser reduzida pela aplicação da segunda lei de Newton a um diferencial de volume, onde temos a seguinte expressão:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad (1)$$

onde ρ é a densidade do meio, $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o vetor de deslocamento, $f = (f_1, f_2, f_3)$ é a força por unidade de volume, t o tempo, x_i a coordenada cartesiana referente ao eixo i e τ_{ij} o tensor de tensão.

2 Equação da onda em uma dimensão

Vamos considerar primeiramente uma corda esticada de comprimento l fixa no ponto inicial $(0,0)$ e no ponto final $(l,0)$, onde assumimos um sistema de coordenadas em duas dimensões para representar a posição da corda. Vamos determinar a equação do movimento a partir da posição vertical v em função da posição horizontal x e do tempo t , ou seja, o problema é determinar $v(x, t)$ onde a variável x pertence ao intervalo $[0, l]$ e o tempo a todos os reais positivos. Para isso vamos assumir as seguintes hipóteses:

1. A corda é flexível e elástica, ou seja, ela não resiste a tensões que causam momento. Caso a corda resistisse a tensões que causam momento, poderíamos ter uma força agindo

em direção diferente ao seu alinhamento, ou seja, ela seria rígida assim como uma barra.

2. A partir de uma tensão inicial, o alongamento não se modificará mais em qualquer porção da corda. Pela lei de Hook: $\sigma = \epsilon E$, onde σ indica a tensão, ϵ a deformação específica (razão entre a deformação e o comprimento inicial, ou seja, adimensional) e E o módulo de elasticidade, que é específico para cada material. Podemos assim inferir que a tensão é constante a todo tempo, já que assumimos não existir modificação do alongamento inicial.

3. O peso da corda é pequeno comparada a tensão sofrida, ou seja, a ação da força peso $P = mg$ é desprezível comparada à força que causa a tensão em estudo. Podemos dizer a grosso modo que a corda tem massa m "nula".

4. A deflexão da corda devida ao seu peso é pequena comparada com o seu comprimento l , onde tal afirmação pode ser assumida a partir da hipótese anterior.

5. A declividade da corda no ponto em estudo é pequena comparada à unidade de comprimento. Ou seja, assumindo a unidade de comprimento usada para definir o tamanho l da corda (a unidade seria nesse caso l/l) e sendo a declividade igual ao coeficiente angular da corda com relação ao eixo x no ponto em estudo (a tangente do ângulo com relação ao eixo x), temos tal coeficiente tendendo a 0 (a variação no eixo vertical é muito pequena levando em consideração a unidade de comprimento do eixo horizontal).

6. Existe somente vibração transversal. Caso existisse também vibração longitudinal (os dois casos mostrados na (figura 1)), teríamos variação na deformação causada pela tensão inicial, e com isso existiria variação também na tensão, o que invalidaria a segunda hipótese.

7. As mudanças nos parâmetros físicos da corda no decorrer do tempo podem ser desprezados (variação de temperatura, densidade, coeficiente de elasticidade, comprimento...).

Consideramos um elemento diferencial da corda, sendo T a tensão, α a inclinação no ponto x e β a inclinação no ponto $x + \delta_x$.

Pela segunda lei de Newton, a resultante das forças na direção vertical é igual a massa vezes a aceleração. Portanto:

$$T \sin(\beta) - T \sin(\alpha) = \rho \delta_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2)$$

onde ρ é a densidade linear (razão da massa pelo comprimento) e δ_s o comprimento de arco da corda. Desconsiderando a declividade pela hipótese dada em 5, temos que:

$$\delta_x \gg \delta_y, \text{ onde temos } \delta_s = \delta_x \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_y}{\delta_x}\right)^2}, \text{ ou seja:}$$

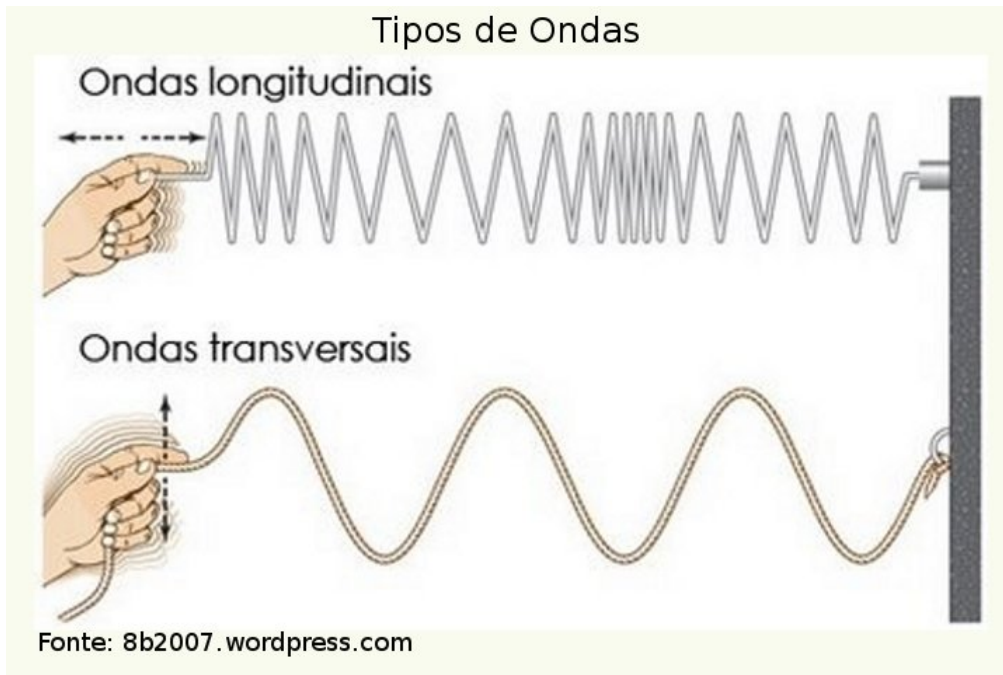


Figura 1: Tipos de ondas

$$\delta_s \cong \delta_x, \quad (3)$$

Já que também temos os ângulos α e β pequenos, com isso fica expandindo em série de Taylor em torno de 0 que para um x pequeno que: $\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - O(x^7)$ e $\tan(x) = x + x^3/3 + 2x^5/15 + O(x^7)$. Onde $O(x^7)$ indica um polinômio onde a variável x tem expoentes maiores ou iguais a 7. Com isso temos que as parcelas com x^3 , x^5 e $O(x^7)$ tendem a 0 muito mais rápido que x quando este tende a 0. Podemos dizer então que: $\sin(x) \cong x \cong \tan(x)$. Portanto para α e β com as hipóteses anteriores temos:

$$\sin(\alpha) \cong \tan(\alpha), \quad (4)$$

e também que:

$$\sin(\beta) \cong \tan(\beta). \quad (5)$$

Com isso a equação se torna:

$$\tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{\rho \delta_x}{T} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Sabemos também do cálculo que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, t), \quad (7)$$

$$\tan(\beta) = \frac{\partial v}{\partial x}(x + \delta_x, t), \quad (8)$$

em um dado tempo t . Podemos chegar então nas seguintes equações para $0 < \delta_x \ll 1$:

$$\frac{1}{\delta_x} \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x + \delta_x, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Fazendo δ_x tender a 0 na equação acima, encontramos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (10)$$

onde $c^2 = \frac{T}{\rho}$. Chegamos então na equação da onda em uma dimensão.

Caso tenhamos uma força f por unidade de comprimento agindo na corda, a equação assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F, \quad (11)$$

sendo

$$F = \frac{f}{\rho}. \quad (12)$$

Onde f pode ser devido a pressão, gravitação, resistência, ou qualquer outra ação externa.

3 Equação da onda em duas dimensões

Antes de encontrar as equações na membrana, vamos assumir certos postulados similares ao caso da corda onde podemos esquecer resumidamente que:

1. A membrana é elástica e flexível, ou seja, ela não resiste a tensões que causam momento. Com isso a tensão na membrana tem sempre a direção tangente ao ponto em estudo.
2. Não existe alongamento em qualquer porção da membrana e portanto, pela lei de Hook, a tensão é constante.
3. O peso da membrana é pequeno comparada a tensão sofrida.
4. A deflexão da membrana é pequena comparada ao seu diâmetro mínimo.
5. A declividade da membrana no ponto em estudo é pequena comparada à unidade de comprimento.

6. Existe somente vibração transversal.

7. As mudanças nos parâmetros físicos da membrana no decorrer do tempo podem ser desprezados (variação de temperatura, densidade, coeficiente de elasticidade, comprimento...).

Considerando um elemento de área da membrana e assumindo pelas hipóteses 4 e 5 que a declividade e a deflexão são pequenas, a área do elemento é aproximadamente igual a área de um retângulo de lados δ_x e δ_y , portanto a área do elemento é dada por $\delta_x\delta_y$. Sendo T a força por unidade de comprimento agindo na membrana, temos que as forças agindo nos lados do elemento de área são $T\delta_x$ e $T\delta_y$.

As forças agindo no elemento da membrana na direção vertical têm como resultante: $T\delta_x \sin(\beta) - T\delta_x \sin(\alpha) + T\delta_y \sin(\delta) - T\delta_y \sin(\gamma)$. Onde β , α , δ e γ são as inclinações com relação aos eixos y no sentido positivo, y no sentido negativo, x no sentido negativo e x no sentido positivo respectivamente.

Assumindo as declividades envolvidas no elemento como sendo pequenas, temos assim como foi deduzido anteriormente, que os senos envolvidos acima podem ser aproximados por uma tangente e ficamos com a seguinte resultante de forças: $T\delta_x(\tan(\beta) - \tan(\alpha)) + T\delta_y(\tan(\delta) - \tan(\gamma))$.

Pela segunda lei de Newton, ficamos:

$$T\delta_x(\tan(\beta) - \tan(\alpha)) + T\delta_y(\tan(\delta) - \tan(\gamma)) = \rho\delta A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (13)$$

onde ρ é a massa por unidade de área, $\delta A \approx \delta_x\delta_y$ é a área do elemento, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ é obtida em algum ponto do elemento. Pelo cálculo, temos:

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_1, y, t), \quad (14)$$

$$\tan(\beta) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_2, y + \delta_y, t), \quad (15)$$

$$\tan(\gamma) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_1, t), \quad (16)$$

$$\tan(\delta) = \frac{\partial v}{\partial x}(x + \delta_x, y_2, t), \quad (17)$$

onde x_1 e x_2 são os valores de x entre x e $x + \delta_x$, e y_1 e y_2 são os valores de y entre y e $y + \delta_y$. Substituindo esses valores acima temos:

$$T\delta_x \left[\frac{\partial v}{\partial y}(x_2, y + \delta_y, t) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_1, y, t) \right] + T\delta_y \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x + \delta_x, y_2, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_1, t) \right] = \rho\delta_x\delta_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (18)$$

Dividindo por $\rho\delta_x\delta_y$, ficamos:

$$\frac{T}{\rho} \left[\frac{\frac{\partial v}{\partial y}(x_2, y + \delta_y, t) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_1, y, t)}{\delta_y} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x + \delta_x, y_2, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_1, t)}{\delta_x} \right] = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (19)$$

No limite de δ_x tendendo a zero e δ_y também tendendo a zero, ficamos com:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (20)$$

onde $c^2 = \frac{T}{\rho}$. Chamamos a expressão acima de equação da onda em duas dimensões.

Se existir uma força por unidade de área f agindo na membrana, ficamos com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F, \quad (21)$$

onde $F = \frac{f}{\rho}$

4 Equação da onda em três dimensões e a definição de tensor de tensão

O propósito do nosso material é estudar perturbações no meio elástico em geral onde os tópicos anteriores eram apenas casos particulares e mais simples da equação geral da onda em 3 dimensões. Assumindo inicialmente que o meio é homogêneo, isotrópico e sem nos preocupar com a translação ou a rotação do meio como um todo, vamos trabalhar da mesma forma anterior com um diferencial de volume δV e com as seguintes tensões agindo nas faces do elemento: $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. As três primeiras tensões são chamadas de tensões normais enquanto as outras são chamadas de tensões de cisalhamento (figura 2).

Assumindo tais hipóteses:

1. O meio é elástico e flexível.
2. O peso do elemento de volume é pequeno comparado a tensão sofrida.
3. As mudanças nos parâmetros físicos do meio no decorrer do tempo podem ser desprezados (variação de temperatura, densidade, coeficiente de elasticidade, comprimento...).

Como veremos posteriormente, devemos assumir que as tensões τ_{ij} são simétricos para atender a condição de equilíbrio com relação à rotação do elemento de volume, ou seja:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad (22)$$

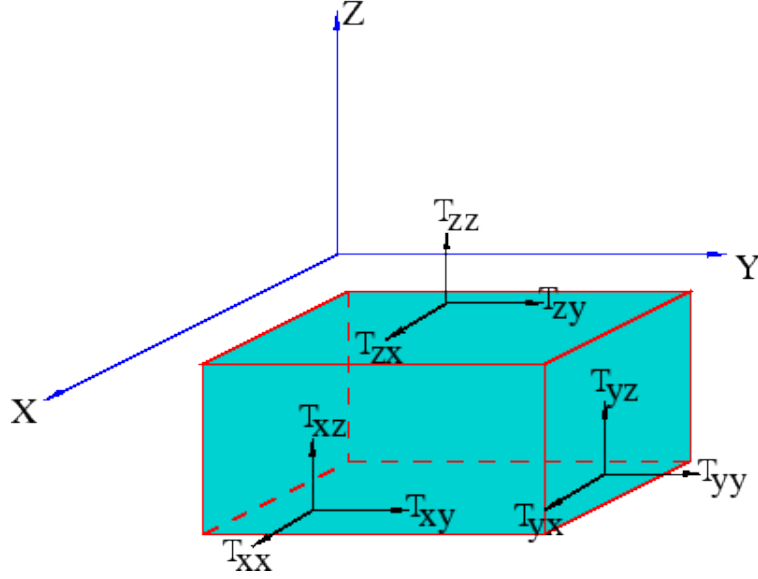


Figura 2: Tensões

com $i, j = x, y, z$

A soma das forças agindo na direção x é pela segunda lei de Newton igual a massa vezes a aceleração, inferindo na seguinte relação:

$$[(\tau_{xx})_{x+\delta x} - (\tau_{xx})_x]\delta y\delta z + [(\tau_{xy})_{y+\delta y} - (\tau_{xy})_y]\delta z\delta x + [(\tau_{xz})_{z+\delta z} - (\tau_{xz})_z]\delta x\delta y = \rho\delta x\delta y\delta z \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (23)$$

onde ρ é a densidade do corpo e v é a componente do corpo na direção x , ou seja, $v = v(x, t)$. No limite de δV tendendo a zero, temos:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (24)$$

Similarmente assumindo v a componente na direção y e w a componente na direção z , ficamos:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (26)$$

As tensões τ_{ij} descritas anteriormente são chamadas de tensores de tensão onde podemos chamar de tensor em uma forma geral como uma representação entre relações de grandezas escalares e grandezas vetoriais e os seus operadores.

5 O tensor de tensão

Seja um sistema de forças exteriores Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, atuando em um corpo elástico em equilíbrio e tomemos um elemento de volume dv com a forma de um paralelepípedo de lados dx , dy e dz no interior do corpo em um dado sistema referencial.

Como o corpo está em equilíbrio, temos que o elemento de volume está estático e com isso as tensões (força por unidade de área) atuando em cada face do paralelepípedo se equilibram. Como vimos anteriormente, podemos decompor cada uma das tensões em uma tensão normal e duas tensões de cisalhamento dado na figura 2. As tensões estão representadas por um conjunto de dois índices, em que o primeiro índice indica a direção da normal ao plano em que atua a tensão e o segundo índice indica o eixo segundo o qual a tensão se exerce. As componentes normais serão consideradas positivas quando produzem tração e negativas quando produzem compressão.

Para que o elemento de volume se mantenha em equilíbrio é necessário e suficiente que cumpra as condições de equilíbrio de forças e equilíbrio de momento segundo os eixos x , y e z . Assim, considerando, por exemplo, a rotação do elemento de volume em relação ao eixo baricêntrico paralelo ao eixo dos z e calculando o momento em relação a esse eixo obtém-se:

$$\tau_{xy}\delta y\delta z\frac{\delta x}{2} + (\tau_{xy} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x}\delta x)\delta y\delta z\frac{\delta x}{2} - \tau_{yx}\delta x\delta z\frac{\delta y}{2} - (\tau_{yx} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y}\delta y)\delta x\delta z\frac{\delta y}{2} = 0. \quad (27)$$

Desprezando as parcelas com infinitésimos de quarta ordem chegamos que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (28)$$

Podemos proceder de forma análoga em relação a eixos baricêntricos paralelos aos eixos dos y e dos x para encontrar, respectivamente, as seguintes igualdades:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad (29)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (30)$$

Com isso, das nove componentes do tensor das tensões, apenas seis componentes são distintas.

As forças externas que atuam sobre um corpo podem ser classificadas como forças de superfície (Q_S) ou forças de massa ou de volume (Q_V). As forças em geral (forças e momentos) aplicadas em pontos do contorno do corpo ou distribuídas na sua superfície são as forças de superfície. Como exemplos temos as forças exercidas por outros corpos, a pressão hidrostática e a pressão do vento.

As forças de massa ou de volume (Q_V) são proporcionais à massa ou ao volume do corpo, ou seja, sua medida é dada pela força por unidade de volume. Temos como exemplos as forças que se exercem no corpo devida à aceleração da gravidade, as forças magnéticas e as forças de inércia.

O que realmente vimos no t3pico 4 anterior foi que dado uma resultante (Q_V) das for7as de volume atuando em um corpo e pegando as suas componentes $Q_{V,x}$, $Q_{V,y}$ e $Q_{V,z}$ segundo os eixos x , y e z , respectivamente e substituindo $\rho\delta_x\delta_y\delta_z\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ por $\delta_x\delta_y\delta_z Q_{V,x}$, chegamos na seguinte equa73o:

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = Q_{V,x}. \quad (31)$$

Similarmente podemos chegar nas outras rela73oes:

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = Q_{V,y}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = Q_{V,z}. \quad (33)$$

As rela73oes acima s3o chamadas de equa73oes de equil3brio indefinido do corpo, tamb3m conhecidas por equa73oes de Cauchy, que devem ser satisfeitas em cada ponto do interior do corpo.

Na superf3cie de um corpo atuam for7as de superf3cie Q_S com componentes $Q_{S,x}$, $Q_{S,y}$ e $Q_{S,z}$ segundo os eixos x , y e z , representados na Figura 3.

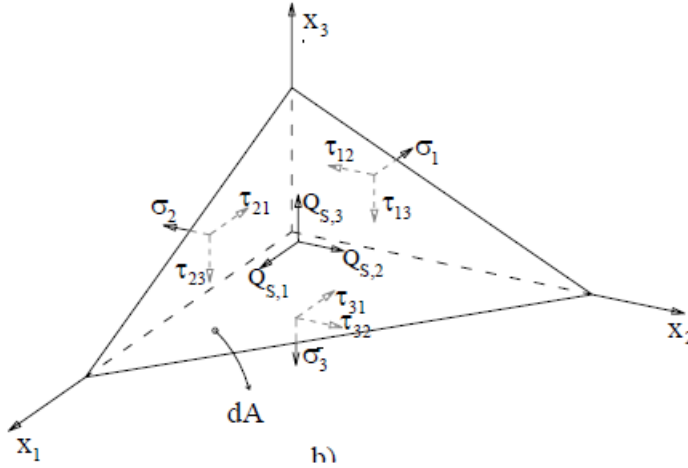


Figura 3: For7as de superf3cie

Fazendo a proje733o na dire733o do eixo x das for7as exteriores que atuam no tetraedro representado na (Figura 4) obt3m-se a seguinte equa733o:

$$Q_{S,x}\delta A - \tau_{xx}\delta A\cos(\alpha) - \tau_{yx}\delta A\cos(\beta) - \tau_{zx}\delta A\cos(\gamma) + \frac{1}{3}\delta h\delta A Q_{V,x} = 0. \quad (34)$$

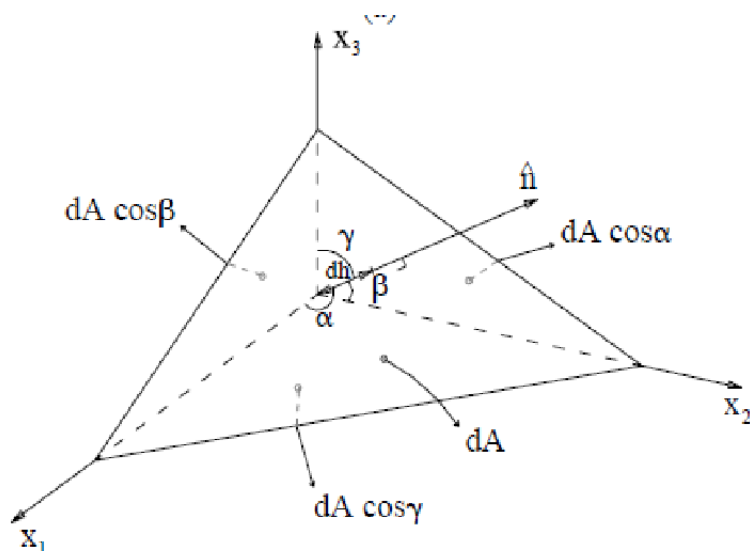


Figura 4: Componentes das forças de superfície

Fazendo o limite de δh tendendo a 0, temos:

$$Q_{S,x} - \tau_{xx} \cos(\alpha) - \tau_{yx} \cos(\beta) - \tau_{zx} \cos(\gamma) = 0, \quad (35)$$

$$\tau_{xx} \cos(\alpha) + \tau_{yx} \cos(\beta) + \tau_{zx} \cos(\gamma) = Q_{S,x}. \quad (36)$$

Similarmente para os eixos y e z , temos:

$$\tau_{xy} \cos(\alpha) + \tau_{yy} \cos(\beta) + \tau_{zy} \cos(\gamma) = Q_{S,y}, \quad (37)$$

$$\tau_{xz} \cos(\alpha) + \tau_{yz} \cos(\beta) + \tau_{zz} \cos(\gamma) = Q_{S,z}. \quad (38)$$

As equações acima são as equações de contorno de equilíbrio, devendo ser satisfeitas em cada um dos pontos do contorno do corpo.

6 Notação de Einstein

Antes de continuar o nosso estudo, devemos mencionar uma definição muito usada na geofísica para representar um somatório.

Como a geofísica trabalha com somas em muitos índices e operadores (derivação, integração...) onde a aplicação da soma dos operadores é igual a soma das aplicações do mesmo, usaremos uma convenção para não carregar o texto com sinais de somatório

dada da seguinte maneira: Teremos uma soma em todos os índices que aparecer duas vezes na expressão, conhecidos como índices de soma. Os índices que não são de soma são conhecidos como índices livres.

Exemplos:

1.O traço de uma matriz $A = [a_{ij}]$ é representado por a_{ii} .

2.O produto escalar entre dois vetores v e w é representado por $w_i v_i$.

3.A série de Taylor em torno de 0 é representada por $a_n x^n$.

4.O produto da matriz $A = [a_{ij}]$ com a matriz $B = [b_{jk}]$ resulta na matriz $C = [c_{ik}]$ onde $c_{ik} = a_{ij} b_{jk}$.

5.A equação geral da onda apresentada na introdução fica: $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = f_i$

6.O gradiente de um vetor v é denotado por $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

7 O tensor de deformação

Daqui em diante toda a teoria será escrita na notação de Einstein e vamos passar a chamar os eixos x, y e z de x_1, x_2 e x_3 para seguir a forma clássica do estudo de tensor de deformação e ao mesmo tempo ajudar na notação de Einstein quando for fazer a soma dos índices. O estudo sobre tensor de deformação pode ser deduzido partindo de deslocamentos da seguinte forma:

Quando um corpo sofre a ação de alguma força de natureza interna, ele muda o seu formato e com isso muda algumas distâncias entre pontos considerados anteriormente a ação.

Seja $P = (X_1, X_2, X_3)$ o vetor de posição de uma partícula anterior a deformação e $p = (x_1, x_2, x_3)$ a posição da mesma partícula após a deformação. Já que P denota a posição de uma partícula genérica no caso indeformado, podemos descrever p como uma função de deformação da mesma partícula no decorrer do tempo, ou seja, escreveremos $p = p(P, t)$. Melhor ainda na seguinte forma de componentes:

$$p_i = x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t); \quad i = 1, 2, 3.$$

Sabemos do cálculo que dado $p = p(P, t)$ onde a matriz Jacobiana $J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right]_{3 \times 3}$ possui determinante diferente de zero, então podemos escrever P em termos de p , ou seja, $P = P(p, t)$. Melhor ainda na seguinte forma de componentes:

$$P_i = X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t); \quad (i = 1, 2, 3).$$

Não devemos esquecer que $p(P, t)$ é a posição atual de uma partícula que estava na posição P em $t_0 = 0$.

7.1 Tensor de deformação finito

Seja dP e dp elementos vetoriais de P e p respectivamente, ou seja:

$$dP = (dX_1, dX_2, dX_3)$$

$$dp = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

A ideia geométrica é que os vetores dP e dp têm como ponto inicial e ponto final os mesmos pontos infinitamente próximos antes e depois da deformação respectivamente, onde os seus comprimentos são dados por:

$$dC = |dP| = (dP \bullet dP)^{\frac{1}{2}} = (dX_i dX_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$dc = |dp| = (dp \bullet dp)^{\frac{1}{2}} = (dx_i dx_i)^{\frac{1}{2}}$$

Fazendo a diferença:

$$(dc)^2 - (dC)^2 = dx_i dx_i - dX_k dX_k = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k \frac{\partial x_i}{\partial X_l} dX_l - dX_k dX_l \delta_{kl} = dx_k dx_l \delta_{kl} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \frac{\partial X_i}{\partial x_l} dx_l \quad (39)$$

onde δ_{kl} é a função delta de Kronecker tendo o valor nulo para $k \neq l$ e 1 para $k = l$.

Definindo $x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, $X_{i,j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, $L_{kl} = \frac{1}{2}(x_{i,k} x_{i,l} - \delta_{kl})$ e $E_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{kl} - X_{i,k} X_{i,l})$, podemos escrever a expressão acima como:

$$(dc)^2 - (dC)^2 = 2L_{kl} dX_k dX_l = 2E_{kl} dx_k dx_l \quad (40)$$

L_{kl} é conhecido como o tensor Lagrangiano de deformação finito e E_{kl} como o tensor Euleriano de deformação finito.

Definimos o vetor de deslocamento u (Figura 5) da seguinte forma:

$$u(P, t) = p - P, \quad (41)$$

onde escrevendo na forma de componentes ($u_i = x_i - X_i$) e definindo $u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial X_k}$ chegamos nas seguintes equações partindo de $x_i = u_i + X_i$:

$$x_{i,k} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = u_{i,k} + \delta_{ik}, \quad (42)$$

$$L_{kl} = \frac{1}{2}[(u_{i,k} + \delta_{ik})(u_{i,l} + \delta_{il}) - \delta_{kl}] = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l} + u_{i,k} u_{i,l}), \quad (43)$$

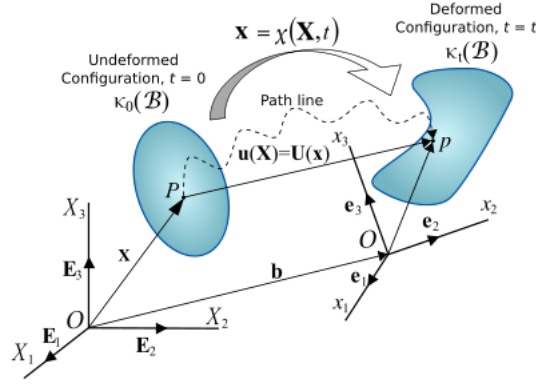


Figura 5: Vetor de deslocamento

ou sendo $u_i = x_i - X_i$ e definindo $u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, teremos:

$$X_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} - u_{i,k}, \quad (44)$$

$$E_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l} - u_{i,k}u_{i,l}). \quad (45)$$

7.2 Tensor de deformação infinitesimal

Como o próprio nome infinitesimal já diz, vamos assumir pequenas deformações e com isso podemos considerar os produtos de derivadas em (43) e (45) desprezíveis. Definimos assim o tensor infinitesimal de deformação da seguinte forma:

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (46)$$

Como $(u_{k,l} + u_{l,k}) = (u_{l,k} + u_{k,l})$, podemos ver que ϵ_{kl} é simétrico em relação a diagonal principal da matriz $[\epsilon_{ij}]_{3 \times 3}$ tensorial, ou seja, $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$. Sendo $[\epsilon_{ij}]_{3 \times 3}$ simétrica, então pode ser diagonalizada, ou seja, podemos achar novos eixos cartesianos onde $\epsilon_{kl} = 0$ se k e l forem diferentes, trabalhando assim com somente 3 valores de ϵ_{kl} : ϵ_{11} , ϵ_{22} e ϵ_{33} .

7.3 Tensor de rotação

Como o vetor de deslocamento é uma função do ponto em estudo, vamos escrever $u(P, t)$ apenas como $u(P)$. O nosso objetivo é estudar como se comporta a deformação na vizinhança de P , para isso vamos fazer as seguintes definições: $u(P) = p - P$, $u(P + dP) = p + dp - (P + dP)$ e $du = u(P + dP) - u(P)$. Expandindo du em série de Taylor em cada coordenada e assumindo pequenas deformações, anulando assim os termos de dX_j maiores que 1, temos:

$$du_i = u_i(P+dP) - u_i(P) = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j = u_{i,j} dX_j = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) dX_j + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) dX_j = (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dX_j, \quad (47)$$

onde definimos:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (48)$$

Podemos ver facilmente que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, ou seja, ω_{ij} é antisimétrico e é conhecido como tensor de rotação como veremos a seguir:

De $dx_i = dX_i + du_i$, da identidade $dX_i = dX_j \delta_{ij}$ e usando (9), encontramos que:

$$dx_i = dX_i + (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dX_j = [\delta_{ij} + (\epsilon_{ij} + \omega_{ij})] dX_j. \quad (49)$$

Sabemos da rotação de eixos que quando um eixo antes da rotação dado pelo versor e_i possui um ângulo α_{ij} para um eixo após a rotação dado pelo versor E_j , temos que $e_i \bullet E_j = \cos(\alpha_{ij}) = b_{ij}$ onde definimos $\cos(\alpha_{ij}) = b_{ij}$.

Com isso colocando E_i nas coordenadas do eixo original, temos que: $E_i = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$. Fazendo o produto interno de e_1 nos 2 lados da igualdade teremos que $b_{i1} = c_1$. Analogamente encontramos que $b_{i2} = c_2$ e $b_{i3} = c_3$.

Assim, dado um vetor qualquer v de componentes ev_i no sistema original e componentes Ev_i no sistema rotacionado podemos encontrar facilmente a seguinte relação entre eles:

$$ev_j = \sum_{i=1}^3 b_{ij} Ev_i = b_{ij} Ev_i. \quad (50)$$

$$Ev_i = \sum_{j=1}^3 b_{ij} ev_j = b_{ij} ev_j. \quad (51)$$

A matriz que possui b_{ij} como componentes é chamada de matriz de rotação. No caso de rotações infinitesimais podemos escrever cada b_{ij} da seguinte forma: $b_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, onde o módulo de h_{ij} é infinitamente próximo de 0. Comparando com (47) acima podemos ver claramente porque ω_{ij} é conhecido como tensor de rotação

8 Interpretação geométrica do tensor de deformação

Considere um corpo submetido a um conjunto de forças como mostra a figura 6. Em geral estas forças causam deslocamentos em todos os pontos do corpo. Vamos considerar a partir daqui que todos os deslocamentos são infinitesimais, já que na prática realmente os deslocamentos são pequenos comparados com a dimensão do corpo.

Note que o vetor de deslocamentos em um determinado ponto não precisa ter a mesma direção da força aplicada. Em qualquer ponto do corpo existe, em geral, além dos deslocamentos, também rotações. No caso de um corpo tridimensional o vetor da rotação

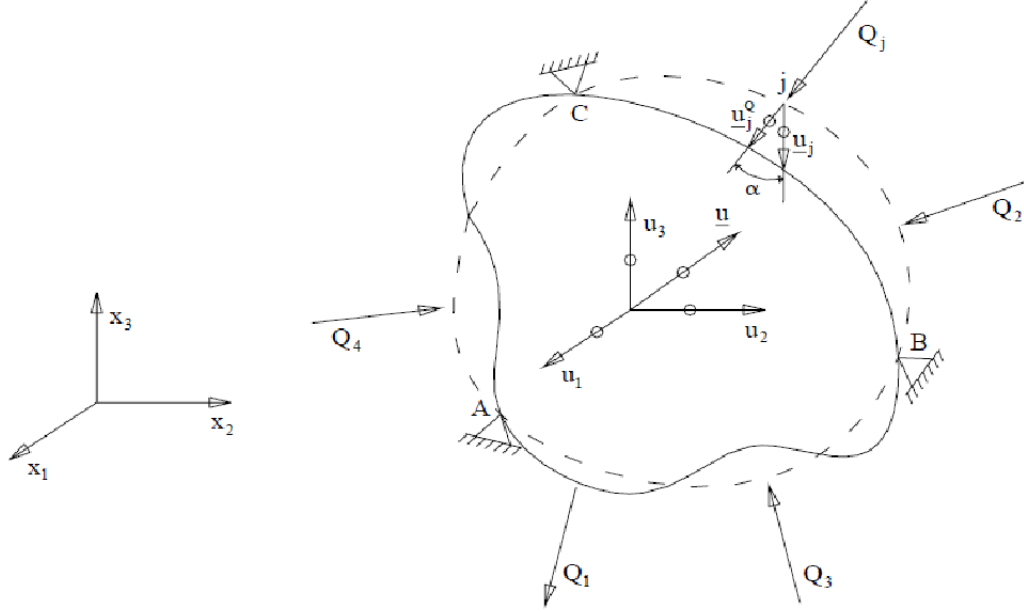


Figura 6: Deformações

de determinado ponto tem três componentes de rotação, uma segundo cada eixo do referencial que serão chamadas de θ_1 , θ_2 e θ_3 .

Agora considere 3 pontos OAB do corpo antes de sofrer a ação das forças onde os 3 pontos definem dois segmentos de reta ortogonais como mostra a (Figura 7).

Após sofrer a ação das forças teremos um estado deformado final passando os pontos OAB para $O''A''B''$. Pode existir uma configuração deformada intermediária $O'A'B'$, nesta configuração deformada intermediária podem ocorrer extensões dos segmentos OA e OB mas não haverá distorções, dado que o segmento $O'A'$ mantém-se ortogonal ao segmento $O'B'$, a (Figura 8) nos mostra os casos intermediário e final. Assim, o desenvolvimento de distorções ou extensões de corte realiza-se durante a passagem da configuração $O'A'B'$ para a configuração $O''A''B''$.

Pode-se então definir como extensão de corte num ponto a variação do valor do cosseno do ângulo realizado por dois segmentos de reta que, no estado do corpo indeformado, formam um ângulo reto entre si.

Se os pontos O , A e B estiverem inscritos no plano x_1x_2 , então γ_{12} representa a extensão de corte no ponto O do plano x_1x_2 como nos mostra a (Figura 9).

Assim temos que:

$$\cos(A''O''B'') = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin(\gamma_{12}). \quad (52)$$

Como se admite pequenos deslocamentos e pequenas deformações então:

$$\cos(A''O''B'') = \sin(\gamma_{12}) \cong \gamma_{12}. \quad (53)$$

Configuração indeformada

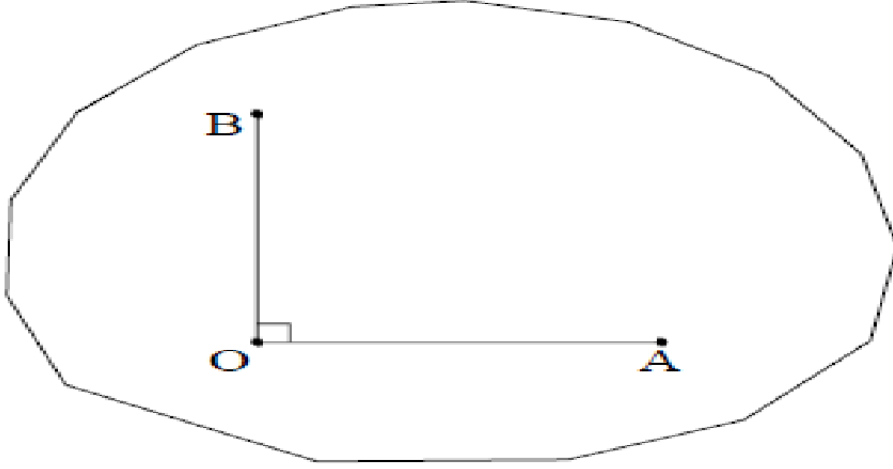


Figura 7: Caso indeformado

Temos também pela definição do vetor de rotação e com base na figura 9 que:

$$\cos(A''O''B'') = \cos(\theta'_3)\sin(\theta''_3) + \sin(\theta'_3)\cos(\theta''_3), \quad (54)$$

onde:

$$\cos(\theta'_3) = \frac{(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1})dx_1}{O''A''}, \quad (55)$$

$$\sin(\theta'_3) = \frac{(\frac{\partial u_2}{\partial x_1})dx_1}{O''A''}, \quad (56)$$

$$\cos(\theta''_3) = \frac{(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2})dx_2}{O''B''}, \quad (57)$$

$$\sin(\theta''_3) = \frac{(\frac{\partial u_1}{\partial x_2})dx_2}{O''B''}. \quad (58)$$

Teremos então:

$$\gamma_{12} = [(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1})\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2})] \frac{dx_1 dx_2}{(O''A'')(O''B'')}. \quad (59)$$

Sabe-se ainda, partindo que $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ é muito próximo de 0, que:

Configuração deformada

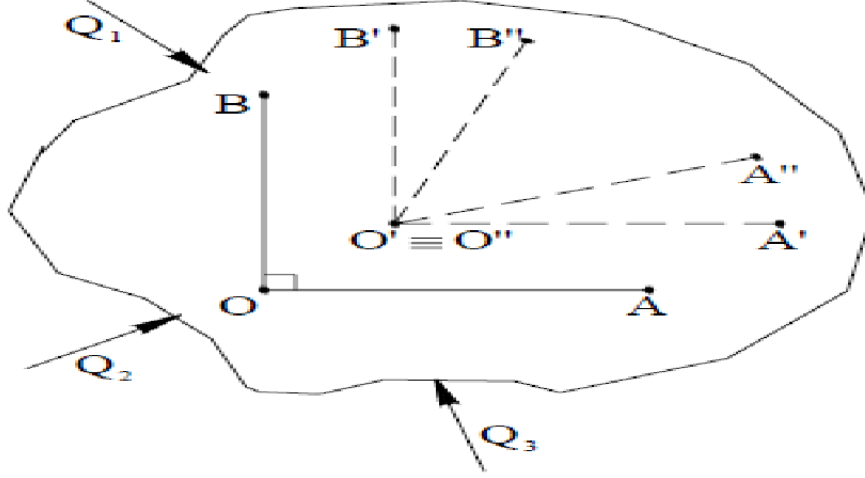


Figura 8: Caso deformado

$$O''A'' = \left[\left(dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cong dx_1. \quad (60)$$

Usando o mesmo argumento temos:

$$O''B'' \cong dx_2. \quad (61)$$

Substituindo (60) e (61) em (59) obtém-se:

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (62)$$

Se além dos deslocamentos u_1 e u_2 considerarmos também o deslocamento u_3 teremos:

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (63)$$

Desenvolvendo analogamente para os planos x_1x_3 e x_2x_3 teremos:

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (64)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (65)$$

Da definição de tensor de deformação vista no tópico anterior temos então que:

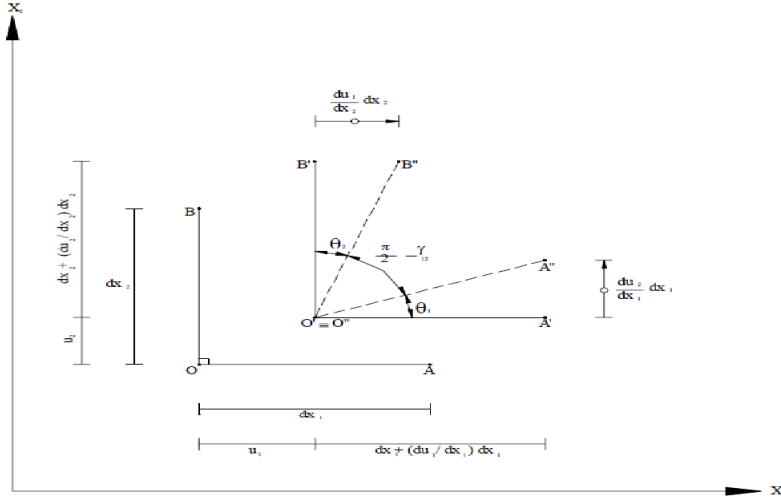


Figura 9: Extensão de corte

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \gamma_{kl}. \quad (66)$$

E daí tiramos a interpretação geométrica de ϵ_{kl}

9 A relação entre o tensor de tensão e o tensor de deformação

Segundo a lei de Hooke, para um modelo considerando pequenas deformações, as tensões são diretamente proporcionais às deformações, e o fator de proporcionalidade é função das propriedades elásticas do meio. Na forma matricial, esta relação pode ser expressa como:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (67)$$

Com os índices i, j, k, l , variando de 1 a 3, pode-se especificar um dos termos. Por exemplo:

$$\tau_{13} = C_{1311} \epsilon_{11} + C_{1312} \epsilon_{12} + C_{1313} \epsilon_{13} + C_{1321} \epsilon_{21} + C_{1322} \epsilon_{22} + C_{1323} \epsilon_{23} + C_{1331} \epsilon_{31} + C_{1332} \epsilon_{32} + C_{1333} \epsilon_{33}. \quad (68)$$

Como o tensor C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, é de se prever que sejam constituídos de 81 elementos. Mas este número de elementos pode ser reduzido pela seguinte análise:

Partindo da simetria dos tensores de deformação como foi mostrado anteriormente ($\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$), temos:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = C_{ijlk} \epsilon_{lk}. \quad (69)$$

Resultando em:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (70)$$

Então dos 81 elementos em C_{ijkl} sobraram 54.

Partindo da simetria dos tensores de tensão como foi mostrado anteriormente ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$), temos:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} = C_{jikl}\epsilon_{lk}. \quad (71)$$

Resultando em:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}. \quad (72)$$

Então dos 54 elementos em C_{ijkl} sobraram 36.

Fazendo um estudo sobre trabalho interno e trabalho externo do corpo (que não será demonstrado neste trabalho, recomendo a leitura de NILSON TADEU MASCIA, RELAÇÕES CONSTITUTIVAS(TENSÃO-DEFORMAÇÃO)) podemos encontrar que:

$$C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (73)$$

Então dos 36 elementos em C_{ijkl} sobraram 21, onde podemos ver a forma matricial de C_{ijkl} , que chamaremos de tensor elástico, na (Figura 10), aparecendo somente a parte superior, pois a matriz é simétrica.

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} \\ & & & & c_{3131} & c_{3112} \\ & & & & & c_{1212} \end{bmatrix}$$

Figura 10: Tensor elástico

Os mesmos elementos podem ser escritos em uma notação utilizando dois índices, a chamada notação de Voigt, que define um índice a partir da combinações de dois índices da notação anterior: 11 -> 1, 22 -> 2, 33 -> 3, 23 -> 4, 31 -> 5 e 12 -> 6.

Teremos assim a nova representação matricial na (Figura 11).

Um material isotrópico é o material com simetria mais alta que pode existir. Não tem dependência direcional de nenhuma constante elástica. Para descrever o tensor elástico desta simetria, apenas duas variáveis são suficientes, também conhecidas como constantes de Lamé. Podemos ver a sua representação na (Figura 12):

$$c_{mn} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$$

Figura 11: Nova forma matricial do tensor elástico

$$c = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix}$$

Figura 12: Tensor elástico isotrópico

10 Comentários sobre anisotropias e simetrias

No estudo geral de anisotropia existem casos mais estudados, onde o meio é considerado anisotrópico como um todo mas se comporta de maneira isotrópica em determinadas situações. Vamos concluir nosso texto mostrando alguns casos mais importantes, as conhecidas simetrias:

10.1 Simetria VTI

Simetria transversalmente isotrópica com eixo vertical ou VTI. É o modelo mais estudado e com maior aplicação prática de simetria. No caso de um meio VTI, cinco constantes são necessárias para descreve-lo completamente, como observado na (Figura 13). Este tipo de anisotropia pode ser associado a material fino acamadado, ou seja, camadas horizontais pouco espessas ou estruturas onde partículas individuais são alinhadas em uma direção preferencial como mostra na (Figura 14). O eixo de simetria é orientado na direção perpendicular às camadas, no caso o eixo vertical. Na prática, qualquer seqüência de camadas horizontais isotrópicas com material não fraturado pode ser considerado um material com anisotropia transversalmente isotrópica.

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$$

onde $c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$.

Figura 13: Simetria VTI

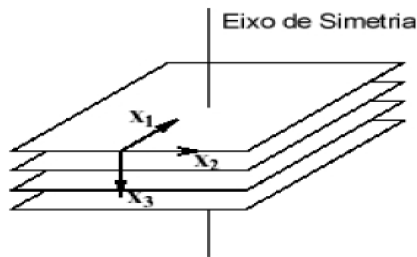


Figura 14: Simetria VTI

10.2 Simetria HTI

Simetria transversalmente isotrópica com eixo horizontal ou HTI. O número de constantes elásticas é o mesmo do caso VTI como mostra a (Figura 15), porém este tipo de anisotropia se comporta de maneira muito diferente com relação a resposta sísmica. Geralmente é causado por um regime de tensões horizontais não uniforme atuando numa rocha não acamadada gerando fraturas verticais em uma direção dominante. Podemos ver na (Figura 16) um esquema para a simetria HTI, onde x_2 é o plano vertical.

10.3 Simetria ortorrômbica

Uma simetria ortorrômbica pode ser construída a partir de uma seqüência sedimentar horizontal que contem fraturas verticalmente alinhadas como mostra a (Figura 17). O número de constantes elásticas que são necessárias para descrever esta simetria cresce para 9 como mostra a (Figura 18).

10.4 Simetria Monoclínica

Uma simetria monoclínica precisa de 13 constantes elásticas para ser completamente descrita, como mostra a (Figura 19). Pode ser construído como uma combinação de

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$$

Figura 15: Simetria HTI

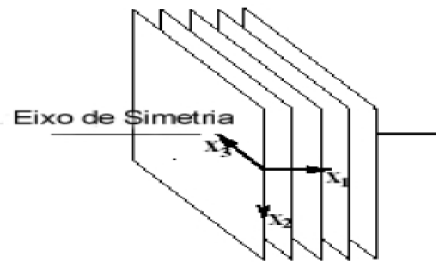


Figura 16: Simetria HTI

seqüência sedimentar horizontal contendo fraturas com direções arbitrárias, porém diferente da direção normal ao plano das camadas.

11 Conclusão

Este texto surgiu de um trabalho de iniciação científica ainda em andamento no ano de 2012.

12 Referências

1. LANDAU L. D. LIFSHITZ E. M. Course of theoretical physics. Theory Of Elasticity Pergamon(1975)
2. BREVIARY OF SEISMIC TOMOGRAPHY. Imaging the Interior of the Earth and Sun. Guust Nolet. University of Nice/ Sophia Antipolis, France 2008
3. Tsavkin V. Seismic Signatures and Analysis of Reflection Data in Anisotropic Media(2001)
4. Tyn Myint U, Lokenath Debnath Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers Birkhäuser Boston(2006)

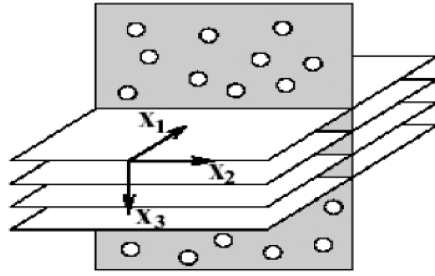


Figura 17: Simetria ortorrômbica

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$$

Figura 18: Simetria ortorrômbica

5. Jose Pujol Elastic wave propagation and generation in seismology. Cambridge University Press(2003)

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$$

Figura 19: Simetria Monoclínica