

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

MS777: PROJETO SUPERVISIONADO

Titulo: MATEMATICA FINANCEIRA –
INVESTIMENTOS BANCARIOS

Nome: Tabata de Souza Braga

Orientador: Samuel Rocha

Valor do Dinheiro

O objetivo básico da Matemática Financeira é estudar o valor do dinheiro ao longo do tempo. Um exemplo nos ajudará a tornar bem clara esta afirmativa básica.

Se perguntarmos a alguém com conhecimentos básicos de matemática: "Qual o resultado de R\$ 1.000,00 + R\$ 1.000,00 + R\$ 1000,00?" A resposta imediata seria "R\$ 3.000,00".

Se à pergunta original acrescentarmos a informação: "Cada uma destas parcelas será recebida em 30 dias" a resposta já não será tão imediata.

Em outros termos: "Você prefere receber R\$ 3.000,00 hoje ou R\$ 1.000,00 hoje e o restante em duas parcelas mensais de R\$1.000,00?". A resposta quase unânime seria: "Prefiro receber R\$3.000,00 hoje". Mas se perguntássemos: "Você prefere receber R\$ 2.780,00 hoje ou R\$ 1.000,00 mais duas parcelas mensais de R\$ 1.000,00?", a resposta dependeria de conceitos de Matemática Financeira.

A consideração da variável tempo introduziu uma complexidade maior numa simples operação de soma de quantidades. Ao se abrir mão da possibilidade de receber uma determinada quantia em dinheiro no tempo presente, quando o preço de bens ou serviços que poderiam ser adquiridos com este dinheiro é conhecido, introduz-se incertezas que requerem conceitos e operações mais sofisticadas para sua quantificação. Isto vale tanto para decisões pessoais quanto para decisões de empresas quando o trato com o dinheiro está envolvido. Este é o campo básico de aplicação da Matemática Financeira.

Conceitos Básicos

- Capital Inicial – valor aplicado (valor inicial);
- Juros simples – são acréscimos em que, a cada período, os juros são calculados sobre o capital inicial;
- Juros compostos – são acréscimos em que, a cada período, os juros são calculados sobre o capital acumulado;
- Montante – valor obtido pela soma do valor inicial mais os juros (valor final).

Conceitos Matemáticos P.A. e P.G.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma progressão aritmética (abreviadamente, P. A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r . O número r é chamado de razão ou diferença comum da progressão aritmética.

Alguns exemplos de progressões aritméticas:

- $1, 4, 7, 10, 13, \dots$, é uma progressão aritmética em que a razão (a diferença entre os números consecutivos) é igual a 3.
- $-2, -4, -6, -8, -10, \dots$, é uma P.A. em que $r = -2$.
- $6, 6, 6, 6, 6, \dots$, é uma P.A. com $r = 0$.

Numa progressão aritmética, a partir do segundo termo, o termo central é a média aritmética do termo antecessor e do sucessor, isto é, $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1})/2$.

Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

O n -ésimo termo de uma progressão aritmética, denotado por a_n , pode ser obtido por meio da fórmula

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r,$$

em que:

- a_1 é o primeiro termo;
 - r é a razão.
-

Por meio da fórmula acima também é possível inserir (ou interpolar) uma quantidade de meios aritméticos entre dois números dados, de modo que eles formem parte de uma progressão aritmética. Esse procedimento é chamado de interpolação aritmética.

Demonstração

A fórmula do termo geral pode ser demonstrada por indução matemática:

- Ela é válida para o segundo termo pois, por definição, cada termo é igual ao anterior mais uma constante fixa r e portanto $a_2 = a_1 + 1 \cdot r$;
- Assumindo como hipótese de indução que a fórmula é válida para $n - 1$, ou seja, que $a_{n-1} = a_1 + (n - 2) \cdot r$, resulta que

o n -ésimo termo é dado por:

$$a_n = a_{n-1} + r = (a_1 + (n - 2) \cdot r) + r = a_1 + ((n - 2) \cdot r + r) = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Uma progressão geométrica é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante, chamada de razão da progressão geométrica e indicada geralmente pela letra q (inicial da palavra "quociente").

Alguns exemplos de progressão geométrica:

- $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \dots)$, em que $q = 2$;
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \dots)$, em que $q = \frac{1}{2}$;
- $(-3, 9, -27, 81, -243, 729, -2187, \dots)$, em que $q = -3$;
- $(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, \dots)$, em que $q = 1$;
- $(3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$, em que $q = 0$.

Definição por recursão e fórmula do termo geral

Costuma-se denotar por a_n o n -ésimo termo de uma progressão geométrica. Assim, a progressão fica totalmente definida pelo valor de seu termo inicial a_1 e sua razão q .

A sucessão dos termos é obtida por recursão:

- $a_n = a_1, n = 1$;
- $a_{n+1} = q \cdot a_n, n = 2, 3, 4, \dots$

É fácil demonstrar por indução matemática que

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Em alguns contextos (por exemplo, ao usar a linguagem de programação C), pode ser conveniente considerar que o termo inicial da PG tem índice zero (a_0).

Neste caso, o termo geral torna-se

$$a_n = a_0 q^n.$$

De modo geral, o n-ésimo termo pode ser calculado a partir do m-ésimo termo simplesmente por:

$$a_n = a_m q^{n-m}, \quad n > m.$$

Após conhecermos esses conceitos matemáticos podemos introduzir o conteúdo de investimentos financeiros e mais, especificamente, investimentos bancários. As informações a seguir, são apenas fictícias mas são bem próximas à realidade.

Tipos de investimentos bancários:

- Poupança

Rendimento: 0,45% a.m.

Tributação de I.R.: Não há. (Valor aplicado até R\$50.000,00).

Taxa de administração: Não há.

Liquidez: Mensal, por isso se resgatar o valor aplicado 15 dias após a aplicação não haverá correção.

- CDB (Cédula de Depósito Bancário)

Rendimento: Um percentual do CDI (Cédula de Depósito Interbancário)

R\$ 1.000,00 a R\$ 9.999,99 – 80% do CDI

R\$ 10.000,00 a R\$ 24.999,99 – 84% do CDI

R\$ 25.000,00 a R\$ 49.999,99 – 88% do CDI

R\$ 50.000,00 a R\$ 99.999,99 – 90% do CDI

R\$ 100.000,00 a R\$ 299.999,99 – 92% do CDI

A partir de R\$ 300.000,00 – 95% do CDI

Tributação de I.R.: Apenas sob o rendimento

1 a 180 dias: 22,5%

181 a 360 dias : 20%

361 a 540 dias: 17,5%

541 a 720 dias: 15%

Acima de 720 dias: 15%

Taxa de administração: É a diferença entre 100% e a porcentagem que é paga do CDI para o investimento.

Liquidez: Diária, ou seja, caso haja resgate em 45 dias haverá correção proporcional aos 45 dias.

- Fundo Plus

Rendimento: CDI

Tributação de I.R.: Come-cotas, ocorre nos meses de Maio e Novembro e é tributado 15% sob o montante de cotas que o cliente possui. O valor aplicado não diminui, no entanto, é alterado a quantidade de cotas que o cliente possui.

Taxa de administração: 4,5% a.a., ou seja, 0,375%a.m.

Liquidez: Diária.

- VGBL (Fundo de Investimento dentro da carteira da Previdência Privada, grande quantidade de papéis do Tesouro Nacional).

Rendimento: 0,78%a.m.

Tributação de I.R.: 15% sob o rendimento.

Taxa de administração: 0,5% sob o montante aplicado, no ato da aplicação.

Liquidez: Diária.

OBS: Nesse investimento existe carência mínima de 6 meses, nesse período o dinheiro fica travado, só podendo ser sacado após esse prazo.

OBS: Adotemos o CDI como 0,70%a.m.

A seguir apresentaremos alguns exemplos práticos de melhores opções para investimentos:

1. Digamos que uma Cliente X compareceu em uma Agência Bancária, com o valor de R\$ 100.000,00 para investir em um período de 20 dias. Qual seria a melhor opção de investimento?

Resposta:

Poupança (0,45%a.m.) – Como cliente irá resgatar antes de 30 dias, não haverá rendimento em poupança.

CDB (92% do CDI – 0,64%a.m.) – 0,021%a.d. e em 20 dias terá rendimento de 0,42% sobre R\$ 100.000,00 o que dará R\$ 420,00 e como são apenas 20 dias temos que deduzir o IR que está na alíquota de 22,5%, que dará R\$ 94,50 de dedução. Nesse caso o lucro líquido é de R\$ 325,50.

Fundos (CDI – taxa de administração: 0,70 – 0,375=0,325 a.m. ou 0,011%a.d.) Lucro líquido de R\$ 220,00.

Percebemos então que o melhor investimento é o CDB.

2. Temos agora uma Cliente Y com o valor de R\$8.000,00 para aplicar no prazo de 4 meses. Qual será o melhor investimentos?

Resposta:

Poupança (0,45%a.m.) – R\$ 8144,96 valor de resgate.

CDB (80% do CDI – 0,56%a.m.) – Rendimento em 4 meses será de R\$ 180,70, deduzindo o IR teremos o rendimento líquido de R\$ 140,05 e valor de resgate de R\$ 8140,05.

Fundos (CDI – taxa de administração: $0,70 - 0,375 = 0,325\%$ a.m.)
Lucro líquido de R\$ 104,49, e resgate de R\$ 8104,49.

Percebemos que melhor investimento é Poupança.

Exercícios:

- 1.** Dada a Cliente W que compareceu ao banco com o valor de R\$ 350.000,00 para aplicar pelo período de 2 anos, qual seria a melhor opção de investimento?
- 2.** Tendo o Cliente Y com o valor de R\$ 20.000,00 para aplicar no prazo de 6 meses, qual melhor investimento?