IMECC - UNICAMP
MS777 - Projeto Supervisionado
Funções de Green para Equações de Difusão Fracionárias

Autora: Stefânia Jarosz
Orientador: Prof. Jayme Vaz Jr

9 de julho de 2012

1 Resumo

Neste trabalho encontraremos funções de Green para a equação de difusão fracionária, para diferentes problemas de valor de contorno: condições de absorção e reflexão em uma barra semi-infinita, e depois em uma barra finita. Após defirnirmos o operador de derivação fracionária, encontraremos as funções de Green para cada problema utilizando transformadas de Fourier e de Laplace, o método das imagens e expansão em auto-funções.

2 Introdução

2.1 A equação de difusão

A equação de difusão descreve um fenômeno físico de transporte de uma substância através de um meio contínuo, buscando pelo estado de equilíbrio. Podemos citar como exemplos a passagem de calor através de uma superfície, fumaça através do ar, soluto através de um solvente, entre outros. A equação de difusão é definida como

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K\nabla^2 W \tag{1}$$

onde W representa a quantidade da substância difundida na posição x e no instante t, definida por uma grandeza adequada, e K uma constante relacionada ao problema. Como nossa teoria será desenvolvida sobre regiões unidimensionais, podemos escrever a equação na forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t}(x,t) = K\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t) \tag{2}$$

2.2 A Equação de Difusão Fracionária

Em algumas situações, a equação clássica de difusão não descreve corretamente o problema. Isso pode acontecer pois esse modelo considera que a evolução da quantidade de substância num dado instante é afetada apenas pelos pontos próximos. Quando a quantidade de substância em um dado ponto sofre influência de pontos distantes, dizemos que a difusão é anômala; podemos citar como exemplo a difusão turbulenta na atmosfera.

Uma forma de incorporar este comportamento ao modelo consiste em utilizar cálculo fracionário. Vários estudiosos trabalharam com cálculo fracionário, dando origem a diferentes definições, sendo as mais utilizadas a de Riemann-Liouville (apêndice A) e a de Caputo (apêndice B). A equação de difusão fracionária (EDF) pode ser definida tanto com a derivada fracionária em relação ao espaço:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K_\mu \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^\mu} W(x,t) \tag{3}$$

quanto em relação ao tempo:

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} W = K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) \tag{4}$$

ou ainda em relação ao tempo e ao espaço, simultaneamente:

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} W = K_\mu \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^\mu} W(x,t) \tag{5}$$

podemos, inclusive utilizar as duas definições numa mesma EDF, isto é, a derivada em x na definição de Riemann-Liouville e a derivada em t na definição de Caputo, ou vice-versa, de acordo com a necessidade do problema estudado. Neste trabalho, estudaremos a difusão anômala em relação ao tempo utilizando a definição de Riemann-Liouville. Deste modo, definiremos a equação de difusão fracionária da seguinte maneira:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\gamma}\, K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) \tag{6}$$

com $0 < \gamma < 1$, $t > 0$ e ${}_0D_t^{1-\gamma}$ é o operador fracionário de Riemann-Liouville, definido por

$${}_0D_t^{1-\gamma}\, W(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t dt' \frac{W(x,t')}{(t-t')^{1-\gamma}} \tag{7}$$

Equivalentemente, há a forma integral da equação (6), dada por:

$$W(x,t) - W_0(x) = {}_0D_t^{-\gamma}\, K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) \tag{8}$$

que incorpora o valor inicial $W_0(x) \equiv \lim_{t\to 0^+} W(x,t)$ e basta derivar (8) com relação à variável t para obter (6) e, deste modo, o operador de Riemann-Liouville é definido como:

$${}_0D_t^{\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t dt' \frac{W(x,t')}{(t-t')^{-\gamma}} \tag{9}$$

2.3 Funções de Green

Para resolver equações diferenciais não-homogêneas sujeitas a condições de contorno, podemos utilizar as funções de Green.

Seja $L[u(x)]$ um operador diferencial sobre $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. A função de Green $G(x, \xi)$ do problema $L[u(x)] = f(x)$ é definida como a solução da equação diferencial

$$L[G(x, \xi)] = \delta(x - \xi) \tag{10}$$

onde $\delta(x) = \delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$ é a distribuição Delta de Dirac, sob as mesmas condições de contorno do problema original.

E, assim, utilizando as condições dadas pelo problema e impondo condições adicionais sobre a função de Green para determiná-la precisamente, que variam de acordo com o problema abordado, conseguimos encontrar a solução do problema a partir da função de Green. No nosso caso, aproveitando a simetria dos problemas estudados, empregaremos o método das imagens e a expansão em autofunções, com o auxílio de transformadas de Fourier e Laplace para encontrar a função de Green de cada problema.

3 Difusão fracionária em uma barra semi-infinita

Nessa seção, estudaremos a difusão fracionária no semi-eixo real positivo, isto é, $x > 0$, para dois tipos de condição de contorno: de reflexão e de absorção.

A função de Green $G(x, t; \xi, \tau)$ do problema dado pela equação (6) em $x \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t; \xi; \tau) - {}_0D_t^{1-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t; \xi, \tau) = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \tag{11}$$

para $x > 0, \xi > 0, t > 0$ e $\tau > 0$.

Observamos que, nesse caso, é equivalente encontrar a solução de

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) - {}_0D_t^{1-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t) = \delta(x)\delta(t) \tag{12}$$

devido aos teoremas de translação das transformada de Fourier e Laplace, dados por:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_x[f(x - \xi)](k) = e^{i\xi k} \mathcal{F}_x[f(x)](k) \\ \mathcal{L}_t[g(t - \tau)](u) = e^{-\tau u} \mathcal{L}_t[g(t)](u) \end{cases}$$

Tomando $G(x, t) = W(x, t)H(t)$ na equação (12), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t)H(t) - {}_0D_t^{1-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t)H(t) = \delta(x)\delta(t)$$

$$\Rightarrow W_t H(t) + W(x, t)\delta(t) - {}_0D_t^{1-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t)H(t) = \delta(x)\delta(t) \tag{13}$$

Integrando com relação a t, obtemos:

$$W(x, t) - W(x, 0) + \int_0^t W(x, t')\delta(t')dt' - {}_0D_t^{-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) = \delta(x) \left(H(t) - H(0^+)\right) \tag{14}$$

Como $\delta(t) = 0$ para $t \to 0^+$, tomando a condição inicial $W(x,0) = \delta(x)$, obtemos:

$$W(x,t) - \delta(x) - {}_0D_t^{-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) = \delta(x)H(t) = 0 \tag{15}$$

Derivando em relação a t, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x,t) - {}_0D_t^{1-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) = 0 \tag{16}$$

Deste modo, a equação (12) é equivalente a:

$$\begin{cases} W_t - {}_0D_t^{1-\gamma} K_\gamma W_{xx} = 0 \quad t > 0 \\ W(x,0) = \delta(x) \end{cases} \tag{17}$$

E então podemos utilizar a forma integral de (17), dada pela equação (8), obtendo:

$$G(x,t) - {}_0D_t^{-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t) = \delta(x) \tag{18}$$

Assim, reduzimos o problema a encontrar a função de Green unidimensional da equação em x. Aplicando transformada de Fourier, na variável x, à equação (18), obtemos:

$$\mathcal{F}_x \left[G - G_0\right](k) = \mathcal{F}_x \left[G - \delta(x)\right](k) = \hat{G}(k,t) - 1$$

$$\mathcal{F}_x \left[{}_0D_t^{-\gamma} K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} G\right](k) = {}_0D_t^{-\gamma} K_\gamma \mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} G\right](k) = {}_0D_t^{-\gamma} K_\gamma (-k^2) \hat{G}(k,t)$$

E assim, obtemos a equação:

$$\hat{G}(k,t) - 1 = -k^2 \, {}_0D_t^{-\gamma} K_\gamma \hat{G}(k,t) \tag{19}$$

Aplicando a transformada de Laplace na variável t à equação:

$$\mathcal{L}_t \left[\hat{G}(k,t) - 1\right](u) = \tilde{G}(k,u) - \frac{1}{u}$$

$$\mathcal{L}_t \left[-k^2 \, {}_0D_t^{-\gamma} K_\gamma \hat{G}(k,t)\right](u) = \frac{-k^2}{\Gamma(\gamma)} \mathcal{L}_t \left[\int_0^t dt' K_\gamma \frac{\hat{G}(k,t)}{(t-t')^{-\gamma}}\right](u)$$

Notemos que o operador de Riemann-Liouville é definido através de um produto de convolução e, portanto, podemos aplicar a propriedade da transformada de Laplace do produto de convolução:

$$\frac{-k^2 K_\gamma}{\Gamma(\gamma)} \mathcal{L}_t \left[\hat{G}(k,t) * \frac{1}{t^{-\gamma}}\right](u) = \frac{-k^2 K_\gamma}{\Gamma(\gamma)} \mathcal{L}_t \left[\hat{G}(k,t)\right](u) \mathcal{L}_t \left[\frac{1}{t^{-\gamma}}\right](u)$$

$$= \frac{-k^2 K_\gamma}{\Gamma(\gamma)} \tilde{G}(k,u) \frac{\Gamma(\gamma)}{u^\gamma} = -k^2 K_\gamma u^{-\gamma} \tilde{G}(k,u) \tag{20}$$

e deste modo, aplicando a transformada de Laplace à equação (19), obtemos a equação:

$$\tilde{G}(k,u) - \frac{1}{u} = -k^2 K_\gamma u^{-\gamma} \tilde{G}(k,u)$$

que nos fornece

$$\tilde{G}(k,u) = \frac{u^{\gamma-1}}{u^{\gamma} + K_{\gamma}k^2} \tag{21}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace à equação (21), obtemos:

$$\hat{G}(k,t) = \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{u^{\gamma-1}}{u^{\gamma} + K_{\gamma}k^2}\right] = \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{1}{u + u^{1-\gamma}K_{\gamma}k^2}\right] \tag{22}$$

Antes de prosseguir, precisaremos deduzir alguns resultados:

Definição 1. A função de Mittag-Leffler é definida como:

$$E_{\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\gamma+1)} \tag{23}$$

Proposição 1.

$$\mathcal{L}_t\left[E_{\gamma}\left(-K_{\gamma}k^2t^{\gamma}\right)\right](u) = \frac{1}{u + u^{1-\gamma}K_{\gamma}k^2}$$

Demonstração.

$$\mathcal{L}_t\left[E_{\gamma}\left(-K_{\gamma}k^2t^{\gamma}\right)\right](u) = \mathcal{L}_t\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-K_{\gamma}k^2t^{\gamma}\right)^n}{\Gamma(n\gamma+1)}\right](u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(K_{\gamma}k^2\right)^n\mathcal{L}[t^{\gamma n}]}{\Gamma(\gamma n+1)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(K_{\gamma}k^2\right)^n\Gamma(\gamma n+1)}{\Gamma(\gamma n+1)u^{\gamma n+1}} = \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{K_{\gamma}k^2}{u^{\gamma}}\right)^n = \frac{1}{u(1+K_{\gamma}k^2u^{-\gamma})}$$

se $\left|K_{\gamma}k^2u^{-\gamma}\right| < 1$. □

e, deste modo,

$$\hat{G}(k,t) = H(t)E_{\gamma}\left(-K_{\gamma}k^2t^{\gamma}\right) \tag{24}$$

Proposição 2. A representação integral da função de Mittag-Leffler é dada por:

$$E_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\gamma s)}(-z)^{-s}ds$$

onde C é definida de modo a obtermos um contorno que separe os pólos de $\Gamma(s)$ dos pólos de $\Gamma(1-s)$.

Demonstração. Através do teorema dos resíduos, calcularemos a integral na curva $L \subset \mathbb{C}$ que contém os pólos de $\Gamma(s)$, e assim obtemos:

$$R_n = \lim_{s\to -n}\frac{(s+n)\Gamma(s)\Gamma(1-s)(-z)^{-s}}{\Gamma(1-\gamma s)} = \lim_{s\to -n}\frac{\Gamma(s+n+1)\Gamma(1-s)(-z)^{-s}}{(s+n-1)\cdots s\Gamma(1-\gamma s)}$$

$$\frac{\Gamma(1)\Gamma(1+n)(-z)^n}{(-1)\cdots(-n)\Gamma(1+\gamma n)} = \frac{(-1)^n n!(-z)^n}{n!\Gamma(1+\gamma n)} = \frac{z^n}{\Gamma(1+\gamma n)}$$

onde R_n é o resíduo para cada pólo. Assim:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\gamma s)}(-z)^{-s}ds = \frac{2\pi i}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}R_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+\gamma n)} = E_{\gamma}(z)$$

conforme a definição para a função de Mittag-Leffler da equação (23). □

Observação: Na demonstração, utilizamos $(s+n)\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n-1)\cdots s}$

Demonstração. Para $n = 0$, $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ é uma propriedade conhecida da função Gama. Agora, supondo que a relação vale para n:

$$\frac{\Gamma(s+(n+1)+1)}{s+(n+1)-1} = \frac{(s+n+1)\Gamma(s+n+1)}{(s+(n+1)-1)(s+(n+1)-2)\dots s}$$

$$= \frac{(s+n+1)}{s+n}\frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n-1)\cdots s} = \frac{(s+n+1)}{s+n}(s+n)\Gamma(s) = (s+n+1)\Gamma(s)$$

□

Aplicando a transformada de Fourier inversa à equação (24),

$$G(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[\hat{G}(k,t)\right] = \mathcal{F}_x^{-1}\left[E_\gamma\left(-K_\gamma k^2 t^\gamma\right)\right] = \mathcal{F}_x^{-1}\left[E_\gamma\left(-K_\gamma k^2 t^\gamma\right)\right]$$

utilizando a representação integral da Mittag-Leffler, obtemos:

$$\mathcal{F}_x^{-1}[E_\gamma\left(-K_\gamma k^2 t^\gamma\right)] = \mathcal{F}_x^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\gamma s)}(K_\gamma k^2 t^\gamma)^{-s}ds\right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\gamma s)}(K_\gamma t^\gamma)^{-s}\mathcal{F}^{-1}\left[k^{-2s}\right]ds$$

Usando o fato que

$$\mathcal{F}_x\left[|x|^\alpha\right] = -2|k|^{-1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$$

obtemos

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left[k^{-2s}\right] = -\frac{1}{2}\frac{|x|^{2s-1}}{\Gamma(2s)\sin\frac{\pi(2s-1)}{2}}$$

e então:

$$\mathcal{F}_x^{-1}[E_\gamma\left(-K_\gamma k^2 t^\gamma\right)] = \frac{-1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)(K_\gamma t^\gamma)^{-s}|x|^{2s-1}}{\Gamma(1-\gamma s)\sin\frac{\pi(2s-1)}{2}}ds$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = -s + \frac{1}{2}$:

$$\mathcal{F}_x^{-1}[E_\gamma\left(-K_\gamma k^2 t^\gamma\right)] = \frac{-1}{4\pi i}\int_{\hat{C}+i\infty}^{\hat{C}-i\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-y)\Gamma(1+y-\frac{1}{2})(K_\gamma t^\gamma)^{y-\frac{1}{2}}|x|^{-2y}}{\Gamma(1-\frac{\gamma}{2}+\gamma y)\Gamma(-2y+1)\sin(-\pi y)}(-dy)$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{K_\gamma t^\gamma}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{C}-i\infty}^{\hat{C}+i\infty}\frac{\Gamma(y+\frac{1}{2})}{\Gamma(1-\frac{\gamma}{2}+\gamma y)}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-y)}{\Gamma(-2y+1)\sin(-\pi y)}\left(\frac{|x|^2}{K_\gamma t^\gamma}\right)^{-y}dy \tag{25}$$

utilizando a fórmula de reflexão da função Gama, obtemos:

$$\frac{1}{\sin(-\pi y)} = \frac{-1}{\sin\pi y} = \frac{-\Gamma(y)\Gamma(1-y)}{\pi}$$

utilizando a propriedade $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, a fórmula da duplicação de Legendre e novamente a fórmula de reflexão, obtemos:

$$\frac{1}{\Gamma(-2y+1)} = \frac{1}{-2y\Gamma(-2y)} = \frac{\sqrt{\pi}}{-2y2^{-2y-1}\Gamma(-y)\Gamma(-y+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2y}\Gamma(1-y)\Gamma(-y+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\Gamma(-2y+1)\sin(-\pi y)} = \frac{-\Gamma(y)\sqrt{\pi}}{2^{-2y}\Gamma(-y+\frac{1}{2})}$$

Substituindo estes resultados na equação (25):

$$\mathcal{F}_x^{-1}[E_\gamma\left(-K_\gamma k^2 t^\gamma\right)] = \frac{1}{\sqrt{4K_\gamma t^\gamma}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}-i\infty}^{\hat{C}+i\infty} \frac{\Gamma(y+\frac{1}{2})}{\Gamma(1-\frac{\gamma}{2}+\gamma y)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-y)(-\Gamma(y)\sqrt{\pi})}{2^{-2y}\Gamma(\frac{1}{2}-y)\pi} \left(\frac{|x|^2}{K_\gamma t^\gamma}\right)^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\gamma t^\gamma}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}-i\infty}^{\hat{C}+i\infty} \frac{\Gamma(y)\Gamma(\frac{1}{2}+y)}{\Gamma(1-\frac{\gamma}{2}+\gamma y)} \left(\frac{|x|^2}{4K_\gamma t^\gamma}\right)^{-y} dy$$

E assim:

$$G(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}[E_\gamma\left(-K_\gamma k^2 t^\gamma\right)] = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi K_\gamma t^\gamma}} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4K_\gamma t^\gamma}\left|\begin{array}{c}(1-\frac{\gamma}{2},\gamma)\\(0,1),(\frac{1}{2},1)\end{array}\right.\right] \tag{26}$$

onde H é a função H de Fox, definida por

$$H_{m,n}^{p,q}\left[z\left|\begin{array}{c}(a_1,\alpha_1),\cdots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\cdots,(a_q,\beta_q)\end{array}\right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} g(s) z^{-s} ds \tag{27}$$

onde C define um contorno que separa os pólos das $\Gamma(b_k + \beta_k s)$ dos pólos das $\Gamma(1 - a_j - \alpha_j s)$ e

$$g(s) = \frac{\prod_{k=1}^{m}\Gamma(b_k+\beta_k s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s)}{\prod_{k=m+1}^{q}\Gamma(1-b_k-\beta_k s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j s)}$$

3.1 Condição de contorno refletora

Uma condição de reflexão é definida como um problema de Neumann, isto é, uma condição sobre a derivada da solução na fronteira, na forma $\frac{\partial W}{\partial x}(x,t)\big|_{\partial D} = 0$, onde ∂D é a fronteira do domínio do problema. Para a barra semi-infinita, o contorno é $x = 0$, assim a condição de contorno do problema é

$$\left.\frac{\partial Q(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{28}$$

de modo que, $Q(x,t;\xi,\tau)$ é a função de Green completa do problema, ou seja, possui uma parte regular e uma parte singular em ξ:

$$Q(x,t;\xi,\tau) = G(x-\xi,t-\tau) + H(x,t;\xi,\tau) \tag{29}$$

onde $G(x-\xi,t-\tau)$ representa a parte singular e $H(x,t;\xi,\tau)$ representa a parte regular da solução e é a solução da equação homogênea associada, no ponto $x = \xi$. Utilizando o método das imagens, isto é, escrevendo $H(x,t;\xi,\tau) = kG(\hat{x}-\xi,t-\tau)$, onde $\hat{x}$ se escreve em função de x, vamos encontrar a forma geral de $Q(x,t;\xi,\tau)$, lembrando que a condição de Neumann deve ser satisfeita. Desse modo,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t;\xi,\tau)\bigg|_{x=0} = \frac{\partial G}{\partial x}(x-\xi,t-\tau)\bigg|_{x=0} + \frac{\partial H}{\partial x}(x,t;\xi,\tau)\bigg|_{x=0} = 0$$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x}(-\xi,t-\tau) + \frac{\partial H}{\partial x}(0,\xi,t,\tau) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x}(0,\xi,t,\tau) = -\frac{\partial G}{\partial x}(-\xi,t-\tau)$$

Como $H(x,t;\xi,\tau) = kG(\hat{x}(x)-\xi,t-\tau)$, temos que:

$$H(x,t;\xi,\tau) = G(-x-\xi,t-\tau) \tag{30}$$

E assim podemos escrever

$$Q(x,t;\xi,\tau) = G(x-\xi,t-\tau) + G(-x-\xi,t-\tau) \tag{31}$$

A parte singular da função de Green é dada pela equação (26). Porém, para facilitar a compreensão do resultado, vamos reescrevê-la antes de substituir em (31):

Proposição 3.

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi K_\gamma t^\gamma}} H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{|x|^2}{4K_\gamma t^\gamma}\middle| \begin{array}{c}(1-\frac{\gamma}{2},\gamma)\\(0,1),(\frac{1}{2},1)\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{4K_\gamma t^\gamma}} H^{1,0}_{1,1}\left[\frac{|x|}{\sqrt{K_\gamma t^\gamma}}\middle| \begin{array}{c}(1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})\\(0,1)\end{array}\right]$$

Demonstração.

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi K_\gamma t^\gamma}} H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{|x|^2}{4K_\gamma t^\gamma}\middle| \begin{array}{c}(1-\frac{\gamma}{2},\gamma)\\(0,1),(\frac{1}{2},1)\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\gamma t^\gamma}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{C}-i\infty}^{\hat{C}+i\infty}\frac{\Gamma(y)\Gamma(\frac{1}{2}+y)}{\Gamma(1-\frac{\gamma}{2}+\gamma y)}\left(\frac{|x|^2}{4K_\gamma t^\gamma}\right)^{-y}dy$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = y/2$, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi K_\gamma t^\gamma}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{C}-i\infty}^{\hat{C}+i\infty}\frac{\Gamma(s/2)\Gamma(\frac{1}{2}+s/2)}{2\Gamma(1-\frac{\gamma}{2}+\gamma s/2)}\left(\frac{|x|^2}{4K_\gamma t^\gamma}\right)^{-s/2}ds$$

Utilizando a fórmula da duplicação de Legendre, isto é, $2^{s-1}\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(s)$ obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{4K_\gamma t^\gamma}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{C}-i\infty}^{\hat{C}+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-\frac{\gamma}{2}+\gamma s/2)}\left(\frac{|x|}{\sqrt{K_\gamma t^\gamma}}\right)^{-s}ds$$

Que é o mesmo que:

$$= \frac{1}{\sqrt{4K_\gamma t^\gamma}} H^{1,0}_{1,1}\left[\frac{|x|}{\sqrt{K_\gamma t^\gamma}}\middle| \begin{array}{c}(1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})\\(0,1)\end{array}\right] \tag{32}$$

□

Substituindo em (31), obtemos:

$$Q(x,t;\xi,\tau) = \frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4K_\gamma(t-\tau)^\gamma}} H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x-\xi|}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\middle| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}) \\ (0,1) \end{matrix}\right] \tag{33}$$

$$+\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4K_\gamma(t-\tau)^\gamma}} H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x+\xi|}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\middle| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}) \\ (0,1) \end{matrix}\right]$$

Reescrevendo sem utilizar a notação de módulo, vemos que:

$$Q(x,t;\xi,\tau) = \frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\left(H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{\xi-x}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\middle| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}) \\ (0,1) \end{matrix}\right](H(x)-H(x-\xi)) \right. \tag{34}$$

$$\left. +H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{x-\xi}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\middle| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}) \\ (0,1) \end{matrix}\right] H(x-\xi) + H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{x+\xi}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\middle| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}) \\ (0,1) \end{matrix}\right]\right)$$

Escrevendo deste modo, fica mais fácil observar a descontinuidade da derivada parcial em relação a x no ponto $x=\xi$, que é uma característica da função de Green de um problema de segunda ordem.

3.2 Condição de contorno de absorção

Uma condição de absorção é definida como um problema de Dirichlet, ou seja, uma condição sobre a solução na fronteira, na forma $W(x,t)|_{x\in\partial D}=0$, onde ∂D é a fronteira do domínio sobre o qual o problema está definido. No caso da barra semi-infinita, a fronteira é $x=0$, deste modo, a condição de absorção é dada por:

$$Q(0,t;\xi,\tau)=0 \tag{35}$$

com $Q(0,t;\xi,\tau)$ dado por:

$$Q(x,t;\xi,\tau)=G(x-\xi;t-\tau)+\hat{H}(x,\xi;t,\tau) \tag{36}$$

com $G(x-\xi,t-\tau)$ representando a parte singular e $\hat{H}(x,\xi;t,\tau)$ representando a parte regular, no ponto $x=\xi$, da função de Green, que determinaremos utilizando mais uma vez o método das imagens. Pela condição de Dirichlet:

$$Q(0,t;\xi,\tau)=G(-\xi,t-\tau)+\hat{H}(0,t;\xi,\tau)=0 \Rightarrow \hat{H}(0,t;\xi,\tau)=-G(-\xi,t-\tau)$$

Pelo método das imagens $\hat{H}(x,t;\xi,\tau)=kG(\hat{x}-\xi,t-\tau)$, com $\hat{x}$ dado em função de x, concluímos que:

$$H(x,t;\xi,\tau)=-G(-x-\xi,t-\tau) \tag{37}$$

E assim, a função de Green completa do problema fica na forma:

$$Q(x,t;\xi,\tau)=G(x-\xi,t-\tau)-G(-x-\xi,t-\tau) \tag{38}$$

Substituindo (32) na equação,

$$Q(x,t;\xi,\tau) = \frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4K_\gamma(t-\tau)^\gamma}} H^{1,0}_{1,1}\left[\frac{|x-\xi|}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\left|\begin{matrix}(1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})\\(0,1)\end{matrix}\right.\right] \tag{39}$$

$$-\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4K_\gamma(t-\tau)^\gamma}} H^{1,0}_{1,1}\left[\frac{|x+\xi|}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\left|\begin{matrix}(1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})\\(0,1)\end{matrix}\right.\right]$$

Reescrevendo:

$$Q(x,t;\xi,\tau) = \frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\left(H^{1,0}_{1,1}\left[\frac{\xi-x}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\left|\begin{matrix}(1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})\\(0,1)\end{matrix}\right.\right](H(x)-H(x-\xi))\right. \tag{40}$$

$$\left.+H^{1,0}_{1,1}\left[\frac{x-\xi}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\left|\begin{matrix}(1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})\\(0,1)\end{matrix}\right.\right]H(x-\xi) - H^{1,0}_{1,1}\left[\frac{x+\xi}{\sqrt{K_\gamma(t-\tau)^\gamma}}\left|\begin{matrix}(1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})\\(0,1)\end{matrix}\right.\right]\right)$$

4 Difusão fracionária em uma barra finita

Agora, consideraremos o problema em um domínio limitado, mais especificamente no intervalo $-a \leq x \leq a$, com $a > 0$. Para encontrar a função de Green neste domínio, utilizaremos a técnica da expansão em autofunções.

Aplicando a transformada de Laplace na variável t à equação (18), obtemos:

$$\mathcal{L}_t\left[G(x,t) - {}_0D_t^{-\gamma}\, K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,t)\right](u) = \mathcal{L}_t[\delta(x)](u)$$

$$\hat{G}(x,u) - K_\gamma u^{-\gamma}\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial x^2}(x,u) = \frac{\delta(x)}{u}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial x^2}(x,u) - \frac{u^\gamma}{K_\gamma}\hat{G}(x,u) = \frac{u^{\gamma-1}\delta(x)}{K_\gamma}$$

Deste modo, reduzimos o problema a encontrar a função de Green em x. Utilizando o método da expansão em autofunções, a função de Green no espaço de Laplace é dada por

$$\hat{Q}(x,\xi,u) = \frac{u^{\gamma-1}}{K_\gamma}\sum_{n\in I}\frac{\bar{\phi}_n(\xi)\phi_n(x)}{\lambda_n + \frac{u^\gamma}{K_\gamma}} \tag{41}$$

onde $\phi_n(x)$ é a autofunção normalizada associada ao autovalor λ_n, e $\bar{\phi}_n$ é a sua função conjugada normalizada, do problema de Sturm-Liouville, com a condição de contorno específica, do problema:

$$\left\{\ \phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0 \quad -a \leq x \leq a\right. \tag{42}$$

4.1 Condição de Contorno de Absorção

De acordo com a discussão feita no problema da barra semi-infinita, a condição de absorção para o problema da barra finita, que é definida como um problema de Dirichlet, é dada por:

$$Q(-a,t;\xi,\tau) = Q(a,t;\xi,\tau) = 0 \tag{43}$$

Assim, as autofunções deste problema são dadas pelo Problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0 & -a \le x \le a \\ \phi(-a) = \phi(a) = 0 \end{cases} \tag{44}$$

Para $\lambda = 0$, obtemos a equação $\phi''(x) = 0$, cuja solução é $\phi(x) = c_0 + c_1 x$. Utilizando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} &\phi(-a) = c_0 - c_1 a = 0 \Rightarrow c_0 = c_1 a \\ &\phi(a) = c_1 a + c_1 a = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \end{aligned}$$

Deste modo, não existem autofunções associadas a $\lambda = 0$.

Para $\lambda = -k^2 < 0$, obtemos a equação $\phi''(x) - k^2\phi(x) = 0$, cuja solução é $\phi(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$. Utilizando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} &\phi(-a) = c_1 e^{-ka} + c_2 e^{ka} = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 e^{2ka} \\ &\phi(a) = c_1 e^{ka} + c_2 e^{-ka} = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 e^{2ka} = c_2 e^{4ka} \end{aligned}$$

Se $c_2 \neq 0, e^{4ka} = 1 \Rightarrow 4ka = 0 \Rightarrow k = 0$, o que é contradição visto que supomos $\lambda \neq 0$. Logo, $c_2 = 0$. Como $c_1 = -c_2 e^{2ka}$, $c_1 = 0$. Deste modo, não existem autofunções associadas a $\lambda < 0$.

Para $\lambda = k^2 > 0$, obtemos a equação $\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0$, cuja solução é dada por $\phi(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$. Utilizando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} &\phi(-a) = c_1 \sin k(-a) + c_2 \cos k(-a) = -c_1 \sin ka + c_2 \cos ka = 0 \\ &\phi(a) = c_1 \sin ka + c_2 \cos ka = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear pelo método da adição, vemos que:

$$\begin{aligned} c_1 \sin ka = 0 \\ c_2 \cos ka = 0 \end{aligned}$$

Se $c_1 \neq 0$, então $ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$, para $n = 1, 2, \cdots$. Como esse valor de k não anula $\cos ka$, temos que $c_2 = 0$. Se $c_2 \neq 0$, então $ka = \frac{(2n+1)}{2}\pi \Rightarrow k = \frac{(2n+1)}{2a}\pi$, para $n = 0, 1, \cdots$, e $c_1 = 0$, pois esse valor de k não anula $\sin ka$. Deste modo, temos o seguinte conjunto de autovalores e autofunções:

$$\begin{cases} \lambda_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2}{4a^2}\pi^2, & \phi_{2n+1}(x) = \cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right), & n = 0, 1, \cdots \\ \lambda_{2n} = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, & \phi_{2n}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{45}$$

Normalizando as autofunções, obtemos:

$$\int_{-a}^{a} (\phi_{2n+1}(x))^2\, dx = \int_{-a}^{a} \left(\cos \frac{(2n+1)}{2a}\pi x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a \sin \frac{(2n+1)}{a}\pi x}{(2n+1)\pi}\right)_{-a}^{a} = a$$

$$\int_{-a}^{a} (\phi_{2n}(x))^2\, dx = \int_{-a}^{a} \left(\sin \frac{n\pi}{a}x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a \sin \frac{2n\pi}{a}x}{2n\pi}\right)_{-a}^{a} = a$$

Deste modo,

$$Q(x,\xi,u) = \frac{u^{\gamma-1}}{K_\gamma}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi\xi\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right)}{\sqrt{a}\sqrt{a}\left(\frac{(2n+1)^2}{4a^2}\pi^2 + \frac{u^\gamma}{K_\gamma}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}{\sqrt{a}\sqrt{a}\left(\frac{n^2}{a^2}\pi^2 + \frac{u^\gamma}{K_\gamma}\right)}\right)$$

Ajeitando os termos:

$$Q(x,\xi,u)=\frac{1}{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi\xi\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right)}{u+\frac{(2n+1)^2}{4a^2}\pi^2K_\gamma u^{1-\gamma}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}{u+\frac{n^2\pi^2}{a^2}K_\gamma u^{1-\gamma}}\right) \quad (46)$$

Utilizando a proposição (1) e aplicando a transformada de Laplace à equação:

$$Q(x,\xi,t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Q(x,\xi,u)\right]$$

$$=\frac{H(t)}{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi\xi\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right)E_\gamma\left[-K_\gamma\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4a^2}t^\gamma\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)E_\gamma\left[-K_\gamma\frac{n^2\pi^2}{a^2}t^\gamma\right]\right) \quad (47)$$

De onde obtemos a função de Green para o problema de absorção na barra finita:

$$Q(x,t;\xi,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi\xi\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right)E_\gamma\left[-K_\gamma\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4a^2}t^\gamma\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)E_\gamma\left[-K_\gamma\frac{n^2\pi^2}{a^2}t^\gamma\right]\right) \quad (48)$$

4.2 Condição de Contorno de Reflexão

Para a barra finita, a condição de reflexão, que é definida por um problema de Neumann, é dada por:

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t;\xi,\tau)\right|_{x=-a}=\left.\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t;\xi,\tau)\right|_{x=a}=0 \quad (49)$$

Neste caso, as autofunções do problema são dadas pelo Problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases}\phi''(x)+\lambda\phi(x)=0 & -a\leq x\leq a\\ \phi'(-a)=\phi'(a)=0\end{cases} \quad (50)$$

Para $\lambda=0$, obtemos a equação $\phi''(x)=0$, cuja solução é $\phi(x)=c_0+c_1x$. Utilizando as condições de contorno:

$$\begin{aligned}&\phi'(x)=c_1\\ &\phi'(-a)=c_1=0\\ &\phi'(a)=c_1=0\end{aligned}$$

Deste modo, a autofunção associada ao autovalor $\lambda_0=0$ é $\phi_0(x)=1$.

Para $\lambda=-k^2<0$, obtemos a equação $\phi''(x)-k^2\phi(x)=0$, cuja solução é $y(x)=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$. Utilizando as condições de contorno:

$$\begin{aligned}&\phi'(x)=kc_1e^{kx}-kc_2e^{-kx}\\ &\phi'(-a)=kc_1e^{-ka}-kc_2e^{ka}=0\Rightarrow c_1e^{-ka}-c_2e^{ka}=0\Rightarrow c_1=c_2e^{2ka}\\ &\phi'(a)=kc_1e^{ka}-kc_2e^{-ka}=0\Rightarrow c_1e^{ka}-c_2e^{-ka}=0\Rightarrow c_2=c_1e^{2ka}=c_2e^{4ka}\end{aligned}$$

Se $c_2 \neq 0, e^{4ka} = 1 \Rightarrow 4ka = 0 \Rightarrow k = 0$, o que é contradição visto que supomos $\lambda \neq 0$. Logo, $c_2 = 0$. Como $c_1 = -c_2 e^{2ka}$, $c_1 = 0$. Deste modo, não existem autofunções associadas a $\lambda < 0$.

Para $\lambda = k^2 > 0$, obtemos a equação $\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0$, cuja solução é dada por $\phi(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$. Utilizando as condições de contorno:

$$\begin{array}{l} \phi'(x) = kc_1 \cos kx - kc_2 \sin kx = 0 \\ \phi'(-a) = kc_1 \cos k(-a) - kc_2 \sin k(-a) = kc_1 \cos ka - kc_2 \sin ka = 0 \\ \phi'(x) = kc_1 \cos ka - kc_2 \sin ka = 0 \end{array}$$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, obtemos:

$$\begin{array}{l} kc_1 \cos ka = 0 \\ kc_2 \sin ka = 0 \end{array}$$

Como supomos $k \neq 0$, para $c_1 \neq 0$, $ka = \frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow k = \frac{2n+1}{2a}\pi$, para $n = 0, 1, \cdots$, e $c_2 = 0$, pois esse valor de k não anula $\sin ka$. Se $c_2 \neq 0$, então $ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$, para $n = 1, 2, \cdots$. Como esse valor de k não anula $\cos ka$, temos que $c_1 = 0$.

Deste modo, temos o seguinte conjunto de autovalores e autofunções:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \lambda_0 = 0 & \phi_0(x) = 1 & \\ \lambda_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2}{4a^2}\pi^2, & \phi_{2n+1}(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right), & n = 0, 1, \cdots \\ \lambda_{2n} = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, & \phi_{2n}(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & n = 1, 2, \cdots \end{array} \right. \tag{51}$$

Normalizando as autofunções, obtemos:

$$\int_{-a}^{a} 1 dx = 2a$$

$$\int_{-a}^{a} (\phi_{2n+1}(x))^2 \, dx = \int_{-a}^{a} \left(\cos \frac{2n+1}{2a}\pi x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a \sin \frac{2n+1}{a}\pi x}{2n+1\pi}\right)_{-a}^{a} = a$$

$$\int_{-a}^{a} (\phi_{2n}(x))^2 \, dx = \int_{-a}^{a} \left(\sin \frac{n\pi}{a}x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a \sin \frac{2n\pi}{a}x}{2n\pi}\right)_{-a}^{a} = a$$

Deste modo,

$$Q(x,\xi,u) = \frac{u^{\gamma-1}}{K_\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{2a}\sqrt{2a}\frac{u^\gamma}{K_\gamma}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2a}\pi\xi\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right)}{\sqrt{a}\sqrt{a}\left(\frac{(2n+1)^2}{4a^2}\pi^2 + \frac{u^\gamma}{K_\gamma}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}{\sqrt{a}\sqrt{a}\left(\frac{n^2}{a^2}\pi^2 + \frac{u^\gamma}{K_\gamma}\right)}\right)$$

Ajeitando os termos:

$$Q(x,\xi,u) = \frac{1}{2au} + \frac{1}{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)}{2a}\pi\xi\right)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2a}\pi x\right)}{u + \frac{(2n+1)^2}{4a^2}\pi^2 K_\gamma u^{1-\gamma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}{u + \frac{n^2\pi^2}{a^2}K_\gamma u^{1-\gamma}}\right) \tag{52}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$Q(x,\xi,t) = H(t)\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\left(+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)E_\gamma\left[-K_\gamma\frac{n^2\pi^2}{a^2}t^\gamma\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{(2n+1)}{2a}\pi\xi\right)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2a}\pi x\right)E_\gamma\left[-K_\gamma\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4a^2}t^\gamma\right]\right)\right] \quad (53)$$

E assim, a função de Green para o problema de reflexão barra finita é dada por

$$Q(x,t;\xi,\tau) = H(t-\tau)\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\left(+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)E_\gamma\left[-K_\gamma\frac{n^2\pi^2}{a^2}t^\gamma\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{(2n+1)}{2a}\pi\xi\right)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2a}\pi x\right)E_\gamma\left[-K_\gamma\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4a^2}t^\gamma\right]\right)\right] \quad (54)$$

5 Apêndice

A Operador Fracionário de Riemann-Liouville

A derivada não-fracionária possui a seguinte propriedade:

$$\frac{d}{dt}t^a = at^{a-1} \Rightarrow \frac{d^n}{dt^n}t^a = a(a-1)\cdots(a-n+1)t^{a-n} = \frac{a!}{(a-n)!}t^{a-n} \quad (55)$$

Como a função Gama é a generalização do fatorial para números não-naturais, desejamos obter uma definição de derivada fracionária que possua a seguinte propriedade:

$${}_0D_t^\alpha\, t^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)}t^{a-\alpha} \quad (56)$$

A definição de derivada fracionária que possui esta propriedade é bastante adequada para trabalhar com funções que admitem expansão em série de Taylor. Seja $f(t)$ uma função que pode ser expandida em série de potências

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (57)$$

aplicando a derivada fracionária munida da propriedade (56):

$${}_0D_t^\alpha\, f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {}_0D_t^\alpha\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)}t^{a-\alpha} \quad (58)$$

expandindo em série de Taylor em torno de $t = a$

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n \Rightarrow {}_0D_t^\alpha\, f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+1)}t^{n-a} \quad (59)$$

Para encontrar uma generalização para a derivada fracionária, podemos usar o fato de que a derivação é uma operação inversa à integração, deste modo podemos escrever:

$$\begin{array}{l} D^{-1}f(t) = \int_0^t f(t_1)dt_1 \\ D^{-2}f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2)dt_2dt_1 \\ \cdots \\ D^{-n}f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \cdots dt_2\, dt_1 \end{array} \tag{60}$$

Proposição 4.

$$\int_0^{t_{j-2}} \int_0^{t_{j-1}} f(t_j)dt_j\, dt_{j-1} = \int_0^{t_{j-2}} \int_{t_j}^{t_{j-2}} f(t_j)dt_{j-1}\, dt_j = \int_0^{t_{j-2}} f(t_j)\,(t_{j-2} - t_j)\,dt_j$$

Demonstração. Observando a imagem, notamos que t_j varia entre 0 e t_{j-2} e t_{j-1} varia entre t_j e t_{j-2}:

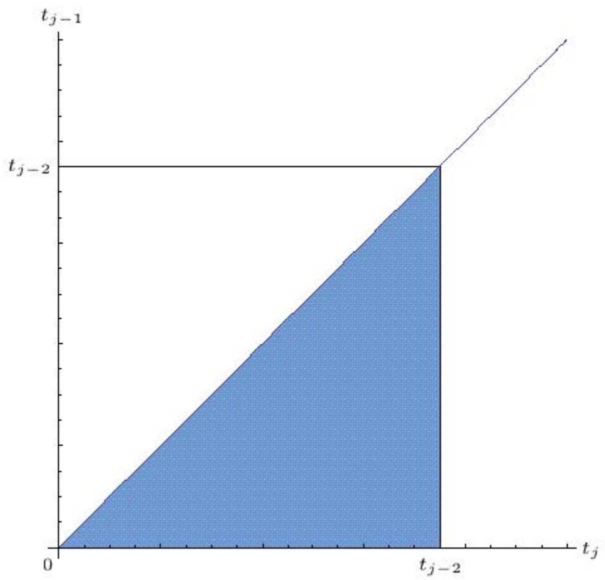

Figura 1: Região de integração

Deste modo, trocando a ordem de integração, obtemos

$$\int_0^{t_{j-2}} \int_{t_j}^{t_{j-2}} f(t_j)dt_{j-1}\, dt_j$$

e assim, temos:

$$\int_0^{t_{j-2}} f(t_j) \int_{t_j}^{t_{j-2}} dt_{j-1}\, dt_j = \int_0^{t_{j-2}} f(t_j)\,(t_{j-2} - t_j)\,dt_j \tag{61}$$

□

Então podemos reescrever D^{-n} como

$$D^{-n}f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(t')(t-t')^{n-1}dt' \tag{62}$$

e, a partir da generalização deste resultado, o operador fracionário de Riemann-Liouville é definido como:

$${}_0D_t^{-\alpha}\, f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t dt' \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\alpha}} \tag{63}$$

daí, segue imediatamente que

$$D^{-\alpha}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}D^{\alpha-n}f(t) \tag{64}$$

deste modo, podemos definir:

$${}_0D_t^{-\gamma}\, f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t dt' \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\gamma}} \tag{65}$$

para $0 < \gamma < 1$.

Dada uma potência qualquer, t^μ, temos:

$${}_0D_t^{-\gamma}\, t^\mu = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t \frac{t'^\mu}{(t-t')^{1-\gamma}}dt' \tag{66}$$

Aplicando transformada de Laplace, obtemos

$$\mathcal{L}\left[{}_0D_t^{-\gamma}\, t^\mu\right] = \mathcal{L}\left[t^\mu\right]\mathcal{L}\left[\frac{1}{t^{1-\gamma}}\right] = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma)u^{\mu+1}u^\gamma} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{u^{\mu+\gamma+1}} \tag{67}$$

utilizando a propriedade da transformada de Laplace de um produto de convolução. Aplicando agora a transformada inversa de Laplace:

$${}_0D_t^{-\gamma}\, t^\mu = \Gamma(\mu+1)\mathcal{L}\left[\frac{1}{u^{\mu+\gamma+1}}\right] = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\gamma+1)}t^{\mu+\gamma} \tag{68}$$

de modo que a propriedade desejada, dada pela equação (56), é satisfeita.

Aplicando este resultado à derivação de uma constante, vemos que ela não é 0, como na derivada não-fracionária:

$${}_0D_t^{-\gamma}\, 1 = {}_0D_t^{-\gamma}\, t^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\gamma+1)}t^\gamma = \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \tag{69}$$

Conforme já calculamos na equação (20), a transformada de Laplace do operador de Riemann-Liouville é dada por:

$$\mathcal{L}\left[{}_0D_t^{-\gamma}\, f(t)\right](u) = u^{-\gamma}\mathcal{L}\left[f(t)\right](u) \tag{70}$$

B Operador Fracionário de Caputo

A definição de Caputo para a derivada fracionária é dada por:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}} \frac{d^n}{dt^n} f(t)\bigg|_{t=\tau} d\tau, n-1 < \alpha < n \tag{71}$$

Este operador, diferentemente do de Riemann-Liouville, aplicado à uma constante resulta em 0. Aplicando a transformada de Laplace à equação:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{L}\left[\frac{1}{t^{1+\alpha-n}}\right] \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{u^{n-\alpha}} \left(u^n \mathcal{L}\left[f(t)\right](u) - u^{n-1} f(0) - u^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)\right] = \left(u^\alpha \mathcal{L}\left[f(t)\right](u) - u^{\alpha-1} f(0) - u^{\alpha-2} f'(0) - \cdots - f^{(\alpha-1)}(0)\right) \tag{72}$$

Deste modo, a definição de Caputo é útil para problemas de valor inicial, pois a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo depende de condições iniciais, que muitas vezes têm interpretação física.

Referências

[1] Carmen Lys Ribeiro Braga. *Notas de Física Matemática*. Editora Livraria da Física, 2006.

[2] Eugene Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley.

[3] Félix Silva Costa. *Função H de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2011.

[4] Aluízio Torres da Silva. *Problemas de Contorno Envolvendo as Equações de Difusão Normal, Fracionária e Fracionária Não-Linear*. PhD thesis, Universidade Estadual de Maringá, 2009.

[5] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey, and D. Zwillinger. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 2000.

[6] Jayme Vaz Jr. Notas de aula. Disciplinas de Métodos da Matemática Aplicada I, II e III, 2011/2012.

[7] Ralph Metzler and Joseph Klafter. Boundary value problems for fractional diffusion equations. *Physica A 278 (2000) 107-125*, 1999.