UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

# INTRODUÇÃO À
# TEORIA INGÊNUA DE CONJUNTOS

***Parte 1*** [*]

Aluno: Marcelo Santos Carielo

Orientadora: Prof. Dra. Itala Maria Loffredo D’Ottaviano

Campinas, Julho de 2012.

[*] Este relatório visa validar os créditos da disciplina MS877 (IMECC-UNICAMP) e corresponde aos estudos realizados, durante o primeiro semestre de 2012, da primeira parte de um projeto.

## Introdução

Pode-se dizer que a teoria dos conjuntos surgiu a partir dos trabalhos realizados por Georg Cantor durante a segunda metade do século XIX. Em 1874, Cantor publica o artigo intitulado *Über eine Eigenschaft des Inbegrieffes aller reellen algebraischen Zahlen*, no qual prova que o conjunto dos números reais não é enumerável (o conceito de enumerabilidade nos diz se é possível, ou não, contar os elementos do conjunto em questão). Para provar isto, apresentou a ideia de que um conjunto de números é enumerável quando existe uma bijeção entre tal conjunto e um subconjunto dos números naturais. Partindo deste princípio, é possível provar que o conjunto dos números racionais, que é um conjunto com infinitos elementos, é enumerável, pois podemos encontrar uma bijeção entre os racionais e os naturais. Adiante, daremos uma noção de como se obtém tais resultados.

Após o artigo citado, Cantor prossegue os estudos e questiona se algum conjunto poderia ter mais elementos do que o conjunto dos números reais. Começa, então, o estudo dos conjuntos infinitos que não são enumeráveis, e o conceito de continuidade dos elementos dos conjuntos deste tipo, onde compara o quão *denso* é o conjunto. Isto é, dado dois conjuntos infinitos não enumeráveis (segundo Cantor, contínuo), ao se comparar os conjuntos quanto ao tamanho (número de elementos), um deles pode estar mais preenchido com elementos, num determinado intervalo, do que o outro. Para tal comparação tomou como referência o conjunto dos números reais e inseriu a famosa *Hipótese do Contínuo*, na qual se assume que não existe um conjunto com tamanho intermediário entre os conjuntos dos números inteiros e dos reais.

Os primeiros estudos da teoria dos conjuntos recebem o nome de **teoria ingênua dos conjuntos**, pois em tal contexto não se apresenta uma única definição de conjunto. Cantor costumava definir os conjuntos de duas maneiras: explicitando os elementos deste, ou por meio de uma propriedade que era comum aos elementos do conjunto. Além disso, na versão ingênua não se usa uma linguagem estritamente formal - se comparada à versão axiomática - ao tratar os conceitos envolvidos. Quando tratarmos do Paradoxo de Russel, notaremos o tipo de problema que se encontra quando não se define com maior rigor o que se entende por conjunto.

De forma geral, pode-se dizer que as contribuições feitas para a teoria ingênua dos conjuntos, do final do século XIX até o início do XX, culminaram na **teoria axiomática dos conjuntos**. Durante o período de transição entre as duas versões, aparece uma nova forma de se relacionar com o conceito de o que é um axioma. Resumidamente, no início de tal período, um axioma costumava ser visto como uma verdade absoluta independente do contexto. Já por volta do ano de 1900, um axioma passou a ser uma verdade que dependia da *estrutura* subjacente (informalmente, estrutura é “o mundo das verdades possíveis”), isto é, um axioma escolhido numa determinada estrutura, poderia ser falso em outra que fosse diferente da original, gerando contradições. Além dos axiomas, durante essa época, outros conceitos foram vistos sob um novo ponto de vista. No entanto, nosso objetivo será estudar de forma introdutória a teoria ingênua de conjuntos conforme [1], usando alguns conceitos da teoria axiomática de conjuntos proposta por Zermelo-Fraenkel para dar maior rigor as explicações que serão dadas.

Não apresentaremos uma definição estritamente formal de conjuntos, mas, sim, uma noção intuitiva do que comumente pensamos ser um conjunto. Entendemos por **conjunto** algo que possui **elementos** (ou **membros**). Os elementos de um conjunto podem ser escolhidos arbitrariamente. Por exemplo, poderíamos ter um conjunto onde os elementos são aves, um conjunto onde os elementos são livros, e assim por diante. Nossa intenção será estudar os conjuntos cujos elementos são conjuntos. Dependendo do contexto, conjunto também é chamado de **coleção,** ou **classe**. Ao longo do texto o uso destes sinônimos ficará mais claro.

Um dos principais conceitos da teoria de conjuntos é de **pertinência**, denotado pelo símbolo $\in$ - derivado da letra grega ε (épsilon). Analogamente, $\notin$ indica que não ocorre a pertinência. Por exemplo, escrevemos $x \in A$ para indicar que $x$ pertence ao conjunto $A$, e $x \notin A$ quando $x$ não pertence a $A$.

A relação de igualdade entre dois conjuntos $A$ e $B$ é simbolizada por: $\boldsymbol{A = B}$. De maneira semelhante, escrevemos $\boldsymbol{A \neq B}$ para expressar que $A$ é diferente de $B$. Mais à frente, daremos uma definição para o conceito de *relação*. Por hora, entendemos que a relação de igualdade é aquela - de caráter mais informal -, intuitiva, que aprendemos quando iniciamos os estudos de matemática.

Antes de prosseguirmos, é interessante uma ideia da maneira informal que usaremos uma *sentença,* e uma noção de como é formada nossa linguagem formal.

De maneira geral, ao se construir uma linguagem formal, precisamos explicitar quais símbolos escolheremos para fazer parte do nosso alfabeto, e, também, quais regras usaremos para combinarmos tais símbolos. O conjunto de regras - análogo à *gramática* da nossa língua – permite construirmos *termos* e *fórmulas* que façam sentido em nossa teoria (como as palavras e sentenças do português), isto é, permite construirmos expressões bem formadas [4].

Os símbolos da nossa *linguagem formal** dividem-se em dois grupos: os *símbolos lógicos,* e os *símbolos não-lógicos*. Neste trabalho, como símbolos lógicos serão usados: as *variáveis* (indicadas por letras do nosso alfabeto, maiúsculas, ou minúsculas, podendo aparecer acompanhadas de um subíndice); os *conectivos* (e, $\wedge$; ou, $\vee$; não, $\neg$); os *operadores* (se-então, $\rightarrow$; se e somente se, $\leftrightarrow$); os *quantificadores* ("para algum" ou existencial, $\exists$; "para todo" ou universal, $\forall$); o símbolo de *igualdade* (=); os *parênteses* "( )" e a *vírgula* ",". Como símbolo não-lógico será o usado o símbolo de *pertinência*, $\in$.

Além das fórmulas do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem, teremos dois tipos básicos de **sentença**: as afirmações de pertinência, como, por exemplo, $x \in A$; e as afirmações de igualdade, como $A = B$. As demais sentenças poderão ser obtidas a partir destas sentenças **atômicas**, combinadas com os símbolos da linguagem formal.

As regras usadas para construção de expressões bem formadas serão as sugeridas por [1]:

(i) Coloque "não" ($\neg$) antes de uma sentença e encerre o resultado com parênteses.

(ii) Escreva "e" ($\wedge$), ou "ou" ($\vee$), ou "se e somente se" ($\leftrightarrow$) entre duas sentenças e encerre o resultado com parênteses.

(iii) Substitua os traços em "se – então -" ($\rightarrow$) por sentenças e feche o resultado com parênteses.

(iv) Substitua o traço em "para algum -" ($\exists$) ou em "para todo -" ($\forall$) por uma letra, a seguir acrescente uma sentença, e encerre tudo com parênteses.

* *Linguagem formal*, ou *linguagem artificial* pode ser vista como uma abstração da *linguagem natural* (por exemplo, o português), na qual nos preocupamos principalmente com a forma. Tal linguagem permite expressarmos conceitos por meio de símbolos cujo "significado" não mudará com o tempo (diferentemente das palavras usadas numa linguagem natural, que podem mudar dependendo do contexto).

# 1. Axiomas da Teoria Zermelo-Fraenkel

Existe uma importante ligação entre os conceitos de pertinência e igualdade que é estabelecida pelo seguinte axioma:

***Axioma da Extensão:*** *Dois conjuntos são iguais se e somente se eles têm os mesmos elementos.*

O Axioma da Extensão nos diz que não podemos distinguir dois conjuntos formados pelos mesmos elementos. Podemos expressar este fato por símbolos da linguagem formal como:

$$\forall x\ \forall y\ (x = y \leftrightarrow (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y))).$$

Dados os conjuntos $A$ e $B$, se todo elemento de $A$, é um elemento de $B$, dizemos que $A$ é um **subconjunto** de $B$ e indicamos este fato por: $\boldsymbol{A \subseteq B}$. Podemos, também, escrever isto formalmente: $\forall z\ (z \in A \rightarrow z \in B)$. Quando $A \subseteq B$ e $A \neq B$, dizemos que $A$ é "estritamente contido em $B$", o que denotamos por $A \subset B$.

As definições, teoremas e outros conceitos aos quais costumamos nos referir usando palavras do nosso vocabulário, geralmente possuem um equivalente em símbolos da linguagem formal, o que permite que expressemos o mesmo conceito de uma forma mais condensada e direta. Neste trabalho, usaremos ora uma, ora outra, conforme acreditarmos dar mais clareza ao conceito em questão.

Seria interessante se - dado um conjunto cuja existência se sabe *a priori* - pudéssemos construir outros conjuntos, visto que, a partir de determinados conceitos primitivos, deduziríamos resultados para nossa teoria, tornando-a mais abrangente. É nesse sentido que a maioria dos axiomas surge na teoria dos conjuntos.

Dizemos que a sentença '$x \in A$' é **válida** quando for verdade que $x$ pertence ao conjunto $A$. Por outro lado, dizemos que tal sentença **não é válida**, caso $x$ não pertença ao conjunto $A$.

***Axioma da Especificação:*** *Para todo conjunto A e toda condição (propriedade) S corresponde um conjunto B cujos elementos são exatamente aqueles elementos x de A para os quais S(x) é válida.*

O Axioma da Especificação (também conhecido como **Axioma da Separação**, ou **Axioma da Compreensão**) nos diz que dado um conjunto e uma sentença acerca deste, podemos obter um novo conjunto. Podemos expressar o axioma da especificação como: $B = \{x \in A\colon S(x)\}$. Ou seja, $B$ é o conjunto (cujo axioma da especificação assegura existir) dos elementos de $A$ que possuem a propriedade $S$. Como exemplo, seja $A$ o conjunto dos pássaros, e considere $B = \{x \in A\colon x \text{ é sabiá}\}$. Isto pode ser lido como "$B$ é o conjunto dos pássaros sabiás".

Na época de Cantor, era costume lidar com conjuntos mais informalmente. Subtendia-se que o leitor sabia o que se queria expressar com a notação usada para o conjunto em questão. Por exemplo, usava-se $\{x\colon x \text{ é número par}\}$ para indicar o conjunto dos números pares. Nota-se, que não era costume definir conjuntos tomando como base outro conjunto cuja existência já estava assegurada. Ao assumir o Axioma da Especificação, já supomos que existe um conjunto. Isto evita paradoxos, como o conhecido **paradoxo de Russell**, exposto em 1902, que diz: dado $A = \{x\colon x \notin x\}$, o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmo, pergunta-se: o conjunto A pertence a si mesmo?

Por um lado, se $A$ não pertence a $A$, então, pela definição de $A$, $A$ pertence a si mesmo; por outro lado, se $A$ pertence a $A$, então, pela definição de $A$, $A$ não pertence a si mesmo. Em ambos os casos, somos levados à contradição. O paradoxo de Russell (também conhecido como **paradoxo do Barbeiro**) pode ser reformulado informalmente por: numa cidade existe um barbeiro que só barbeia as pessoas que não se barbeiam a si próprios. Pergunta-se: quem faz a barba do barbeiro? Ao responder tal pergunta somos levados a uma contradição, assim como na versão mais formal vista anteriormente.

Paradoxos, como o de Russell, são eliminados quando se trabalha dentro da teoria axiomática dos conjuntos.

Como foi dito, pode-se evitar o paradoxo de Russell definindo previamente um conjunto, e a partir dele construindo outro conjunto, usando o axioma da especificação. Tomaremos como base para esta construção um conjunto que não contém nenhum elemento, denominado **conjunto vazio** e simbolizado por **Ø**. Pelo Axioma da Extensão esse conjunto é único. Formalmente temos que: dado um conjunto $A$, o conjunto vazio pode ser definido como: $\emptyset = \{x \in A: x \notin x\}$. Um fato interessante é que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Em alguns contextos, o conjunto vazio surge por meio de um axioma (como, por exemplo, em [2]) Não faremos isto aqui, mas sempre estaremos supondo que existe um conjunto (que poderia ser obtido, por construção, a partir do conjunto vazio) de forma que, quando escrevermos $\{x: x \notin x\}$, o resultado não é um paradoxo, mas, sim, o conjunto vazio (isto é, $\{x: x \notin x\} = \emptyset$), visto que, tal conjunto é formado pela aplicação do axioma da especificação. Em certo sentido, um conjunto escrito desta forma é um *abuso de notação*, mas adotamos tal escrita, em alguns casos, para simplificar.

Continuando com a apresentação dos axiomas, temos agora o *Axioma do Par* que permite obtermos um novo conjunto a partir de dois conjuntos dados.

***Axioma do Par:*** *Dados dois conjuntos quaisquer, existe um conjunto a que ambos pertencem.*

O Axioma do Par nos diz que dados dois conjuntos $a$ e $b$, existe um conjunto $B$ tal que, $B = \{a, b\}$. É comum nos referimos ao conjunto $\{a, b\}$ por **par não-ordenado**, pois $\{a, b\}$ é o mesmo que $\{b, a\}$, ou seja, podemos mudar a ordem dos elementos e continuaremos com o mesmo conjunto. Isto decorre do Axioma da Extensão, já que $a$ e $b$ são os únicos elementos de ambos os conjuntos. No caso particular do par não-ordenado $\{a, a\}$, escrevemos simplesmente $\{a\}$, pois, pelo Axioma da Extensão temos que $\{a, a\} = \{a\}$.

***Axioma da União:*** *Para toda coleção de conjuntos, existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos da dada coleção.*

Dada uma coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos (lembrando que coleção é sinônimo de conjunto), o conjunto que o axioma da união afirma existir é $\bigcup\mathcal{C} = \{y: y \in X$, para algum $X$ em $\mathcal{C}\}$. Além disso, $\bigcup\mathcal{C}$ é único (pelo axioma da extensão) e denominado **união** (ou **reunião**) da coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos. Podemos, também, usar a notação $\bigcup\{X: X \in \mathcal{C}\}$ para a união generalizada. Usando o Axioma do Par e o Axioma da União, podemos definir a **união** de dois conjuntos, digamos $A$ e $B$, como sendo o conjunto - simbolizado por **A∪B** - cujos elementos pertencem a $A$, ou a $B$. Portanto, $A \cup B = \{x: x \in A$ ou $x \in B\}$, ou seja, $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$. Percebemos que a união entre dois conjuntos é um caso particular desta definição, já que, dada a coleção $\mathcal{C} = \{A, B\}$, pelo que foi dito, $\bigcup\mathcal{C} = \{X: X \in \{A, B\}\} =$

$A \cup B$, pois se $X \in \{A, B\}$, então $X$ é um elemento de $\{A, B\}$. Logo, temos que $X = A$, ou $X = B$, que é equivalente a dizer que $X \in A \cup B$.

Assim como definimos a união entre dois conjuntos, podemos definir a **interseção** entre dois conjuntos, digamos $A$ e $B$, por: $\boldsymbol{A \cap B} = \{x \in A: x \in B\}$. Novamente, podemos generalizar a definição para uma coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos: $\bigcap \mathcal{C} = \{y: y \in X$, para todo $X$ em $\mathcal{C}\}$, que, também, é único, pelo axioma da extensão. Outra maneira de denotar a interseção generalizada é: $\bigcap\{X: X \in \mathcal{C}\}$. Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que os conjuntos $A$ e $B$ são **disjuntos**.

Dados três conjuntos $A$, $B$ e $C$, existem duas identidades - conhecidas como **leis distributivas -** envolvendo uniões e interseções que são frequentemente usadas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

O axioma seguinte nos permite obter um conjunto cujos elementos são subconjuntos obtidos a partir de um conjunto dado.

***Axioma da Potência:*** *Para cada conjunto existe uma coleção de conjuntos os quais contêm, entre seus elementos, todos os subconjuntos do dado conjunto.*

Tal axioma nos diz que dado um conjunto $A$ podemos obter um conjunto $\mathcal{P}(A) = \{X: X \subseteq A\}$, denominado **conjunto potência** (ou **conjunto das partes** de $A$). Como exemplo, considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Então o conjunto potência de $A$ é dado por $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Vemos que $A$ possui 3 elementos e $\mathcal{P}(A)$ possui 8, que é uma potência de 2, pois $8 = 2^3$. Portanto, dado um conjunto $A$ com $k$ elementos, pelo axioma da potência, existe o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$ com $2^k$ elementos, o que justifica o nome do axioma.

Dados dois conjuntos $A$ e $B$, definimos a **diferença** entre $A$ e $B$ (ou **complemento relativo** de $A$ em $B$) como sendo o conjunto $\boldsymbol{A - B} = \{x \in A: x \notin B\}$.

Para simplificar a exposição de certos conceitos, podemos considerar que existe um conjunto que contém todos os outros conjuntos. Este conjunto é denominado **conjunto universo**. Assumiremos tal conjunto por ora, já que não iremos lidar com conjuntos muito grandes no momento. No entanto, não existe um conjunto com tal propriedade, pois se considerarmos o conjunto universo $E$ como aquele que contém todos os outros conjuntos que existe, o conjunto potência $\mathcal{P}(E)$, cujo axioma das potências assegura existir, pertenceria a $E$. Porém, isto não é verdade, porque $\mathcal{P}(E)$ é maior que $E$.

É comum nos referirmos ao **complementar** de um conjunto $A$, denotado por $\boldsymbol{A'}$, como sendo os elementos que não pertencem a $A$. Ou seja, o complementar de $A$ é a diferença entre o conjunto universo e $A$.

Duas propriedades importantes sobre complemento de um conjunto são as **Leis de De Morgan**:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

## 2. Relações e Função

Ao investigarmos a existência de alguma ordem entre os elementos de um conjunto, precisamos definir o que entendemos por ordem, já que uma determinada ordem pode ser considerada sob diferentes pontos de vista. Por exemplo, um observador $\mathcal{A}$ pode afirmar que quando ordenamos o conjunto {1, 2, 3}, dispomos os elementos deste como 1, 2, 3. Outro observador $\mathcal{B}$ pode dizer que este conjunto está ordenado somente quando seus elementos estão dispostos como 3, 2, 1. Ou seja, a ordem formulada pelo observador $\mathcal{A}$ é diferente da adotada pelo observador $\mathcal{B}$, mas ambos estão corretos em afirmar que dispor os elementos segundo seu ponto de vista é uma maneira de ordenar este conjunto.

Levando em conta a observação acima, o conceito de ordem é tratado de maneira que não haja ambiguidade a partir do momento que já foi definida qual será a ordem que estará em questão. No entanto, ao ordenar um conjunto, é importante que possamos recuperar o mesmo através de algum procedimento. Caso contrário, perderíamos informações, pois o conjunto original não estaria mais disponível depois que o ordenássemos.

Definimos o **par ordenado** de $a$ e $b$ , **$(a, b)$**, como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. A partir da definição de par, definimos **produto cartesiano** de $A$ por $B$ – denotado por $\boldsymbol{A \times B}$ - como sendo o conjunto dos pares $(a, b)$ tal que $a$ é um elemento de $A$ e $b$ é um elemento de $B$. Usando a notação formal, escrevemos $A \times B = \{x$: $x = (a, b)$, para algum $a$ de $A$ e para algum $b$ de $B\}$. Dizemos que a **primeira coordenada** do par $(a, b)$, é $a$, e a **segunda coordenada** é $b$.

Uma **relação binária** num conjunto $A$, é um subconjunto $R$ do produto cartesiano $A \times A$, ou seja, $R \subseteq A \times A$. De forma mais geral, podemos definir relações ternária, quaternária, e assim por diante. É usual se referir as relações binárias simplesmente por **relação**.

O conceito de relação é comumente usado no seguinte sentido: se $R$ é uma relação, dizemos que $x$ está relacionado por $R$ com $y$, se o par ordenado $(x, y)$ pertencer a $R$. Representamos isto por símbolos como: $x\ R\ y$. Dizemos que uma relação $R$ é de **equivalência** se ela é: **reflexiva** (isto é, se $x\ R\ x$, para todo conjunto $x$), **simétrica** (se $x\ R\ y$, então, $y\ R\ x$, para todo $x$ e $y$) e **transitiva** (se $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$, então $x\ R\ z$, para todo $x$, $y$ e $z$).

Definimos o **domínio** (***dom R***) e a **imagem** (***ran R***) de uma relação $R$ por:

$$\boldsymbol{dom\ R} = \{x\text{: para algum } y \text{ , tal que } x\ R\ y\},$$

$$\boldsymbol{ran\ R} = \{y\text{: para algum } x\text{, tal que } x\ R\ y\}.$$

Como exemplo da definição acima, considere $R$ sendo a relação do produto cartesiano de $A$ por $B$, ou seja, $R = A \times B$, então $dom\ R = A$, e $ran\ R = B$ (do inglês, *range*).

Uma **partição** do conjunto $X$ é uma coleção disjunta $\mathcal{C}$ de subconjuntos não-vazios de $X$ cuja união é $X$.

Se $R$ é uma relação de equivalência em $X$, e $x \in X$, a **classe de equivalência** de $x$ (com respeito a $R$) é o conjunto $[\ \boldsymbol{x}\ ]_{\boldsymbol{R}} = \{y \in X\text{: } (x, y) \in R\}$. Escrevermos $\boldsymbol{x/R}$ para indicarmos a classe de equivalência de $x$, e $\boldsymbol{X/R}$ (que é comumente lido como "$X$ módulo $R$") para o conjunto de todas as classes de equivalência.

Dado um conjunto $X$, existe uma ligação entre classe de equivalência e partição de $X$: uma relação de equivalência particiona $X$, e, dada uma partição de $X$, existe uma relação de equivalência em $A$ determinada por esta partição.

O símbolo $\subseteq$, que foi usado para definirmos subconjuntos, representa a relação de **inclusão**. Esta relação é **reflexiva** (pois, $A \subseteq A$), **anti-simétrica** (se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$, pelo axioma da extensão) e **transitiva** (pois, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$).

Através da definição de inclusão, podemos nos referir ao axioma da extensão de forma mais condensada, reformulando esse pelo seguinte: dados dois conjuntos $A$ e $B$, temos que $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Ressaltamos que a *pertinência* é uma relação diferente da relação de inclusão. Por exemplo, para ver que a relação de pertinência não é reflexiva, podemos considerar o conjunto $A = \{1, 2\}$ e notar que o conjunto $\{1, 2\}$, não é um elemento de $A$. Consequentemente, nem sempre é verdade que dado um conjunto qualquer, este pertença a ele próprio.

Um conceito frequentemente usado na matemática é o de **função** (também chamada de **transformação**, **correspondência**, ou **aplicação**). Uma função $f$ de $X$ em $Y$ é uma relação binária definida em $X \times Y$, tal que, para todo $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$. Podemos notar que $A = dom\, f$ e $f(x) = y$ para $(x, y) \in f$. Quando $f(x) = y$, dizemos que $f$ assume o **valor** $y$, no **argumento** $x$. Usa-se a notação $f$: $X \rightarrow Y$ para se ferir a definição dada de função de $X$ em $Y$ (o conjunto $Y$ é conhecido por contradomínio).

Dada uma função $f$: $A \rightarrow B$ é possível restringir o domínio de $f$ a um subconjunto $C$ de $A$, obtendo a função $\boldsymbol{f|_C}$: $C \rightarrow B$, que é chamada de **restrição** da função $f$ a $C$, pois restringimos o domínio da função $f$ que antes era todo conjunto $A$ agora é um subconjunto deste.

Se uma função $f$: $A \rightarrow B$ tiver a propriedade de que, escolhidos dois elementos distintos, digamos $u$ e $v$, no domínio $A$, ao aplicarmos a função $f$, tivermos que $f(u)$ e $g(v)$ são elementos distintos em $ran\, f$, então dizemos que $f$ é **injetiva** (ou **injetora**). Podemos, também, dizer que $f$ é **um-a-um**, já que quando $f$ é injetiva, a cada par de valores distintos transformados pela $f$, está associado um par de elementos distinto no $dom\, f$. Quando acontecer a igualdade $ran\, f = B$ (isto é, quando a imagem é igual ao contradomínio) dizemos que a função é **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**). Uma função é **bijetiva** (ou **bijetora**), quando é injetiva e sobrejetiva. Neste caso, existe uma correspondência um-a-um entre $dom\, f$ e $B$, pois $B = ran\, f$.

Se $f$: $A \rightarrow B$ é uma função de $A$ em $B$, e $g$: $B \rightarrow C$ é uma função de $B$ em $C$, a **composta** de $g$ com $f$ é a função $\boldsymbol{g \circ f}$: $A \rightarrow C$, cujos valores são $g(f(x))$, onde $x$ pertence a $A$. Comumente lemos a notação $g \circ f$ por "$g$ bola $f$".

Dizemos que uma função $f$: $A \rightarrow B$ possui **inversa** (ou que $f$ é **inversível**), se existir uma função $\boldsymbol{f^1}$: $B \rightarrow A$, tal que $f(f^1(x)) = x$ e $f^1(f(x)) = x$, para qualquer $x$ escolhido no $dom\, f$. De forma equivalente, dizemos que f possui inversa se e somente se $f$ é sobrejetiva. Esta forma alternativa evita o uso de composições. É importante perceber que o conceito de inversibilidade permite recuperamos o argumento do domínio ao qual aplicamos a função.

Um conceito associado ao de inversibilidade é o de **imagem inversa** de uma função $f$: $A \rightarrow B$, que é definido como sendo o conjunto $\boldsymbol{f^1(B)} = \{x$: $f(x)$ pertence a $ran\, f\}$.

Ao trabalharmos com um número grande de conjuntos é interessante introduzirmos uma notação novas que simplifique a manipulação desses conjuntos. Assim, dado um conjunto $X$, uma **família** $\boldsymbol{\{A_i\}}$ de subconjuntos de $X$ é uma coleção formada pelos conjuntos $A_i$ pertencentes a $X$, onde o sub-índice $i$ pertence a um **conjunto de índices** $\boldsymbol{I}$.

A união e a interseção de uma família de conjuntos são denotadas por $\cup_i A_i$ e $\cap_i \mathrm{A}_i$, respectivamente.

Usando o conceito de famílias, as leis distributivas para a união e interseção podem ser generalizadas. Por exemplo, se $\{A_i\}$ é uma família de subconjuntos de $X$ e, além disso, $B \subseteq X$, então $B \cap \cup_i A_i = \cup_i (B \cap A_i)$ e $B \cup \cap_i A_i = \cap_i (B \cup A_i)$ expressam uma leve generalização para as leis distributivas mencionadas anteriormente.

## 3. Números Naturais

Ao tentar-se definir o que é *número* surgem questões de cunho filosófico que durante muito tempo atrás já foram questionadas. Se, por um lado, a geometria possui registros datados de cerca de 600 anos a. C. (com a geometria demonstrativa de Tales de Mileto) e atinge certa axiomatização com os *Elementos* de Euclides (aproximadamente 300 anos a.C. [5]); por outro, o conceito de número é tratado com um rigor equivalente, somente por volta do início do século XX, com as mudanças ocorridas na lógica e nos fundamentos da matemática.

Visto que, dentro da teoria ingênua de conjuntos, consideramos a existência *a priori* de um conjunto, e a partir deste derivarmos outros conjuntos por meio dos axiomas da teoria dos conjuntos, é conveniente abordarmos números como algo associado a um conjunto.

Dado um conjunto $x$, definimos o **sucessor** de $x$, como sendo o conjunto $x' = x \cup \{x\}$. Com isso, definimos os *números naturais* como sendo o conjunto formado pelos seus predecessores.

Para interpretar a definição dada de números naturais, consideremos o número $0$ como sendo aquele que possui zero elemento. Então da definição de sucessor temos que:

$0 = \varnothing$,
$1 = 0'$(ou seja, $1 = \{0\}$),
$2 = 1'$ ($1 = \{0\}$),
$3 = 2'$ ($2 = \{0, 1\}$),
*e assim por diante*.

O "*e assim por diante*" nos diz que a construção poderia continuar indefinidamente. Porém, nossa intenção é, sempre que possível, não recorrer a artifícios da intuição para se deduzir algum resultado válido no contexto da teoria dos conjuntos. Se continuássemos a construção acima, pelo que foi dito até agora, não conseguiríamos inferir se a construção obtida seria, ou não, um conjunto, e, consequentemente, não seria possível afirmar que o resultado obtido foi um número natural. Visando tratar essa questão com mais formalismo, inserimos o axioma abaixo na teoria.

***Axioma do Infinito**: Existe um conjunto que contém o 0 (zero) e o sucessor de cada um de seus elementos.*

Se o conjunto $A$ é tal que, $0 \in A$, e, além disso, para todo $x \in A$, tivermos que $x' \in A$, então denominamos tal conjunto de **conjunto sucessor**.

O conjunto que o Axioma do Infinito afirma existir é conhecido como **infinito**. Percebemos, também, que o Axioma do Infinito garante a existência do conjunto sucessor.

Definimos o conjunto $\omega$ como sendo um subconjunto de todo outro conjunto sucessor. Este é o menor conjunto com essa propriedade e, pelo Axioma da Extensão, podemos provar que ele é único. A partir deste conjunto, definimos **número natural** como sendo um elemento de $\omega$. Com isso, $\omega$ pode ser visto como o conjunto de todos os números naturais.

Definimos uma **sequência** como sendo uma família $\{x_i\}$, onde $i$ pertence ao conjunto dos números naturais. Portanto, uma sequência possui um número finito ou infinito de elementos. A definição aqui apresentada para sequência difere um pouco da que é comumente feita na literatura matemática. No entanto, para nossos propósitos, ambas acabam sendo equivalentes.

Agora que definimos *sequência*, podemos introduzir uma notação nova - derivada das definições generalizadas já dadas - para união, interseção e produto cartesiano. Para isto, considere $\{A_i\}$ sendo uma sequência de conjuntos, onde $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n'\}$ e $n$ é um número natural (como antes, $n'$ é o sucessor $n$) Então, a união da família $\{A_i\}$, pode ser escrita como $\cup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Analogamente, para interseção generalizada, temos $\cap_i A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$. Seguindo a mesma ideia, podemos usar novas notações ao lidarmos com as sequências de conjuntos.

Vimos que o conjunto dos números naturais $\omega$ é o único conjunto sucessor subconjunto de todo conjunto sucessor. Tal consideração equivale a:

(i) $0 \in \omega$, onde $0 = \emptyset$,
(ii) se $n \in \omega$, então $n' \in \omega$, onde $n' = n \cup \{n\}$,
(iii) se $S \subseteq \omega$, e $0 \in S$, e $n' \in S$ para todo $s \in S$, então $S = \omega$,
(iv) $n' \neq 0$, para todo $n \in \omega$,
(v) se $n \in \omega$ e $m \in \omega$, e se $n' = m'$, então $n = m$.

As propriedades (i) e (ii) seguem de que $\omega$ é um conjunto sucessor; (iii) indica que $\omega$ é único (essa propriedade é conhecida como **princípio da indução matemática**); (iv) nos diz que o número $0$ não é sucessor de nenhum número natural e (v) pode ser visto como o fato de que não podemos ter dois números naturais diferentes com o mesmo sucessor. As afirmações de (i) a (v), que caracterizam os números naturais, são conhecidas como **Axiomas de Peano**.

Além do princípio da indução matemática ser uma ferramenta muito usada para demonstrações, ele nos permite definir objetos recursivamente. Isto pode ser feito com auxílio do seguinte teorema:

***Teorema da Recursividade:*** *Se $b$ é um elemento de um conjunto $X$, e se $f$ é uma função de $X$ para $X$, então existe uma função $u$ de $\omega$ para $X$ tal que $u(0) = b$ e $u(n') = f( u(n) )$, para todo $n$ em $\omega$.*

Um exemplo de **definição por indução** é a *adição* de números naturais, pois, dado um número natural $m$, pelo Teorema da Recursividade, existe uma função $S_m \colon \omega \to \omega$, tal que $S_m(0) = m$ e $S_m(n') = (S_m(n))'$ para todo número natural $n$; e, então, definimos a soma de $m + n$ como sendo o valor $S_m(n)$. De maneira parecida, definimos o *produto* $(m \cdot n)$, a *exponenciação* $(m^n)$, e, também, as propriedades aritméticas destas definições.

Dois conjuntos $A$ e $B$ são **equivalentes** (ou **equipotentes**) se existir uma correspondência um-a-um entre eles. Denotamos tal fato por $A \sim B$. Pode-se provar que tal relação é uma relação de equivalência.

Definimos o **número de elementos** de um conjunto finito $E$ - denotado por $\#(E)$ - como sendo o único número natural equivalente a $E$.

Segue da definição de *equivalência* que todo subconjunto próprio de um número natural $n$ (que é um conjunto infinito) é equivalente a um número natural menor que ele, ou seja, é equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo. Sabendo dessa propriedade conseguimos provar que $\omega \sim \{n \in \omega$, tal que $n$ é ímpar$\}$, além de outras consequências que parecem estar em desacordo com a nossa intuição, pois, intuitivamente, parece impossível construirmos uma correspondência um-a-um entre o conjunto de todos os números naturais e o conjunto dos números ímpares; dizendo mais explicitamente, é natural pensarmos que o conjunto de todos os números ímpares possui menos elementos que o conjunto de todos os números naturais. Porém, é possível provar, com a teoria dos conjuntos, que não é isto o que acontece. Quando abordarmos a enumerabilidade dos conjuntos, estudaremos com mais detalhes problemas como este, além de expormos o argumento usado por Cantor para mostrar que é possível encontrar uma correspondência um-a-um entre o conjunto dos números naturais, e o conjunto dos *números inteiros* (vale ressaltar que isto deve ser feito numa segunda etapa deste trabalho)

Continuando com algumas definições, dizemos que um conjunto é **finito** se o mesmo for equivalente a algum número natural; caso contrário, o conjunto é dito **infinito**.

# 4. Relação de Ordem

Retomando nossa abordagem sobre *ordem*, que foi iniciada quando tratamos de funções e relações, dizemos que uma relação $R$ em um conjunto $X$ é uma **ordem parcial** se a mesma é reflexiva, **anti-simétrica** (isto é, se $x\ R\ y$ e $y\ R\ x$, então $x = y$, para todo $x$ e $y$ em $X$) e transitiva.

As relações de ordens parciais aparecem com frequência no estudo de lógica e matemática. Tanto é que se costuma usar o sinal de desigualdade para lidarmos com tal relação, ao invés de uma letra genérica como $R$. Em vista disso, a relação $\leq$ em um conjunto $X$ satisfaz as condições da definição de ordem parcial. Quando uma relação de ordem parcial satisfaz a condição extra de que, para todo $x$ e $y$, $x \leq y$ ou $y \leq x$, então temos uma relação de **ordem total**. Observamos que se a relação é de ordem total, então é de ordem parcial. Muitas vezes é comum usarmos o sinônimo **linear**, ao invés de **total**, e, apenas, **ordem** para a ordem parcial.

Associado a ideia de ordem parcial, definimos **conjunto parcialmente ordenado** como sendo um conjunto cujos elementos satisfazem a relação $\leq$, isto é, $x \leq y$ ou $y \leq x$, para quaisquer elementos $x$ e $y$ pertencentes ao conjunto. Esta definição também pode ser expressa em termos de par ordenado, no seguinte sentido, se o conjunto parcialmente ordenado $X$ é visto como o par $(X, \leq)$, onde $X$ é um conjunto e $\leq$ é uma ordem parcial em $X$. A abordagem de par permite que interpretemos nossa definição como o agrupamento de duas entidades que estão relacionadas. Esse tipo de definição é comumente usado na matemática.

Quando ocorrer de $a \leq b$, onde $\leq$ é a relação parcial mencionada anteriormente, podemos dizer que "$a$ é menor, ou igual, a $b$". Da mesma maneira, temos a relação $\geq$, que pode ser de maneira semelhante a $\leq$. Por exemplo, quando $b \geq a$, dizemos que "$b$ é maior que $a$". Podemos dizer, informalmente, que $\geq$ é a relação "inversa"(ou contrária) de $\leq$.

Ainda no estudo de relações de ordem, existem algumas definições que permitem explorarmos ainda mais os conceitos de ordem. No entanto, por ora, não nos ocuparemos delas. Posteriormente, quando for necessário o uso de algumas delas, será exibida a definição e uma possível interpretação para as mesmas.

# 5. Axioma da Escolha

O próximo axioma que estudaremos merece destaque devido as suas implicações dentro da matemática e, também, ao fato de que ele é bastante discutido entre alguns estudiosos. Alguns chegam a formular uma teoria dos conjuntos sem usá-lo, outros dizem que o axioma permite deduzirmos algo que não existe, e uns afirmam que ele é indispensável.

***Axioma da Escolha:*** *O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não-vazio.*

Podemos interpretar o Axioma da Escolha de maneiras diferentes. Por exemplo, dado um conjunto $X$ não vazio, dizemos que uma função $f$, com domínio $\mathcal{P}(X) - \{\varnothing\}$, é uma **função escolha** (ou **seletora**) se, quando $A \in dom(f)$, tivermos que $f(A) \in A$. Usando tal função, podemos reformular o Axioma da Escolha afirmando o seguinte: Todo conjunto possui uma função escolha. Isto pode ser expresso em nossa linguagem formal por:

$$\forall x\ \exists f\ (f \text{ é uma função} \wedge dom\, f = x - \{\varnothing\} \wedge \forall y\ (y \in dom\, f \rightarrow f(y) \in y)).$$

Recordando, uma *função* é um caso particular de *relação*, que por sua vez é um subconjunto de um *produto cartesiano*, então, pelo Axioma da Escolha, existe uma *função seletora* (visto que o produto cartesiano mencionado no axioma possui pelo menos um elemento, este é uma função)

Além da definição equivalente dada acima, podemos reformular o Axioma da Escolha de outras maneiras. Por exemplo, em [2] são exibidas 5 definições equivalentes, onde cada uma delas permite que abordemos o Axioma da Escolha sob um ponto de vista diferente.

Numa próxima* etapa deste trabalho, pretendemos estudar como o Axioma da Escolha é usado ao lidarmos com alguns resultados de grande interesse na matemática, como o *Lema de Zorn* e o *Príncipio da Boa ordenação*.

* No segundo semestre de 2012, esperamos estudar a segunda parte do projeto, cobrindo até a seção 25 de [1].

## Referências


[1] Halmos, P. R., *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2001.

[2] Di Prisco, C. A., *Una Introducción a la Teoría de Conjuntos*, Coleção CLE, vol.20, UNICAMP, 1997.

[3] Santos, E. E. dos, *O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática*, Tese de Doutorado, CLE-UNICAMP, Campinas, 2008.

[4] Mortari, C. A., *Introdução à Lógica*, Editora UNESP, São Paulo, 2001.

[5] Eves, H., *Introdução à história da matemática*, Editora da Unicamp, Campinas, 2011.