

## Relatório de Pesquisa

Título do projeto de pesquisa: Método de Diferenças Espectrais de Alta Ordem  
Aplicado à escoamentos Compressíveis.  
Bolsista: Fábio Mallaco Moreira  
Orientador(a): João Luiz Filgueiras de Azevedo  
Período a que se refere o relatório: agosto de 2011 a julho de 2012

### Resumo

Durante o período foi implementada e testada uma formulação 1-D do método de diferenças espectrais para a simulação de problemas puramente convectivos. Os resultados obtidos foram condizentes com a literatura e o método mostrou-se eficiente computacionalmente para ordens de precisão espacial entre dois e seis. A implementação do limitador não apresentou resultados satisfatórios, portanto passou-se a próxima etapa que consiste no desenvolvimento de uma implementação para modelos bidimensionais em uma formulação Euler, atualmente em andamento.

### 1. Introdução

O método de diferenças espectrais (*Spectral Difference*) é um método de discretização espacial para malhas não estruturadas aplicado à mecânica dos fluidos computacional, desenvolvido por Liu, Vinokur e Wang <sup>[1]</sup>, que apresenta um desempenho computacional superior a métodos similares em problemas de escoamento compressível. Em particular, o método é mais eficiente em malhas não estruturadas de quadriláteros do que os métodos de volumes espectrais e de Galerkin descontínuo. Além disso, este método possui uma formulação mais simples<sup>[2]</sup> o que facilita sua implementação. O objetivo de longo prazo do presente trabalho consiste em utilizar o método de diferenças espectrais de alta ordem para a solução das equações não viscosas da gas dinâmica, ou seja, as equações de Euler. Inicialmente estes métodos foram empregados para a solução da equação modelo de convecção e estudo de um limitador para lidar com soluções que possam apresentar discontinuidades, como ondas de choque, típicas de escoamento compressível.

## 2. Método

O método de diferenças espectrais trabalha com malhas não estruturadas convertendo cada célula em um elemento padrão de forma a manter uma reconstrução da solução universal para toda a malha, ao invés de particularizar o processo de reconstrução de fluxo para cada elemento. Este elemento padrão incorpora um conjunto de pontos geométricos nos quais a solução é armazenada e um conjunto de pontos nos quais os fluxos do balanço de propriedades do escoamento são calculados. Estes pontos são denominados, respectivamente, pontos de solução (PS) e pontos de fluxo (PF). A quantidade de PS e PF é determinada pela ordem de precisão desejada. Os valores das variáveis conservadas em cada ponto de solução são obtidos de seus pontos correspondentes na célula inicial. Usando os valores das variáveis conservadas nos pontos de solução, uma função de interpolação pode ser calculada, e esta é utilizada para determinar os valores das variáveis conservadas nos pontos de fluxo.

Com os valores das variáveis conservadas em cada PF, calculam-se os fluxos correspondentes a cada um destes. Como os fluxos são obtidos de polinômios independentes em cada elemento, os valores do vetor de fluxo na fronteira entre duas células são diferentes no PF de cada uma delas, embora fisicamente estes fluxos estejam sendo calculados no mesmo ponto. Assim, para manter as condições de conservação, um fluxo numérico apropriado é utilizado nestes pontos de fronteira entre duas células. Este fluxo numérico se encarrega de introduzir os termos de dissipação artificial necessários para manter a estabilidade numérica do processo de solução. O método não pode ser aplicado a malhas mistas, pois a localização dos PF em células triangulares e em células quadriláteras é diferente. Desta forma, não é possível fazer essa interação entre os fluxos de duas células e garantir que as condições de conservação sejam respeitadas na fronteira.

A solução das equações governantes para cada célula da malha vai permitir atualizar os valores das variáveis conservadas nos pontos de solução. A marcha no tempo destas equações, no presente trabalho, foi realizada por meio da aplicação do método de Runge-Kutta, explícito, de quarta ordem à forma diferencial das equações de conservação<sup>[3]</sup>.

A necessidade do limitador para tratar adequadamente soluções descontínuas advem das oscilações geradas pela reconstrução de alta ordem ao redor das discontinuidades. O

limitador implementado consiste de duas etapas, uma identificadora e a limitadora em si. A primeira etapa detecta as células em que há oscilações excessivas criadas quando o método interpola uma região que contém uma descontinuidade. Uma célula é marcada quando o valor da variável conservada em um de seus PF não se encontra entre os valores médios desta variável nas células vizinhas. Um segundo passo analisa a segunda derivada na região para desmarcar extremos locais suaves que são marcados pelo primeiro critério, essa segunda etapa desmarca as células se a segunda derivada na região for sempre positiva. Durante a segunda etapa, a função limitadora gera uma nova reconstrução baseada na média das derivadas da função de reconstrução original e a restringe progressivamente para os pontos de fluxo da célula até que os valores satisfaçam a condição de monotonicidade<sup>[5]</sup>.

A implementação em duas dimensões é similar à unidimensional. O elemento padrão é o quadrado ilustrado na figura 1, sendo os pontos azuis os PF e os vermelhos os PS. Para o método atingir uma ordem de reconstrução  $n$  são usadas  $2n$  reconstruções lineares da mesma ordem de modo que não é necessária uma interpolação em duas dimensões. A distribuição dos pontos em cada reta segue a mesma proporção usada no problema de uma dimensão.

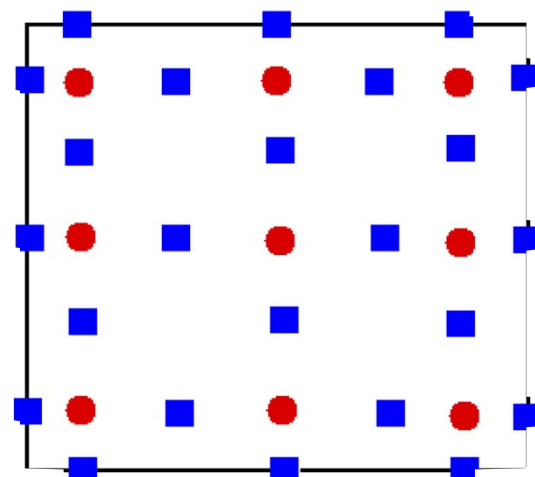


Fig. 1 Elemento padrão para malha bidimensional de terceira ordem

A principal diferença é a necessidade de mapear cada elemento da malha não estruturada em elementos padrão nos quais são feitas as reconstruções. Desta forma, para todos os elementos da malha, termos de métrica são calculados e armazenados para permitir esta transformação. Assim como no problema 1-D, os coeficientes de interpolação são iguais pois a distribuição dos PS e PF é igual para a distribuição horizontal e vertical dos pontos.

### 3. Resultados

Os resultados foram obtidos usando a equação linear de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} = 0$$

para propagar uma onda senoidal e um pulso gaussiano dados pelas equações

$$u(x) = \sin(x)$$

$$u(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-1}{0,05}\right)^2\right)$$

respectivamente, no domínio  $0 \leq x \leq 2$  por 1 periodo e com a constate de velocidade  $v = 1$ .

Como esperado, o método atingiu a ordem de precisão esperada em todo os casos, dentro do limite de aproximação de ponto flutuante do hardware. A comparação entre as distribuições mostrou que a combinação conveniente é aquela no qual os PS são pontos de Gauss e os PF seguem a distribuição dada por Van den Abeele na Ref. [4].

As figuras 2 e 3, referentes aos resultados obtidos com o pulso gaussiano, mostram que para celulas de tamanho adequado o método é da ordem esperada. Este gráfico representa a inclinação da curva como a ordem do método. No eixo horizontal está o espaçamento ou  $\Delta x$  das células e no eixo vertical o erro do método ou a diferença entre a solução analítica e a numérica, ambos em escala logarítmica. Para células muito grandes não há PS suficiente para representar o problema de maneira adequada. Com a onda senoidal nas figuras 4 e 5 fica mais claro outra restrição numérica. O achatamento das curvas dos resultados de quinta e sexta ordem é causado pelo erro numérico de aproximação da maquina que se torna dominante quando os valores são muito próximos de zero.

Para o calculo da ordem do método, apresentada na tabela 1, foram desconsiderados os pontos que apresentavam os problemas citados no paragrafo acima, uma vez que o erro do método tinha pouca influencia no resultado final. Na tabela,  $p$  representa a ordem da reconstrução polinomial e a ordem do método é obtida por  $p+1$ .

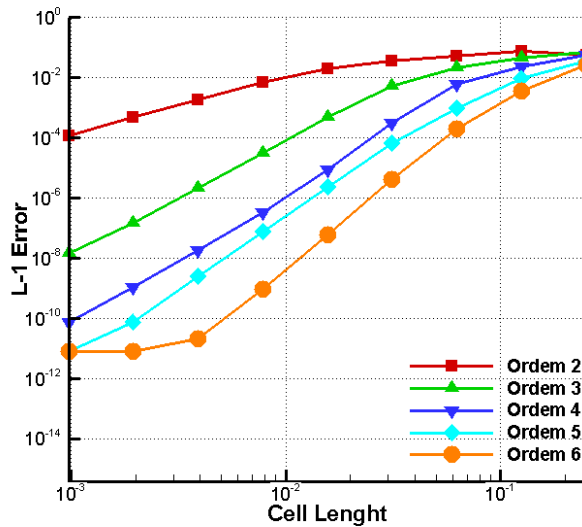


Fig. 2 Gráfico da norma L-1 do erro em função do tamanho das células para o pulso gaussiano

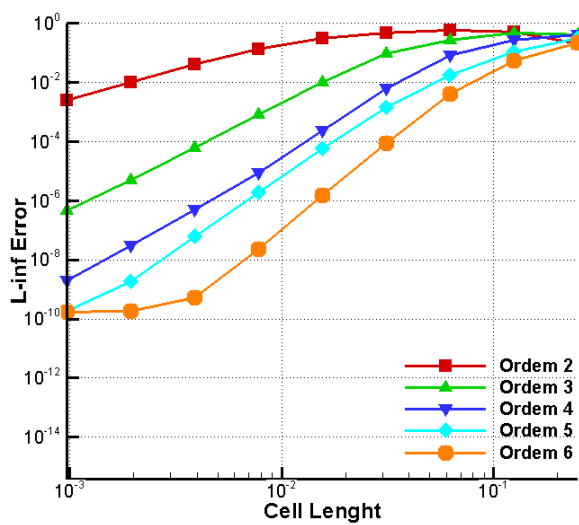


Fig. 3 Gráfico da norma L-inf do erro em função do tamanho das células para o pulso gaussiano

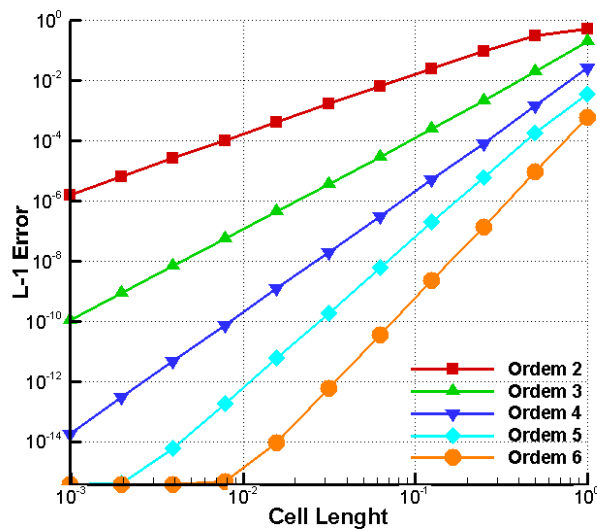


Fig. 4 Gráfico da norma L-1 do erro em função do tamanho das células para a onda senoide

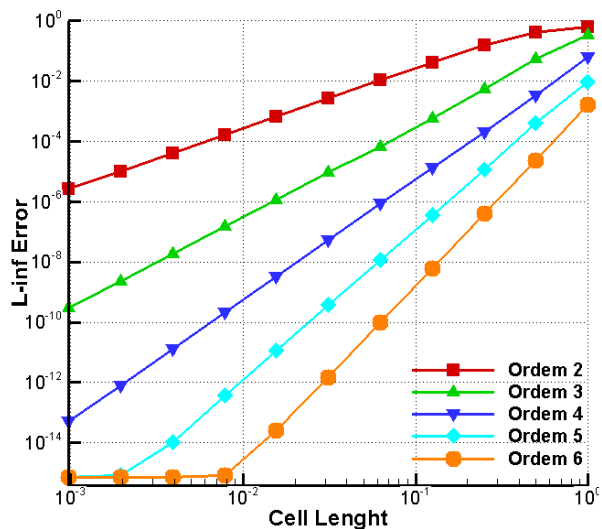


Fig. 5 Gráfico da norma L-inf do erro em função do tamanho das células para a onda senoide

Tabela 1 Ordens calculadas por regressão linear

p	Senoide		Pulso Gaussiano	
	Ordem L-inf	Ordem L-1	Ordem L-inf	Ordem L-1
1	1.96	1.97	1.93	1.86
2	3.02	3.05	3.57	3.76
3	4.00	4.03	4.30	4.42
4	4.98	4.94	4.90	4.92
5	5.89	5.84	5.78	5.84

Também foi feita uma comparação entre dois métodos de marcha no tempo, ambos do tipo Runge-Kutta explícitos, um de terceira e outro de quarta ordem. A diferença entre os dois tipos de discretização temporal foi pequena o suficiente para que o erro pela discretização

temporal pudesse ser ignorado. Assim podemos assumir que todo o erro restante é característico da discretização espacial, ou seja do método de diferenças espectrais.

A implementação do marcador foi bem sucedida como mostra a figura 6, nela estão destacados em vermelho as regiões em que foram detectadas instabilidades. Como esperado foram marcados os arredores das discontinuidades da onda na seção quadrada e na seção triangular e não foram marcados os extremos suaves na parte gaussiana e na senoidal. Para a etapa limitadora estão sendo estudadas outras opções uma vez que é muito caro computacionalmente calcular todas as derivadas em cada célula para fazer a nova reconstrução.

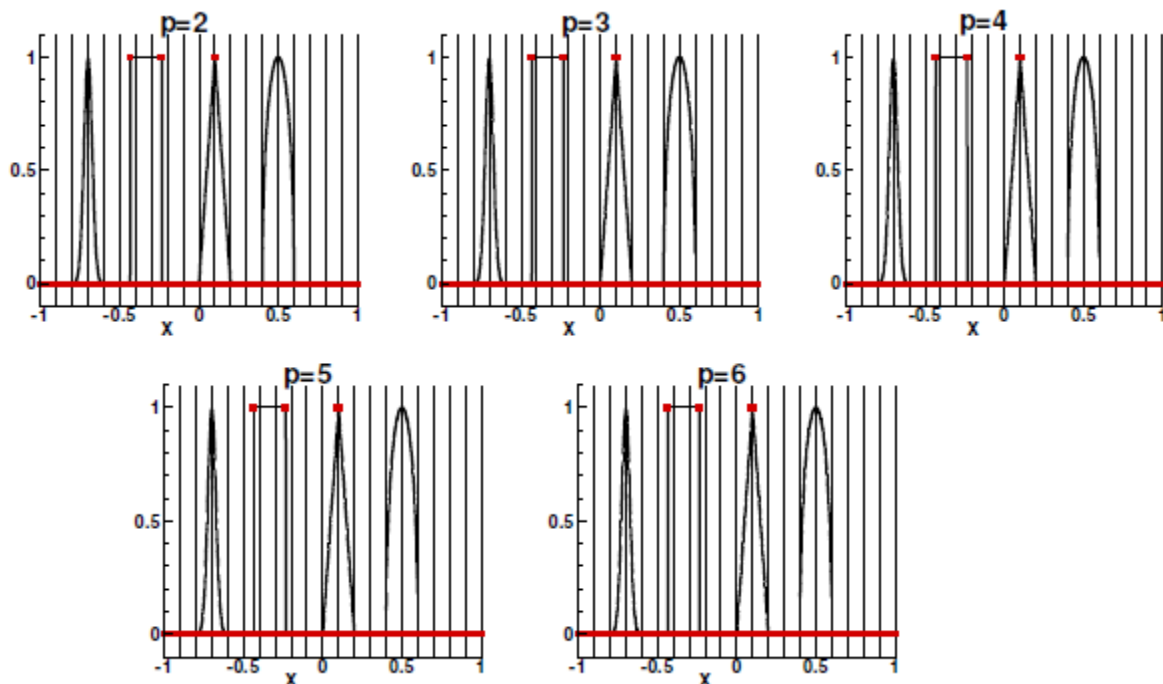


Fig. 6 Gráfico dos pontos marcados pelo limitador para cada ordem de reconstrução numa onda mista.

#### 4. Trabalho Futuro

O próximo objetivo do projeto é o desenvolvimento e verificação de um código de simulação bidimensional para as equações de Euler, inicialmente para problemas com solução suave, sem a presença de discontinuidades. A expansão para casos descontínuos será feita usando um limitador diferente do atual seguindo a tendencia verificada nas publicações mais recentes.



## Referências

- [1] Liu, Y., Vinokur, M., Wang, Z.J., "Discontinuous Spectral Difference Method for Conservation Laws on Unstructured Grids", *Proceedings of the 3rd International Conference on Computational Fluid Dynamics*, Toronto, Canada, July 2004.
- [2] Liu, Y., Vinokur, M., Wang, Z. J., "Multi-Dimensional Spectral Difference Method for Unstructured Grids", AIAA Paper No. 2005-0320, *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, Jan. 2005.
- [3] Wang, Z. J., Liu, Y., May, G., Jameson, A., "Spectral Difference Method for Unstructured Grids II: Extension to the Euler Equations", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 32, No. 1, July 2007, pp. 45-71.
- [4] Abeelee, K. V., Lacor, C., Wang, Z. J., "On the connection between the spectral volume and the spectral difference method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227. No. 2, Dec. 2007, pp. 877-885
- [5] Yang, M., Wang, Z.J., "A Parameter-Free Generalized Moment Limiter for High-Order Methods on Unstructured Grids", AIAA Paper No. 2009-605, *47<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, Orlando, FL, Jan. 2009.