



# Epidemiologia Matemática da Anemia Infecciosa Equina

Ana Paula Diniz Marques  
IMECC - UNICAMP  
anapdinizm@gmail.com

Orientadora: Sônia Ternes  
Co-Orientador: Raphael Gustavo D'almeida Vilamiu  
Embrapa Informática Agropecuária

10 de julho de 2012

## Resumo

A Anemia Infecciosa Equina (AIE) é uma doença incurável e de grande prevalência no Pantanal Brasileiro, causada por um vírus pertencente ao gênero (*Lentivirus*), infectando membros da família *Equidae*. O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático compartimental determinístico para representar a dinâmica temporal da transmissão da AIE por seu inseto vetor, a mutuca, que desempenha o papel mais importante na cadeia natural da doença. Partindo do modelo desenvolvido por Marquesone (2011) [1], o modelo aqui apresentado considera também a variação populacional do vetor definida por cenário, unifica os compartimentos de cavalos infectados e assintomáticos e define os parâmetros biológicos envolvidos. Tal modelo é então analisado do ponto de vista de equilíbrio e estabilidade e simulações de cenários são realizadas em condições compatíveis com a realidade do Pantanal.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Importância Econômica dos Equinos no Brasil . . . . .	2
1.2	Descrição da Anemia Infecciosa Equina . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Modelo Matemático</b>	<b>4</b>
2.1	Sistema de compartimentos da dinâmica da AIE . . . . .	5
2.2	Equações da Dinâmica da AIE . . . . .	6
2.3	Análise de Estabilidade . . . . .	8
2.3.1	Condições de estabilidade do Ponto trivial . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Simulações Numéricas</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Agradecimentos</b>	<b>14</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Importância Econômica dos Equinos no Brasil

O Brasil possui o maior rebanho de equinos na América Latina e o terceiro mundial. Somados aos muares (mulas) e asininos (asnos) são 8 milhões de cabeças, movimentando R\$ 7,3 bilhões somente com a produção de cavalos. O rebanho envolve mais de 30 segmentos, distribuídos entre insumos, criação e destinação final e compõe a base do chamado Complexo do Agronegócio Cavalo, responsável pela geração de 3,2 milhões de empregos diretos e indiretos.

Quando o assunto é exportação de cavalos vivos, os números são significativos: a expansão alcançou 524% entre 1997 e 2009, passando de US\$ 702,8 mil para US\$ 4,4 milhões. A maior população brasileira de equinos encontra-se na região Sudeste, logo em seguida aparecem as regiões Nordeste, Centro-Oeste, Sul e Norte. Destaque para o Nordeste, que além de equinos, concentra maior registro de asininos e muares.

Usado unicamente como meio de transporte durante muitos anos, os equídeos têm conquistado outras áreas de atuação, com forte tendência para lazer, esportes e até terapia. Uma de suas principais funções, contudo, continua sendo o trabalho diário nas atividades agropecuárias, onde aproximadamente cinco milhões de animais são utilizados, principalmente, para o manejo do gado bovino. [2]

A produção de gado de corte é a atividade econômica de maior importância no Pantanal e devido às características desta atividade extensiva, a utilização dos equídeos (cavalos, mulas e burros) tornou-se essencial à pecuária pantaneira. Uma das doenças que podem comprometer irreversivelmente o desempenho dos equídeos é a Anemia Infecciosa Equina (AIE), o que afeta indiretamente a pecuária extensiva. Na figura (1.1) observa-se o trabalho realizado pelos cavalos na movimentação do gado.



Figura 1.1: Cavalos sendo utilizados na pecuária extensiva

## 1.2 Descrição da Anemia Infecciosa Equina

A Anemia Infecciosa Equina (AIE) é uma doença incurável e de grande prevalência no Pantanal Brasileiro, acometendo mais de 50% da população de equinos. Atualmente ela apresenta distribuição mundial e é causada por um vírus pertencente ao mesmo gênero do vírus da HIV, pertencente ao gênero dos lentivírus (*Lentivirus*), da família dos retrovírus (*Retroviridae*), infectando membros da família *Equidae*. Até o momento, a AIE é uma doença incurável e o Ministério da Agricultura, Pecuária e do Abastecimento (MAPA) através da legislação pertinente preconiza o sacrifício dos animais soropositivos para o controle da doença. Em regiões como o Pantanal, onde a AIE apresenta alta prevalência, o sacrifício dos animais positivos traria grande prejuízo a pecuária extensiva (característica na região) ou até mesmo poderia inviabilizá-la. Sinais clínicos, como perda de peso, depressão, desorientação, andar em círculos e hipertermia, têm sido observados.

A transmissão pode ser vertical (intra-uterina) ou horizontal, por meio de utensílios contaminados (agulhas, freios, esporas e outros), leite materno (colostró), sêmen ou insetos hematófagos, particularmente os tabanídeos (mutucas).

Entretanto, a transmissão do vírus da AIE (VAIE) é, geralmente, relacionada com a transferência de sangue de um cavalo infectado a um receptor sadio. Por desinformação, em muitas ocasiões, o homem torna-se um dos componentes na cadeia de transmissão desse vírus, em função do manejo inadequado dos animais. Sem a participação do homem, os tabanídeos desempenham o papel mais importante na cadeia natural da doença, atuando como vetores. Estes vetores contaminam-se durante sua alimentação no animal infectado e a transmissão ocorre quando, após interrupção da alimentação em um animal doente, reiniciam seu repasto em outro animal (sadio). [3] Pode-se ver na figura (1.2) a mutuca na pata do equino.

Neste trabalho faz-se uso da teoria existente na epidemiologia matemática para desenvolver um modelo compartimental determinístico da transmissão da AIE pelo inseto vetor (mutuca), considerando os compartimentos de animais suscetíveis e infectados. Apesar de haver animais assintomáticos com AIE, para a dinâmica, no campo a distinção não é perceptível, e por isso tal compartimento não foi incluído no modelo. Este trabalho parte dos estudos realizados por Marquesone, (2011) [1] e acrescenta a variação populacional dos insetos, o uso do conceito explícito de força de infecção, a não distinção entre animais infectados e animais assintomáticos no campo e executa um processo de parametrização a partir da literatura.



Figura 1.2: Mutuca na pata do Equídeo<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Fonte: Boletim Epidemiológico - IDAF, 2010[4]

# Capítulo 2

## Modelo Matemático

Para descrever a dinâmica da transmissão da AIE via mutuca, foi utilizado um modelo matemático compartimental determinístico. No modelo proposto, baseado em [1], considera-se a variação populacional dos insetos devido ao nascimento, morte e migração.

Subfamília/ espécie	J/92	J	A	S	O	N	D	J/93	F	M	A	M	Total
<b>Chrysopsinae</b>													
Chrysops sp.1	30	29	37	7	23	6	16	1	4	36	7	26	222
<b>Pangoniinae</b>													
E. lemniscata	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	3
<b>Tabaninae</b>													
C. unicolor	1	0	0	0	3	0	1	0	0	3	2	0	10
D. bimaculatus	1	3	2	4	9	3	0	2	1	1	1	0	27
D. scutellata	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	3
L. crassipes	5	9	1	37	47	14	6	19	23	21	52	32	266
L. exaestuans	0	0	0	0	19	0	0	0	2	0	1	0	22
P. cajennensis	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	4
P. seclusus	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
P. brevicome	0	0	0	0	16	48	42	2	0	0	0	0	108
S. tibiale	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	5
T. claripennis	9	55	31	14	13	38	28	15	20	22	17	15	277
T. guyanensis	2	0	0	0	2	0	2	0	2	2	1	0	11
T. importunus	180	25	3	188	278	332	45	299	197	195	138	48	1928
T. nebulosus	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
T. occidentalis	16	42	22	27	29	13	28	24	28	21	9	23	282
T. palpalis	0	0	1	2	21	2	2	6	10	15	6	14	79
T. pungens	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	5
T. sorbillans	1	2	0	0	10	2	0	0	1	3	0	1	20
T. wokei	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
Tabanus sp.	0	0	0	158	7	0	0	0	0	0	0	0	165
Total capturado	248	165	97	437	482	458	170	371	288	328	237	161	3442
Total de espécies	11	7	7	8	15	9	9	9	10	14	13	8	21

Figura 2.1: Abundância mensal de tabanídeos capturados em equinos, de junho/92 a maio/93, sub-região da Nhecolândia, Pantana, MS.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Fonte: Barros et. al (2003)[5]

Tal variação caracteriza dois cenários de estudo:

1. Flutuação da população como uma função oscilatória do tipo seno;
2. Com base no trabalho de Barros et. al (2003) [5], dados apresentados na figura da tabela (2.1), ajustou-se uma função oscilatória ao longo do tempo para o número de tabanídeos capturados nos equinos no período de junho/92 a maio/93.

Também considerou-se a taxa de recuperação das mutucas, a qual é o tempo em que o vírus permanece viável na peça bucal do inseto. Barros & Foil (2009)[6] afirmam que, com base na literatura, este tempo pode variar de 30 minutos a 4 horas, porém ressaltam que os vírus permanecem viáveis apenas por trinta minutos e não por quatro horas, como encontrado em algumas citações. Além destes parâmetros, utilizou-se o conceito explícito de força de infecção juntamente com o conceito de capacidade vetorial, para a representação do processo de transmissão da doença.

A espécie dentre os tabanídeos que se destaca como a de maior potencial vetor na região é a *T. importunus*. Esta espécie apresenta características importantes ao processo de transmissão mecânica, como incapacidade de desenvolvimento dos ovos sem prévio repasto sanguíneo, elevado índice de sobrevivência, ocorrência de vários ciclos gonotróficos (até quatro ciclos) e o seu comportamento de repasto [5].

Nos parâmetros do modelo relacionados à transmissão da AIE pela mutuca utilizou-se a frequência de alimentação do inseto constante ao longo do tempo, e que esta transmissão ocorre por um período finito de tempo. A frequência de alimentação é dada pelo seu ciclo gonotrófico, o que representa um período de 15 dias, pois o tempo de vida do adulto dificilmente ultrapassa dois meses [7].

Com relação aos parâmetros relacionados ao tempo de vida e o tempo de gestação de um equino, verificou-se em [3] que os cavalos utilizados no serviço de campo tem uma vida útil em torno de doze anos e o tempo de gestação é de 11 meses, encontrado em [8].

## 2.1 Sistema de compartimentos da dinâmica da AIE

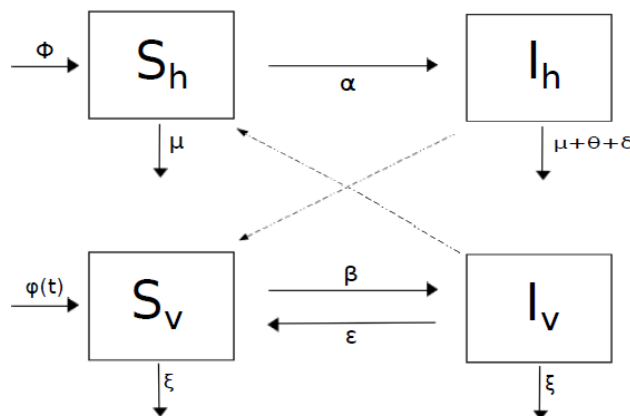


Figura 2.2: Compartimentos considerados no modelo matemático. Setas contínuas representam fluxo entre compartimentos e setas tracejadas indicam a influência de compartimentos na dinâmica de transmissão.

O modelo considera a existência de quatro compartimentos para representação do processo de transmissão da AIE via mutuca. Assim,  $S_h$  representa os cavalos suscetíveis;  $I_h$

representa os cavalos infectados;  $S_v$  é o compartimento dos vetores (mutucas) suscetíveis e  $I_h$  é o compartimento dos vetores infectivos. A figura (2.2) ilustra os compartimentos do modelo e seus parâmetros. Os parâmetros considerados estão descritos na tabela (2.1), juntamente com os respectivos valores utilizados nas simulações.

Tabela 2.1: Parâmetros do modelo da dinâmica de transmissão da AIE e respectivos valores utilizados nas simulações.

Parâmetros	Valores	Descrição	Referência
$\phi$	1/335	Taxa de recrutamento (gestação 11 meses)	[8]
$\mu$	1/(12 * 365)	mortalidade natural dos equinos (tempo de vida de animais de serviço 12 anos)	[3]
$\theta$	0	mortalidade por controle dos equinos	
$\delta$	0	mortalidade pela doença dos equinos	
$f_1$	0,01	Probabilidade de infecção do cavalo por visita de vetor infectivo	
$f_2$	1	Probabilidade de infecção do vetor por visita realizada em cavalo infectado	
$\xi$	1/60	taxa de mortalidade natural (2 meses) e emigração de mutucas	[7]
$b$	1/15	taxa de troca de cavalo pelo inseto vetor	[5]
$\varepsilon$	3 – 24	taxa de recuperação dos vetores	[6]

## 2.2 Equações da Dinâmica da AIE

Na figura (2.2) pode-se observar que existem os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , estes representam respectivamente, a taxa em que o cavalo suscetível passa a infectado e a taxa em que o vetor suscetível passa a infectivo. Estes parâmetros dependem de outros, tais como taxa de visita dos insetos ( $b$ ), probabilidade de infecção do cavalo por visita de vetor infectivo ( $f_1$ ), probabilidade de infecção do vetor por visita no cavalo infectado ( $f_2$ ), população total de equinos ( $N_h = S_h + I_h$ ), e população total de insetos ( $N_v = S_v + I_v$ ). Assim  $\alpha$  e  $\beta$  são descritos por:

$$\alpha = \frac{bf_1}{N_v} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{bf_2}{N_h}$$

A proporção de equinos infectados é dada pelo número de equinos infectados dividido pela população total de equinos, i.e,  $\frac{I_h}{S_h + I_h}$ , sendo que  $N_h = S_h + I_h$ , então temos  $\frac{I_h}{N_h}$ . A capacidade vetorial é a densidade do vetor em relação ao seu hospedeiro vertebrado, ou seja a população total de insetos dividido pela população total de equinos, i.e,  $\frac{N_v}{N_h}$ . A força de infecção nos cavalos é descrito por  $\lambda_h$  e a força de infecção nos vetores é descrito por  $\lambda_v$ .

$$\lambda_h = \alpha \frac{N_v}{N_h} I_v = \frac{bf_1}{N_v} \frac{N_v}{N_h} I_v \quad \text{e} \quad \lambda_v = \beta I_h = \frac{bf_2}{N_h} I_h,$$

Assim, as forças de infecção nos cavalos e a nos vetores resultam, respectivamente em:

$$\lambda_h = \frac{bf_1 I_v}{N_h} \quad \text{e} \quad \lambda_v = \frac{bf_2 I_h}{N_h}.$$



Com a descrição das forças de infecção, dado os compartimentos e os parâmetros do modelo, obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve a dinâmica de transmissão da AIE via mutuca, expresso no sistema de equações (2.1).

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt} = \phi - \lambda_h S_h - \mu S_h; \\ \frac{dI_h}{dt} = \lambda_h S_h - (\mu + \theta + \delta) I_h; \\ \frac{dS_v}{dt} = \varphi(S_v + I_v) + \varepsilon I_v - (\lambda_v - \varepsilon) S_v; \\ \frac{dI_v}{dt} = \lambda_v S_v - (\varepsilon + \xi) I_v; \end{cases} \quad (2.1)$$

Como considerado anteriormente a população total de insetos é dada por  $N_v = S_v + I_v \implies S_v = N_v - I_v$ . Através da equação encontrada para  $S_v$  e pelo balanço de massa, considerando que a quantidade de mutucas se conserva, ou seja, a quantidade de insetos que nascem é a mesma quantidade que morrem. Do sistema de equações acima (2.1) conseguimos reduzir para um sistema de três equações, como apresentado no sistema abaixo (2.2)

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt} = \phi - \lambda_h S_h - \mu S_h; \\ \frac{dI_h}{dt} = \lambda_h S_h - (\mu + \theta + \delta) I_h; \\ \frac{dI_v}{dt} = \lambda_v (N_v - I_v) - (\varepsilon + \xi) I_v; \end{cases} \quad (2.2)$$

Analisando o sistema de equações (2.2) em regime estacionário obtém-se os pontos de equilíbrio do sistema, sendo o ponto de equilíbrio trivial dado por:

$$S_h = \frac{\phi}{\mu}, I_h = 0, I_v = 0$$

Os pontos não triviais com relação a  $S_h$  são dados pela solução de uma equação de terceiro grau,  $a_3 S_h^3 + a_2 S_h^2 + a_1 S_h + a_0$ , cujo os coeficientes são tais que:

$$\begin{aligned} a_3 &= -\mu w_2 r_2 - \mu k_2 - \mu k_2 r_2 - m u w_2 r_2^2 - \mu r_2 k_2 - \mu r_2^2 k_2; \\ a_2 &= \phi w_2 r_2 + \phi k_2 + \phi k_2 r_2 + \phi w_2 r_2^2 + \phi r_2 k_2 + \phi r_2^2 k_2 - b f_1 w_2 r_2 N_v - \mu w_2 r_1 - \mu k_2 r_1 \\ &\quad - \mu w_2 r_2 r_1 - \mu k_2 r_1 - \mu r_1 r_2 k_2 - \mu w_2 r_2 r_1 - \mu r_2 k_2 r_1; \\ a_1 &= \phi w_2 r_1 + \phi k_2 r_1 + \phi w_2 r_1 r_2 + \phi r_1 k_2 + \phi k_2 r_1 r_2 + \phi r_2 w_2 r_1 + \phi r_2 k_2 r_1 - b f_1 w_2 r_1 N_v \\ &\quad - \mu w_2 r_1^2 - \mu r_1^2 k_2 \\ a_0 &= \phi w_2 r_1^2 + \phi r_1^2 k_2; \end{aligned}$$

Sendo que,

$$w_2 = b f_2, \quad k_2 = \varepsilon + \delta, \quad r_1 = \frac{\phi}{\mu + \theta + \delta} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{\mu}{\mu + \theta + \delta}$$

Para as soluções da equação de terceiro grau, tem-se o discriminante dado por:

$$\Delta = 18a_3 a_2 a_1 a_0 - 4a_3^2 a_0 + a_2^2 a_1^2 - 4a_3 a_1^3 - 27a_3^2 a_0^2.$$

As três soluções da equação de terceiro grau são:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{-a_2}{3a_3} - \frac{1}{3a_3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0) + \sqrt{-27a_3^2\Delta}} \\
&\quad - \frac{1}{3a_3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0) - \sqrt{-27a_3^2\Delta}}; \\
S_2 &= \frac{-a_2}{3a_3} + \frac{1+i\sqrt{3}}{6a_3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0) + \sqrt{-27a_3^2\Delta}} \\
&\quad + \frac{1-i\sqrt{3}}{6a_3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0) - \sqrt{-27a_3^2\Delta}}; \\
S_3 &= \frac{-a_2}{3a_3} + \frac{1-i\sqrt{3}}{6a_3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0) + \sqrt{-27a_3^2\Delta}} \\
&\quad + \frac{1+i\sqrt{3}}{6a_3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0) - \sqrt{-27a_3^2\Delta}};
\end{aligned}$$

Portanto, os possíveis valores dos pontos de equilíbrio não triviais  $S_h^*$  são  $S_1$  e  $S_2$  e  $S_3$ , caso sejam pertencentes ao conjunto dos Reais não negativos. Para  $I_h^*$  e  $I_v^*$  temos:

$$\begin{aligned}
I_h^* &= r_1 + r_2 S_h^*; \\
I_v^* &= \frac{w_2 I_h^* N_v}{w_2 I_h^* + k_2 (S_h^* + I_h^*)}, \quad w_2 I_h^* + k_2 (S_h^* + I_h^*) \neq 0;
\end{aligned}$$

Devido à complexidade da expressão analítica para o ponto não trivial, foi realizada a análise de estabilidade apenas para a solução trivial.

## 2.3 Análise de Estabilidade

O Jacobiano encontrado do sistema (2.2) é dado a seguir:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{bf_1 I_v I_h}{(S_h + I_h)^2} - \mu & \frac{bf_1 S_h I_v}{(S_h + I_h)^2} & -\frac{bf_1 S_h}{S_h + I_h} \\ \frac{bf_1 Y I}{(S_h + I_h)^2} & -\mu - \theta - \delta & \frac{bf_1 S_h}{S_h + I_h} \\ \frac{bf_2 I (N_v - I_v)}{(S_h + I_h)^2} & \frac{bf_2 S_h (N_v - I_v)}{(S_h + I_h)^2} & -\frac{bf_2 I_h}{S_h + I_h} - \varepsilon - \xi \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Substituindo o ponto trivial  $(S_h, I_h, I_v) = (\frac{\varphi}{\mu}, 0, 0)$  no Jacobiano (2.3), encontramos o Jacobiano do ponto trivial dado a seguir.

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -bf_1 \\ 0 & -\mu - \theta - \delta & bf_1 \\ 0 & \frac{bf_2 N_v \mu}{\varphi} & -\xi - \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -bf_1 \\ 0 & \pi_1 & bf_1 \\ 0 & \frac{\pi_2}{b} & \pi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

onde

$$\begin{aligned}\pi_1 &= -\mu - \theta - \delta, \\ \pi_2 &= \frac{b^2 f_2 N_v \mu}{\phi}, \\ \pi_3 &= -\xi - \varepsilon,\end{aligned}$$

O polinômio característico  $P(\lambda)$  do Jacobiano (2.4) é tal que:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (\pi_1 + \pi_3 - \mu)\lambda^2 - (\mu\pi_3 - \pi_1\pi_3 + \mu\pi_1 + \pi_2 f_1)\lambda + \mu\pi_1\pi_3 - \mu\pi_2 f_1 \quad (2.5)$$

Do polinômio característico acima (2.5) podemos encontrar os coeficientes para verificar as condições de Routh-Hurwitz [9]:

$$\begin{aligned}a_1 &= -\pi_1 - \pi_3 + \mu, \\ a_2 &= -\mu\pi_3 + \pi_1\pi_3 - \mu\pi_1 - \pi_2 f_1, \\ a_3 &= \mu\pi_1\pi_3 - \mu\pi_2 f_1.\end{aligned}$$

Pelas condições de Routh-Hurwitz temos que o ponto de equilíbrio trivial será estável se e somente se:

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_3 > 0, \\ a_1 a_2 - a_3 > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Lembrando que todos os parâmetros do modelo são estritamente positivos. Das condições de Routh-Hurwitz (2.6) teremos:

$$-\pi_1 - \pi_3 + \mu > 0 \Leftrightarrow \mu > \pi_1 + \pi_3 \quad (2.7)$$

$$\mu\pi_1\pi_3 - \mu\pi_2 f_1 > 0 \Leftrightarrow \mu(\pi_1\pi_3 - \pi_2 f_1) > 0 \Leftrightarrow \pi_1\pi_3 > \pi_2 f_1, \quad (2.8)$$

$$(-\pi_5 + \mu)(-\mu\pi_5 + \pi_4) - \mu\pi_4 > 0. \quad (2.9)$$

onde

$$\begin{aligned}\pi_4 &= \pi_1\pi_3 - \pi_2 f_1, \\ \pi_5 &= \pi_1 + \pi_3.\end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação da condição (2.9) encontramos esta inequação.

$$-\mu^2 \pi_5 + \mu \pi_5^2 - \pi_5 \pi_4 > 0. \quad (2.10)$$

Pela segunda condição de Routh-Hurwitz (2.8) resulta que  $\pi_4 > 0$  e a primeira condição de Routh-Hurwitz (2.7) é trivialmente satisfeita, pois  $\mu$  é estritamente positivo.

As raízes de (2.10) são  $\{\mu_1 = \frac{\pi_5}{2} + \frac{\sqrt{\pi_5^2 - 4\pi_4}}{2}, \mu_2 = \frac{\pi_5}{2} - \frac{\sqrt{\pi_5^2 - 4\pi_4}}{2}\}$  com isto tem-se os seguintes resultados:

- Se  $\pi_5 = 0$  a terceira condição não é satisfeita, ou seja o ponto não será estável.
- Se  $\pi_5 > 0$  exigindo que  $\pi_5^2 > 4\pi_4 \rightarrow \pi_5 > 2\sqrt{\pi_4}$  e  $\pi_4 > 0$ ;

$$\frac{\pi_5}{2} + \frac{\sqrt{\pi_5^2 - 4\pi_4}}{2} < \mu < \frac{\pi_5}{2} - \frac{\sqrt{\pi_5^2 - 4\pi_4}}{2}. \quad (2.11)$$

Então com estas condições sendo satisfeitas o ponto trivial será estável.

- Se  $\pi_5 < 0$  de (2.10) tem-se:

$$-\mu^2\pi_5 + \mu\pi_5^2 - \pi_5\pi_4 > 0 \Rightarrow \mu^2 - \mu\pi_5 + \pi_4 > 0,$$

$$\mu > \frac{\pi_5}{2} - \frac{\sqrt{\pi_5^2 - 4\pi_4}}{2}.$$

com  $\pi_5^2 \geq 4\pi_4 \Rightarrow \pi_4 \leq \left(\frac{\pi_5}{2}\right)^2$  e  $\mu > \mu_2$  sendo satisfeitas, o ponto trivial será estável.

- E se  $\pi_5 < 0$  com  $\pi_4 > \left(\frac{\pi_5}{2}\right)^2$ , o ponto trivial será estável.

### 2.3.1 Condições de estabilidade do Ponto trivial

Dado a análise de estabilidade realizada para o ponto trivial, e o resultado obtido, segue abaixo esquematicamente as condições que caracterizam a estabilidade do ponto trivial.

Se  $\pi_5 = 0$ , não satisfaz as condições de Routh-Hurwitz, portanto não será estável;

$$Se \begin{cases} \pi_5 > 0 \text{ e } 0 < \pi_4 < \left(\frac{\pi_5}{2}\right)^2 \text{ e } \mu_1 < \mu < \mu_2, \text{ ou;} \\ \pi_5 < 0 \text{ e } \pi_4 \leq \left(\frac{\pi_5}{2}\right)^2 \text{ e } \mu > \mu_2, \text{ ou;} \\ \pi_5 < 0 \text{ e } \pi_4 > \left(\frac{\pi_5}{2}\right)^2. \end{cases} \quad \text{o ponto trivial será estável;} \quad (2.12)$$

Então se uma destas condições em (2.12) for satisfeita, todas as três condições de Routh-Hurwitz serão satisfeitas e portanto o ponto trivial será estável.

# Capítulo 3

## Simulações Numéricas

Foram realizadas simulações numéricas, com o uso do software Matlab 7.8 (R2009a), variando os cenários para o tempo de recuperação das mutucas e as funções que definem a variação da população de mutucas. Que assim permitiram analisar a dinâmica de transmissão da AIE via mutuca.

Nos quatro primeiros gráficos apresentados na figura (3.1) iniciou-se as simulações considerando o tempo de recuperação da mutuca como 4h, a população inicial de cavalos suscetíveis igual a 300 animais, nenhum cavalo infectado e uma proporção de 5% das mutucas infectadas.

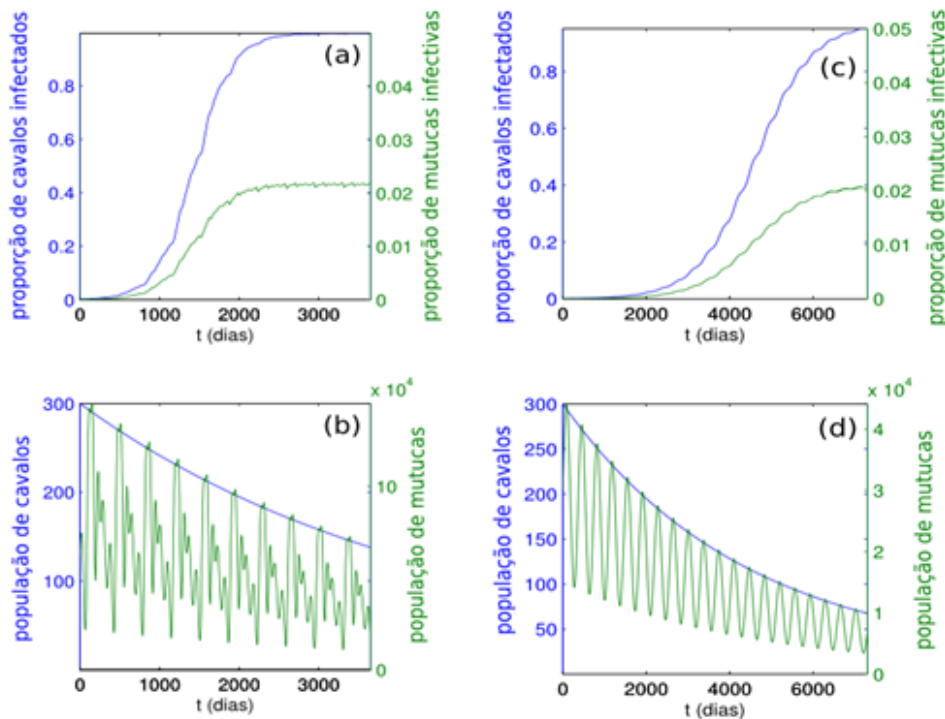


Figura 3.1: Proporção de equinos infectados e mutucas infectivas (a e c) e população total de equinos e mutucas (b e d) considerando: (a) e (b) - tempo de recuperação das mutucas de 4h e flutuação da população de mutucas descrita pelo trabalho de Barros et. al (2003); (c) e (d) - dinâmica das populações de cavalos e mutucas ao longo de 20 anos, com tempo de recuperação das mutucas de 4h e com a flutuação da população de mutucas descrita por uma função seno.

Para o primeiro par de gráficos representado por (a) e (b) a flutuação da população das mutucas é descrita pelos dados obtidos em Barros et. al (2003)[5], do qual tem-se a figura da tabela (2.1) com a abundância mensal de tabanídeos. Na simulação considerou-se um horizonte

de 10 anos. O segundo par de gráficos (c) e (d) possui a variação da população dada por uma função oscilatória do tipo seno, considerando para a simulação um horizonte de 20 anos. A escolha da função seno se deu, pois esta seria uma função oscilatória simplificada para descrever a flutuação populacional das mutucas ao longo do ano. Onde foi observado por Barros et. al (2003) [5] um aumento populacional de mutucas no Pantanal nos primeiros meses da primavera (setembro a novembro), após o que observou-se um declínio na população até atingir seus níveis mais baixos durante a época seca.

A figura (3.2) ilustra o cenário para o tempo de recuperação das mutucas igual a 30 minutos, numa janela de tempo de 20 anos. Aqui nesta simulação também considerou-se a população inicial de cavalos suscetíveis igual a 300 animais, nenhum cavalo infectado e uma proporção de 5% das mutucas infectadas. Para os dois primeiros pares de gráfico (a) e (b) a flutuação da população das mutucas é dada pelos dados obtidos por Barros et al. (2003)[5] e apresentados na figura da tabela (2.1). O segundo par de gráficos (c) e (d) possui a oscilação da população das mutucas dada pela função seno.

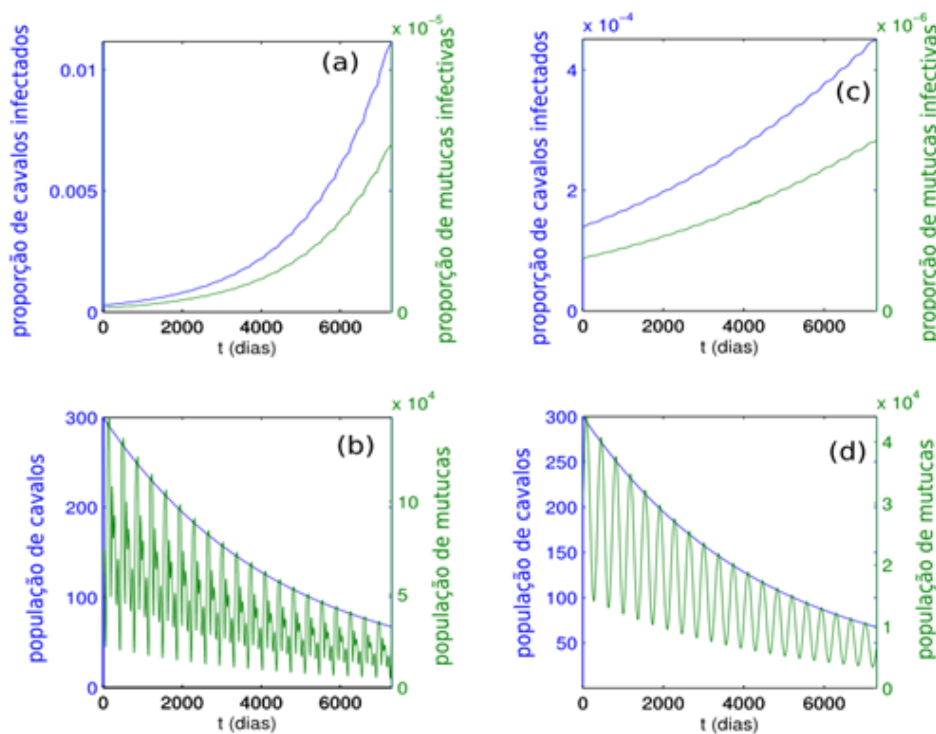


Figura 3.2: Proporção de equinos infectados e mutucas infectivas (a e c) e população total de equinos e mutucas (b e d) considerando: (a) e (b) - tempo de recuperação das mutucas de 30 minutos e flutuação da população de mutucas descrita pelo trabalho de Barros et. al (2003); (c) e (d) - dinâmica das populações de cavalos e mutucas ao longo de 20 anos, com tempo de recuperação das mutucas de 30 minutos e com a flutuação da população de mutucas descrita por uma função seno.

# Capítulo 4

## Conclusões

Os gráficos da figura (3.1) mostram que para o tempo de recuperação das mutucas igual a 4 horas, a dinâmica de infecção dos animais é muito mais rápida. Devido ao tempo de 4 horas em que o vírus permanece viável na mucosa bucal do inseto, este proporciona uma maior contaminação em mais de um animal sadio. Além da influência do tempo de recuperação, existe também a influência da função que representa a flutuação da população de mutucas. Para o gráfico (a) observa-se que em 10 anos a proporção de cavalos infectados chegaria a 100%, para uma proporção de mutucas infectivas um pouco superior a 2%.

Em (b) é possível observar que a dinâmica das populações totais apresentam um decréscimo devido à mortalidade natural. Em (c) observa-se que a proporção de 100% de equinos infectados é atingida em 20 anos, correspondendo a 2% de mutucas infectivas. Esta diferença de 10 anos entre as dinâmicas é devida à utilização da função seno para descrever a flutuação da população.

Os gráficos da figura (3.2) mostram as dinâmicas das populações considerando o tempo de recuperação das mutucas igual a 30 minutos, como afirmado por Barros & Foil (2009)[6]. Neste caso, a dinâmica das populações se apresenta mais lenta. É possível observar no gráfico (3.2a e 3.2b) que para o horizonte de 20 anos a proporção de cavalos infectados é um pouco maior que 1% e a proporção de mutucas infectivas é bem pequena ( $5 \cdot 10^{-4}$ ). Comparando-se com o resultado das simulações mostrado em (c) verifica-se uma proporção de cavalos infectados bem menor, assim como uma proporção de mutucas infectivas menor que o apresentado no gráfico (a).

Dada a prevalência de AIE de mais de 50% observada atualmente no Pantanal brasileiro, observa-se a partir da figura (3.2a) que apenas as mutucas como transmissores naturais da doença não causariam tamanha prevalência na região, considerando-se a taxa de recuperação das mutucas de 30 minutos como a literatura indica.

Portanto, os resultados mostram que outros fatores relativos ao manejo dos animais parecem também ser relevantes na dinâmica de transmissão da AIE, como, por exemplo, o compartilhamento de seringas para aplicação de medicamentos nos animais, além do uso de freios e esporas contaminadas pelos peões, que seriam responsáveis pela transmissão mecânica da AIE.

# Capítulo 5

## Agradecimentos

O autor agradece ao CNPq pelo suporte por meio da concessão de bolsas PIBIC (Proc. 158587/2011-1) e de pós-doutorado (Proc. 560461/2010-0), e à Fapesp pelo suporte financeiro (Proc. 2009/15098-0).



# Referências Bibliográficas

- [1] E. E. Marquesone, “Modelo matemático para o estudo de doenças de transmissão indireta via tabanus tanamus (mutuca),” dissertação de mestrado, Universidade Federal do ABC, Santo André, SP, Fevereiro 2011.
- [2] Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, Equinos. Disponível em <http://www.agricultura.gov.br/animal/especies/equideos>. Último acesso 02.julho.2012.
- [3] R. A. M. S. Silva, U. G. P. Abreu, and A. T. M. de Barros, “Anemia infecciosa equina: epizootiologia, prevenção e controle no pantanal,,” documentos, Embrapa Pantanal, 2001. Available <http://www.cpap.embrapa.br/publicacoes/online/CT29.pdf>.
- [4] “Boletim epidemiológico - anemia infecciosa equina,,” 2010. Instituto de Defesa Agropecuária e Florestal do Espírito Santo (IDAF)/ DDSIA / SEAR, N<sup>o</sup>. 2, Ano 1.
- [5] A. T. M. Barros, L. D. Foil, and S. A. de Souza Vazquez, “Mutucas do pantanal: Abundância relativa e sazonalidade na subregião da nhacolândia,,” boletim de pesquisa e desenvolvimento, Embrapa Pantanal, Dezembro 2003.
- [6] A. T. M. Barros and L. D. Foil, “Influência da distância na transferência de tabanídeos (mutucas) entre equinos,,” boletim de pesquisa e desenvolvimento, Embrapa Pantanal, Dezembro 2009.
- [7] J. RAFAEL and J. CHARLWOOD, “Idade fisiológica, variação sazonal e periodicidade diurna de quatro populações de tabanidae (diptera) no campus universitário, manaus, brasil,,” *Acta Amazônica*, vol. 10, no. 8, pp. 907–927, 1980.
- [8] D. Morel and M. C. G., *Equine Reproductive Physiology, Breeding and Stud Management*; Cambridge, MA, USA.: CABI Publishing, 2003.
- [9] L. EDELSTEIN-KESHET, *Mathematical models in biology*. Birkäuser mathematics series, 1988.