



Uso de equações diferenciais com *delay* para estudo da dinâmica de doenças em plantas

Guilherme Augusto Braga – ra: 071038
IMECC – UNICAMP
gaugustob@gmail.com

Orientadora: Sônia Ternes.
Co-Orientador: Raphael Vilamiu.
Embrapa Informática Agropecuária.

10 de julho de 2012

Resumo

Um dos problemas do uso de equações diferenciais ordinárias em modelos populacionais é que algumas taxas, como nascimento e morte, são assumidas como instantâneas na variação da população, onde na verdade pode haver um tempo para que essas variações possam ser sentidas pela população [1]. Este trabalho apresenta alguns modelos matemáticos onde equações com *delay* foram utilizadas para modelar a população e faz uma aplicação dessas equações no modelo elaborado por Braga *et al* [2] para avaliar a evolução temporal da doença considerando o sistema planta (citros) - inseto vetor (*Diaphorina citri*).

Sumário

1	Histórico	2
2	Modelo Matemático	5
2.1	Modelo Compartimental	5
2.2	Modelo Compartimental com <i>delay</i>	7
3	Pontos de Equilíbrio e Estabilidade	9
3.1	Estabilidade	9
4	Resultados e Conclusões	11
4.1	Simulações Numéricas	11
4.2	Conclusão	11
5	Agradecimentos e Referências	19
5.1	Agradecimentos	19

Capítulo 1

Histórico

Em modelos que utilizam equações diferenciais as taxas aplicadas nas populações são consideradas instantâneas, mas em modelos que representam a realidade nem sempre isso é verdade. Algumas taxas podem levar algum tempo, chamado *delay*, para agir nas populações. Equações diferenciais com *delay* são da forma

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t), N(t-T)) \quad (1.1)$$

onde $T > 0$ é o parâmetro do *delay* [1].

Um dos primeiros trabalhos que utilizou equações diferenciais com *delay* em populações foi realizado por Hutchinson, em 1948 [3]. Neste trabalho ele se utilizou de equações logísticas com *delay* para modelar o comportamento de uma população, apresentando a seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t-T)}{K} \right) \quad (1.2)$$

Em 1957, Nicholson [3] elaborou uma equação logística com *delay* para modelar a dinâmica da população de moscas *Lucilia cuprina*, considerada na época uma praga na criação de ovelhas na Austrália. Neste trabalho, ele utilizou K como sendo o nível de comida disponível e T como o tempo aproximado para que as larvas da mosca se tornarem adultas. Com base no trabalho de Nicholson, Gurney *et al* [3], em 1980, propôs um novo modelo, atualmente conhecido como *Nicholson blowflies equation*:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-T) \exp(-N(t-T)/K) - mN \quad (1.3)$$

Em 1973, May [4], com base nas equações de Hutchinson, apresentou um modelo vegetação - herbívoro - carnívoro, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-T)}{K} \right) - \alpha N(t)P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = -bP(t) + \beta P(t)N(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

onde $N(t)$ representa a população de herbívoros e $P(t)$ a população de carnívoros. A partir dessas equações o autor encontrou os pontos de equilíbrio do sistema e fez uma análise da estabilidade do modelo.

Analisando trabalhos mais recentes que envolvam equações diferenciais com *delay*, temos que em 2007, Pang e Chen [5] elaboraram um modelo do tipo SIR com pulsos de vacinação e taxa de contato saturada.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha S(t)} + \gamma R(t) + \mu(1 - S(t)), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha S(t)} - \frac{\beta S(t - \omega)I(t - \omega)}{1 + \alpha S(t - \omega)} e^{-\mu\omega} - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{\beta S(t - \omega)I(t - \omega)}{1 + \alpha S(t - \omega)} e^{-\mu\omega} - (\gamma + \mu)R(t), \\ t \neq n\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(t^+) = (1 - \theta)S(t), \\ I(t^+) = I(t), \\ t = n\tau \end{cases}$$

onde $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ representam as proporções de indivíduos suscetíveis, infectantes e recuperados em um tempo t , respectivamente. $\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha S(t)}$ é a taxa de contato saturada, γ é a taxa de recuperação, μ é a taxa de nascimento e morte, ω é o período de latência da doença, θ é a proporção de vacinas bem sucedidas, as quais são aplicadas num pulso a cada τ anos. $0 < \theta < 1$, $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \omega, \tau > 0, n = 0, 1, 2, \dots$

O autor encontra o valor para qual é possível controlar a propagação de uma doença através da vacinação, aumentando a proporção de imunes e reduzindo o período entre vacinações.

Em 2009, Jiao *et al* [6] elaboraram um modelo presa-predador do tipo Holling tipo II com interferências mútuas e com impulsos de perturbações na população de predadores.

$$\begin{cases} x_1'(t) = rx_2(t) - re^{-w\tau_1}x_2(t - \tau_1) - wx_1(t), \\ x_2'(t) = re^{-w\tau_1}x_2(t - \tau_1) - \frac{\beta x_2(t)}{1 + ax_2(t)}x_3^m(t) - d_3x_2(t) - d_4x_2^2(t), \\ x_3'(t) = \frac{k\beta x_2(t)}{1 + ax_2(t)}x_3^m(t) - dx_3(t), \\ t \neq n\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1(t) = 0 \\ \Delta x_2(t) = 0, \\ \Delta x_3(t) = \mu, \\ t = n\tau, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

e as condições iniciais são:

$$(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \varphi_3(\xi)) \in C_+ = C([- \tau_1, 0], R_+^3), \varphi_i(0) > 0, i = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

Tal que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ representam a densidade da praga imaturas e maduras, respectivamente, $x_3(t)$ representa a densidade do inimigo natural. τ_1 representa um tempo de maturação, constante, r, w, d_3, d_4, d, k, a e β são constantes positivas, e $0 < m < 1$ representa o efeito da interferência mútua. Os autores fazem uma análise de estabilidade do modelo e concluem que a solução é globalmente atrativa. A condição de persistência da praga também é encontrada.

No ano de 2010, Bhattacharyya e Mukhopadhyay [7] elaboraram um modelo do tipo Holling tipo II, tal que:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S+I}{k} \right) - \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - \frac{p_1 SY}{m+S}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - cI - \frac{p_2 IY}{m+I}, \\ \frac{dY}{dt} = -dY + q \frac{p_1 SY}{m+S} + q \frac{p_2 IY}{m+I}. \end{cases}$$

com as seguintes condições iniciais: $S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, Y(0) = Y_0 > 0, p_1, p_2 > 0$ e $0 < q \leq 1$.

Onde a população de presa ($N(t)$) é dividida em suscetíveis ($S(t)$) e infectados ($I(t)$), a população de predadores é denotada por $Y(t)$. Tem-se também que d é a taxa de mortalidade do predador, c é a taxa de mortalidade da presa, β é a força de infecção, α é o efeito de inibição, p_1 e p_2 são os coeficientes de predação e m é a constante de meia saturação.

Os autores fazem a análise de estabilidade e equilíbrio do sistema para verificar a propagação da doença na população de presas.

Além disso, um modelo com *delay* no período de latência da doença baseado no modelo anterior é elaborado:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S+I}{k} \right) - \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1+\alpha I(t-\tau)} - \frac{p_1 SY}{m+S}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1+\alpha I(t-\tau)} - cI - \frac{p_2 IY}{m+I}, \\ \frac{dY}{dt} = -dY + q \frac{p_1 SY}{m+S} + q \frac{p_2 IY}{m+I}. \end{cases}$$

com as seguintes condições iniciais: $S(\tau) = \bar{S}(\tau) \geq 0, I(\tau) = \bar{I}(\tau) \geq 0, Y(0) = Y_0 > 0$ onde \bar{S} e \bar{I} são funções não negativas contínuas em $-\tau \leq t \leq 0$

Para esse modelo com *delay*, os autores também encontraram o equilíbrio e estabilidade do modelo, bem com a análise de bifurcação. Enfatizando a importância desses tipos de equações diferenciais levando em consideração o período de latência para a dinâmica do controle da doença.

No ano de 2011, N. Bairagi [8] elaborou um modelo presa-predador com *delay* da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S+I}{k} \right) - \lambda IS, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda IS - \frac{mIP}{a+I} - \mu I, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{m\alpha I(t-\tau)P(t-\tau)}{a+I(t-\tau)} - dP. \end{cases}$$

Com as seguintes condições iniciais: $S(\theta) = \psi_1(\theta) \geq 0, I(\theta) = \psi_2(\theta) \geq 0, P(\theta) = \psi_3(\theta) \geq 0, \theta \in (-\tau, 0]$.

Nesse trabalho, o autor investiga o efeito do *delay* na estabilidade e no equilíbrio do sistema.

Capítulo 2

Modelo Matemático

2.1 Modelo Compartimental

Com o intuito de avaliar a dinâmica temporal da doença conhecida como Huanglongbing (HLB) do citrus, causada pela presença da bactéria *Candidatus Liberibacter spp.*, considerando o sistema planta (citros) - inseto vetor (*Diaphorina citri*), elaborou-se dois modelos matemáticos compartimentais determinísticos. Tais modelos diferem entre si pela consideração de um processo de retardo (*delay*) na fase de incubação da doença na planta. Com base na literatura determinou-se valores para os parâmetros biológicos do modelo e a partir da criação de cenários de simulação verificou-se numericamente algumas condições que favorecem a evolução da doença. A Figura 2.1 descreve os compartimentos considerados no modelo original de Braga *et al* [2], que são descritos matematicamente pelo sistema de equações diferenciais ordinárias em 2.1, de forma que S_h é o compartimento dos hospedeiros (citros) suscetíveis à doença ; E_h é o compartimento dos hospedeiros que apresentam a doença em período de incubação e I_h é o compartimento de hospedeiros sintomáticos, tal que $N_h = S_h + E_h + I_h$. Ainda, S_v é o compartimento dos vetores (psílídeos) não infectivos e I_v o compartimento dos vetores infectivos, de tal forma que $N_v = S_v + I_v$.

Conforme apresentado por Braga *et al* [2], os compartimentos da Figura 1 são descritos pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt} &= \mu_h I_h - \lambda_h S_h, \\ \frac{dE_h}{dt} &= \lambda_h S_h - \frac{1}{t_s} E_h, \\ \frac{dI_h}{dt} &= \frac{1}{t_s} E_h - \mu_h I_h, \\ \frac{dS_v}{dt} &= \mu_v N_v - (\lambda_v + \mu_v) S_v, \\ \frac{dI_v}{dt} &= \lambda_v S_v - \mu_v I_v. \end{cases} \quad (2.1)$$

A Tabela 2.1 apresenta o significado dos parâmetros utilizados em 2.1, bem como o valor numérico utilizado nas simulações.

No modelo, considera-se que cada planta retirada é substituída automaticamente por uma muda nova e saudável. Considerou-se também somente a fase adulta do inseto vetor (*Diaphorina Citri*) e que todos eles só se tornam portadores do HLB nesta fase. Dessa forma, pode-se assumir que N_h e N_v são constantes. Assim, fazendo as seguintes substituições:

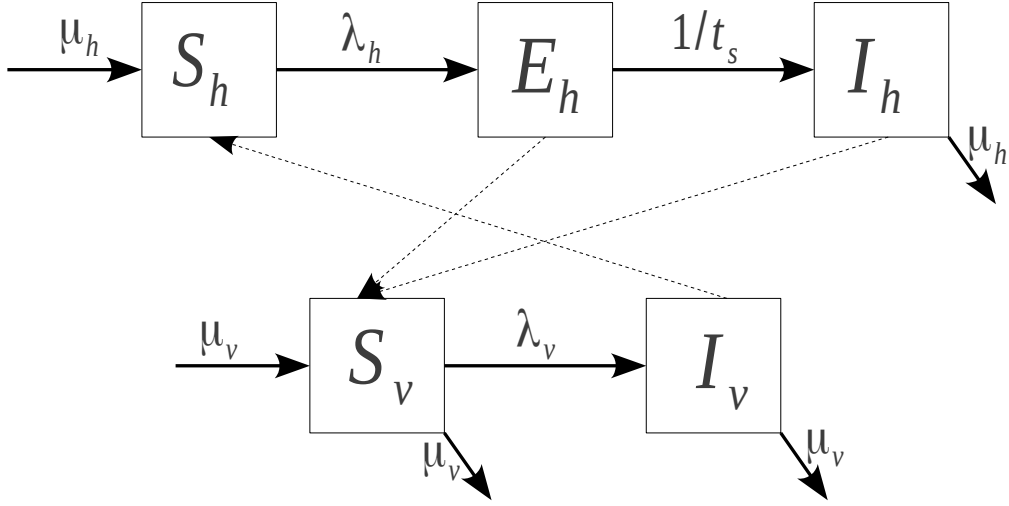


Figura 2.1: Modelo Compartimental do patossistema Diaphorina Citri – Planta. Setas contínuas mostram o fluxo entre compartimentos e setas tracejadas representam a influência dos compartimentos no processo de transmissão da bactéria.

$$\frac{S_h}{N_h} = s_h \quad \frac{E_h}{N_h} = e_h \quad \frac{I_h}{N_h} = i_h \quad \frac{S_v}{N_v} = s_v \quad \frac{I_v}{N_v} = i_v \quad (2.2)$$

e derivando cada um dos termos das equações do sistema expresso em 2.6, o sistema em 2.6 passa a ser descrito por:

$$\begin{cases} \frac{ds_h}{dt} = \mu_h i_h - \lambda_h s_h, \\ \frac{di_h}{dt} = \frac{1}{t_s} (1 - s_h - i_h) - \mu_h i_h, \\ \frac{di_v}{dt} = \lambda_v (1 - i_v) - \mu_v i_v, \end{cases} \quad (2.3)$$

Tomando $b' = b \frac{N_v}{N_h}$ ficamos com os seguintes valores para a força de infecção:

$$\lambda_h = b' p_h \frac{I_v}{N_v} = \epsilon_h i_v$$

$$\lambda_v = b p_v \frac{(E_h + I_h)}{N_h} = \epsilon_v (1 - s_h)$$

Tal que $\epsilon_h = b \frac{N_v}{N_h} p_h$ e $\epsilon_v = b p_v$ tal que $\epsilon_h, \epsilon_v \geq 0$. Então tem-se:

Tabela 2.1: Parâmetros do Modelo (Braga *et al* [2])

Parâmetro	Valor	Significado
N_h	População total de plantas	2000
p_h	Probabilidade da planta adquirir HLB do psíldeo	0.6833
p_v	Probabilidade de aquisição do HLB pelo inseto	0.3650
t_s	Tempo de incubação da doença nas plantas	12
μ_v	Taxa de mortalidade natural do inseto	0.2917
b	Taxa de troca de hospedeiro	1.216
μ_h	Taxa de retirada e replantio de plantas	Cenário

$$\begin{cases} \frac{ds_h}{dt} &= \mu_h i_h - \varepsilon_h i_v s_h, \\ \frac{di_h}{dt} &= \frac{1}{t_s}(1 - s_h - i_h) - \mu_h i_h, \\ \frac{di_v}{dt} &= \varepsilon_v(1 - s_h)(1 - i_v) - \mu_v i_v, \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2 Modelo Compartmental com *delay*

O modelo com *delay* considera os mesmos compartimentos e introduz o tempo de incubação da doença como um processo de *delay* t_s , conforme descrito pela Figura 2.1:

$$\begin{cases} \frac{dS_h(t)}{dt} &= \mu_h I_h(t) - \lambda_h(t) S_h(t), \\ \frac{dE_h(t)}{dt} &= \lambda_h(t) S_h(t) - \lambda_h(t - t_s) S_h(t - t_s), \\ \frac{dI_h(t)}{dt} &= \lambda_h(t - t_s) S_h(t - t_s) - \mu_h I_h(t), \\ \frac{dS_v(t)}{dt} &= \mu_v N_v - (\lambda_v(t) + \mu_v) S_v(t), \\ \frac{dI_v(t)}{dt} &= \lambda_v(t) S_v(t) - \mu_v I_v(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

Assumindo que N_h e N_v são constantes e fazendo as mesmas substituições que em 2.2, o sistema em 2.5 passa a ser descrito por:

$$\begin{cases} \frac{ds_h(t)}{dt} &= \mu_h i_h(t) - \lambda_h(t) s_h(t), \\ \frac{di_h(t)}{dt} &= \lambda_h(t - t_s) s_h(t - t_s) - \mu_h i_h(t), \\ \frac{di_v(t)}{dt} &= \lambda_v(t)(1 - i_v(t)) - \mu_v i_v(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Tomando $b' = b \frac{N_v}{N_h}$ e fazendo as seguintes substituições $\varepsilon_h = b \frac{N_v}{N_h} p_h$ e $\varepsilon_v = b p_v$ tal que

$\varepsilon_h, \varepsilon_v \geq 0$, ficamos com os seguintes valores para a força de infecção:

$$\lambda_h = b' p_h \frac{I_v(t)}{N_v} = \varepsilon_h i_v(t) \quad (2.7)$$

$$\lambda_v = b p_v \frac{(E_h(t) + I_h(t))}{N_h} = \varepsilon_v (1 - s_h(t)) \quad (2.8)$$

Então:

$$\begin{cases} \frac{ds_h}{dt} &= \mu_h i_h(t) - \varepsilon_1 i_v(t) s_h(t), \\ \frac{di_h}{dt} &= \varepsilon_1 i_v(t - t_s) s_h(t - t_s) - \mu_h i_h(t), \\ \frac{di_v}{dt} &= \varepsilon_2 (1 - s_h(t)) (1 - i_v(t)) - \mu_v i_v(t). \end{cases} \quad (2.9)$$

Capítulo 3

Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

3.1 Estabilidade

Encontrar o ponto de estabilidade do sistema [9] significa encontrar o ponto onde não há variações, ou seja, onde as derivadas são nulas. Dessa forma, igualando o sistema 2.4 encontramos dois pontos onde há equilíbrio $P(s_h, i_h, i_v) : P_1 = (1, 0, 0)$ e $P_2 = P(s'_h, i'_h, i'_v)$, de maneira que

$$\begin{aligned} s'_h &= \frac{\mu_h \mu_v + \epsilon_v \mu_h}{\epsilon_h \epsilon_v \mu_h t_s + \epsilon_v \mu_h + \epsilon_h \epsilon_v} \\ i'_h &= \frac{\epsilon_h \epsilon_v \mu_h t_s - \mu_h \mu_v + \epsilon_h \epsilon_v}{\epsilon_h \epsilon_v \mu_h^2 t_s^2 + (\epsilon_v \mu_h^2 + 2\epsilon_h \epsilon_v \mu_h) t_s + \epsilon_v \mu_h + \epsilon_h \epsilon_v} \\ i'_v &= \frac{\epsilon_h \epsilon_v \mu_h t_s - \mu_h \mu_v + \epsilon_h \epsilon_v}{(\epsilon_h \mu_h \mu_v + \epsilon_h \epsilon_v \mu_h) t_s + \epsilon_h \mu_v + \epsilon_h \epsilon_v} \end{aligned}$$

Para o sistema de equações 2.4 temos a seguinte matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} -\epsilon_h i_v & \mu_h & -\epsilon_h s_h \\ -\frac{1}{t_s} & -\frac{1}{t_s} - \mu_h & 0 \\ -\epsilon_v(1 - i_v) & 0 & -\epsilon_v(1 - s_h) - \mu_v \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Para este trabalho, somente os pontos de equilíbrio do sistema sem *delay* (2.4) foram analisados, deixando para o modelo com *delay* somente a análise numérica.

Ponto Trivial

Primeiro vamos calcular a estabilidade do ponto trivial $P_1 = (1, 0, 0)$ chamado de ponto Trivial:

Para P_1 temos a seguinte matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_h & -\epsilon_h \\ -\frac{1}{t_s} & -\frac{1}{t_s} - \mu_h & 0 \\ -\epsilon_v & 0 & -\mu_v \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

e então teremos o seguinte polinômio característico:

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{1}{t_s} + \mu_h + \mu_v \right) + \lambda \left(\frac{\mu_h}{t_s} + \frac{\mu_v}{t_s} + \mu_h \mu_v - \varepsilon_h \varepsilon_v \right) + \left(\frac{\mu_h \mu_v}{t_s} - \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v}{t_s} - \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h \right) \quad (3.3)$$

então:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{t_s} + \mu_h + \mu_v \\ a_2 &= \frac{\mu_h}{t_s} + \frac{\mu_v}{t_s} + \mu_h \mu_v - \varepsilon_h \varepsilon_v \\ a_3 &= \frac{\mu_h \mu_v}{t_s} - \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v}{t_s} - \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h \end{aligned}$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz, as seguintes condições devem ser satisfeitas para que o ponto seja considerado estável:

$$a_1 > 0 \quad (3.4)$$

$$a_3 > 0 \quad (3.5)$$

$$a_1 a_2 > a_3 \quad (3.6)$$

Pela primeira condição, temos:

$$\mu_h + \mu_v > -\frac{1}{t_s} \quad (3.7)$$

Pela segunda condição, temos:

$$\frac{\mu_h \mu_v}{t_s} > \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v}{t_s} + \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h \quad (3.8)$$

e pela terceira condição, temos:

$$\left(\frac{1}{t_s} + \mu_h + \mu_v \right) \left(\frac{\mu_h}{t_s} + \frac{\mu_v}{t_s} + \mu_h \mu_v - \varepsilon_h \varepsilon_v \right) > \frac{\mu_h \mu_v}{t_s} - \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v}{t_s} - \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h \Rightarrow \quad (3.9)$$

$$(\mu_h + \mu_v)^2 \frac{1}{t_s} + (\mu_h + \mu_v) \left(\mu_h \mu_v + \frac{1}{t_s} \right) > \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h \quad (3.10)$$

A partir do estudo analítico das expressões acima observa-se que as condições 3.8 e 3.9 podem não ser satisfeitas conforme os valores dos parâmetros, e portanto a solução trivial P_1 é um ponto de equilíbrio instável. Para a análise de estabilidade do ponto P_2 não foi realizado o estudo analítico devido à complexidade dos valores obtidos.

Capítulo 4

Resultados e Conclusões

4.1 Simulações Numéricas

As simulações numéricas foram realizadas com o uso do software MATLAB 7.8 (R2009a), a partir do sistemas de equações 2.4 (sem *delay*) e 2.9 (com *delay*), considerando que o patossistema inicia-se com todas as plantas saudáveis e com 10% da população de insetos portadoras do HLB. Para determinar o valor do parâmetro b , que representa a quantidade de troca de hospedeiro que o psilídeo realiza durante a sua vida, utilizou-se o valor de $b = 1.216$, estimado pelo número de psilídeo por armadilhas multiplicado pelo número de armadilhas e pela proporção de insetos em relação ao total de plantas num pomar¹.

As simulações foram realizadas utilizando os valores apresentados na Tabela 2.1 para os valores de $\mu_h = 0.0$, sem remoção nem replantio de novas mudas; $\mu_h = 0.5$ e $\mu_h = 1.0$, que representa a remoção de todas as plantas infectadas, considerando cenários com população total de 400 insetos e com 1500 insetos.

4.2 Conclusão

Comparando-se os resultados dos dois modelos apresentados (com e sem *delay*) pode-se observar uma grande diferença na dinâmica do patossistema, como apresentado nas figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6. Conclui-se que as equações com *delay* são mais realísticas, pois a partir da chegada dos psilídeos no pomar, somente depois do tempo de incubação é que as primeiras plantas começarão a apresentar os sintomas de HLB. Embora os dois tipos de equações sempre converjam para o mesmo ponto de equilíbrio ao longo do tempo (Figura 4.7), a dinâmica nos primeiros meses é o que realmente irá influenciar as tomadas de decisões dos agricultores em relação a doença. Além disso, através da análise das figuras 4.1, 4.3 e 4.5 em comparação com as 4.2, 4.4 e 4.6, pode-se concluir que a remoção de plantas, em conjunto com o controle do psilídeo vetor, são fundamentais para o controle da doença no campo, dado que a proporção de plantas infectadas, ao final do período observado, diminui com a retirada precoce de plantas sintomáticas (dada por μ_h) e com a existência de baixos níveis populacionais do inseto vetor (dado por N_v). Tais resultados condizem com as instruções do MAPA para controle da doença [10].

¹LARANJEIRA, Francisco Ferraz (Engenheiro Agrônomo, Embrapa Mandioca e Fruticultura). Comunicação pessoal, 2011.

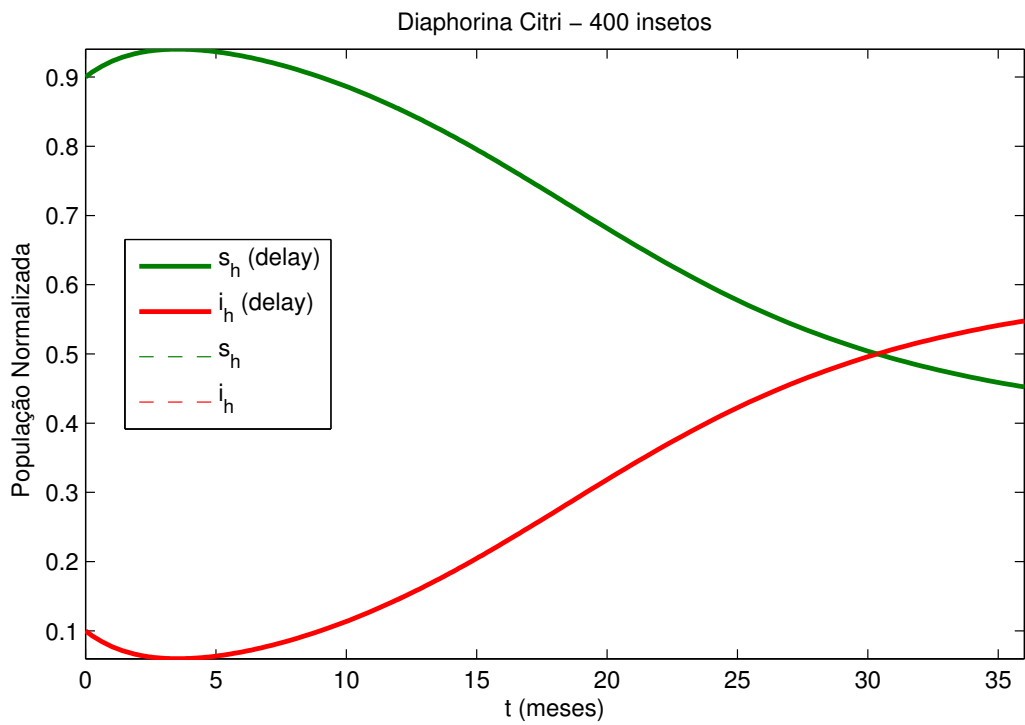
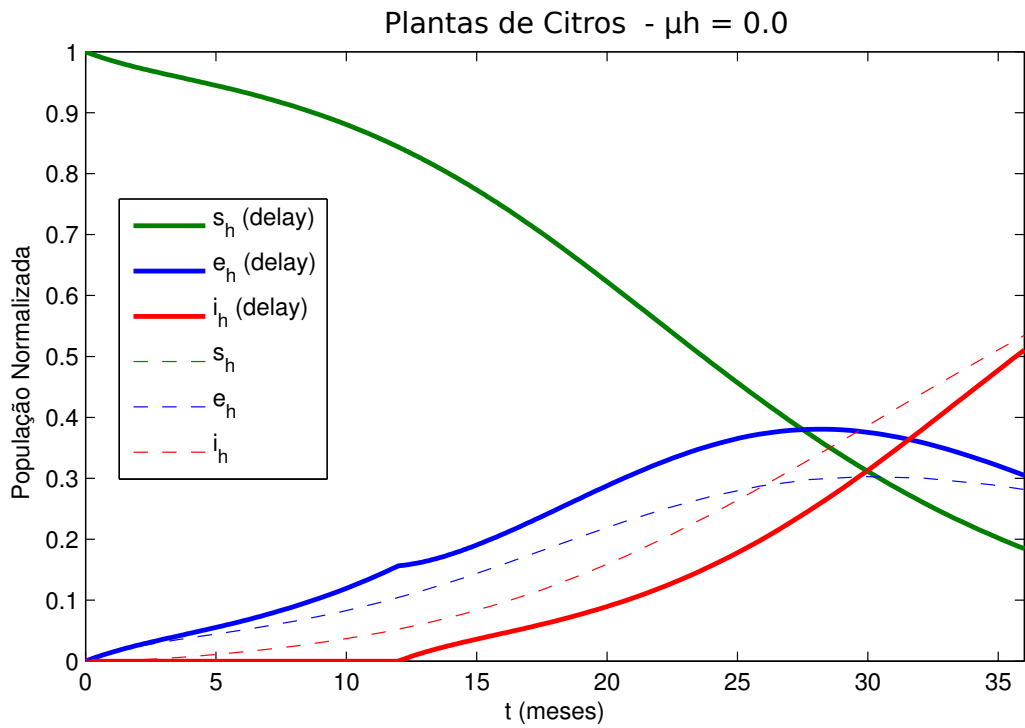


Figura 4.1: Simulação dos sistemas de equações com e sem *delay* para os valores de $N_v = 400$ e $\mu_h = 0.0$ (Sem retirada de plantas).

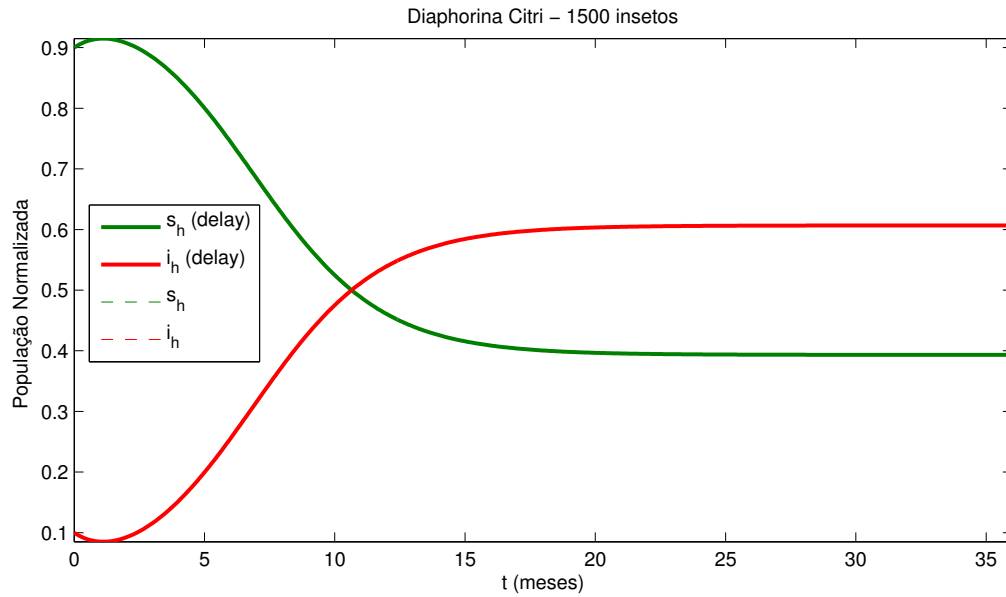
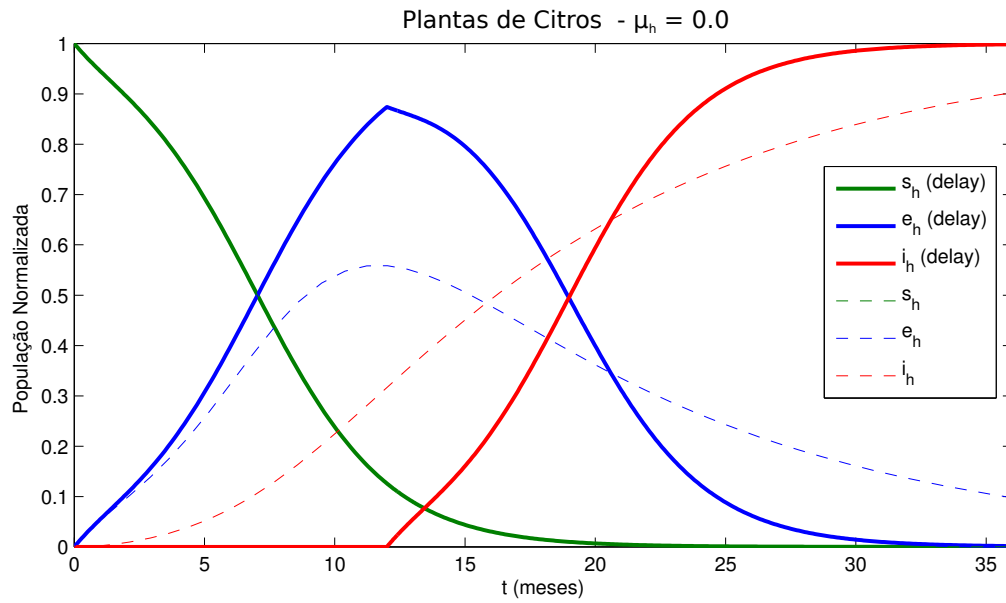


Figura 4.2: Simulação dos sistemas de equações com e sem *delay* para os valores de $N_v = 1500$ e $\mu_h = 0.0$ (Sem retirada de plantas).

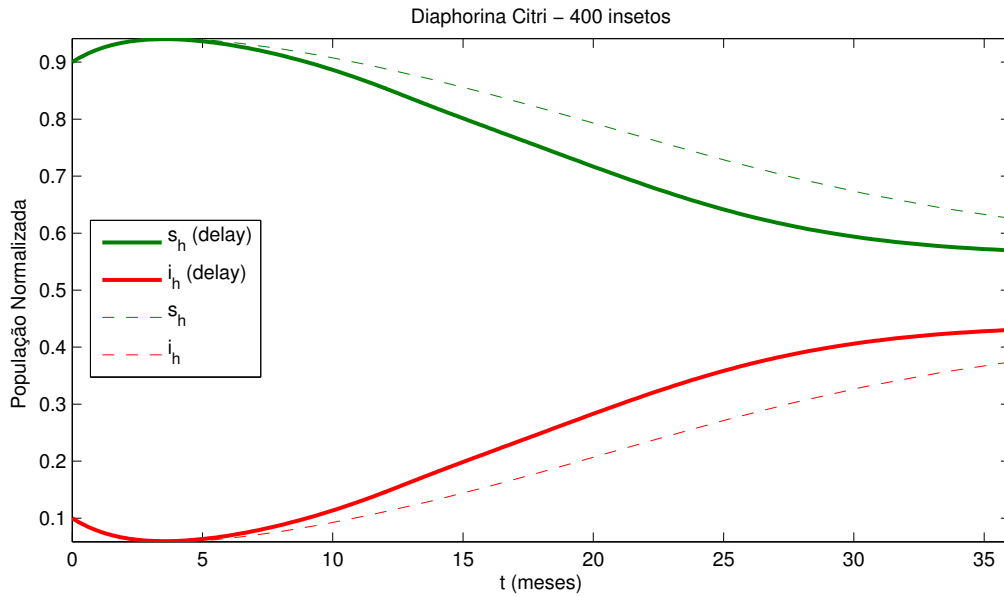
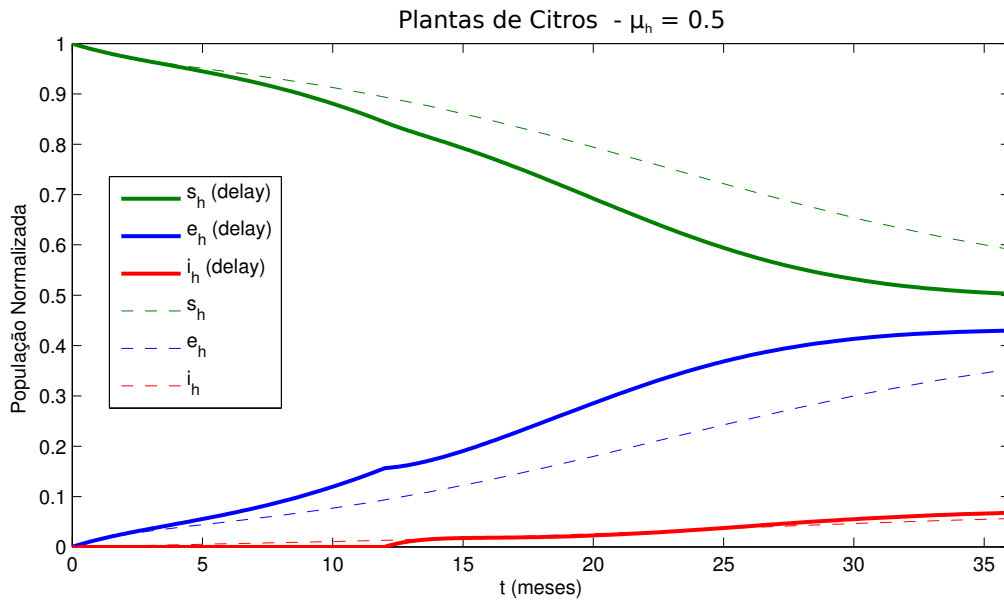


Figura 4.3: Simulação dos sistemas de equações com e sem *delay* para os valores de $N_v = 400$ e $\mu_h = 0.5$.

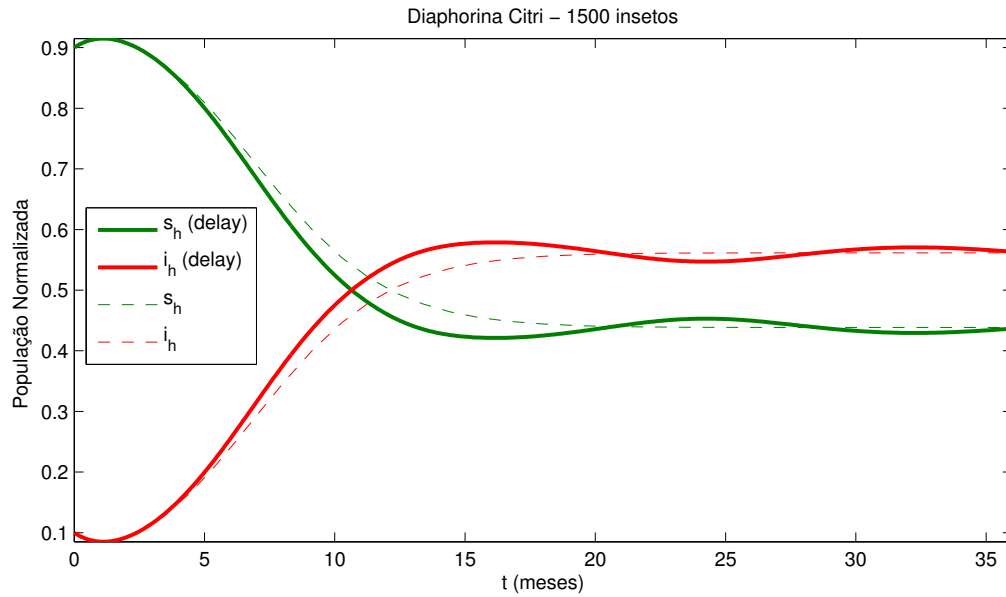
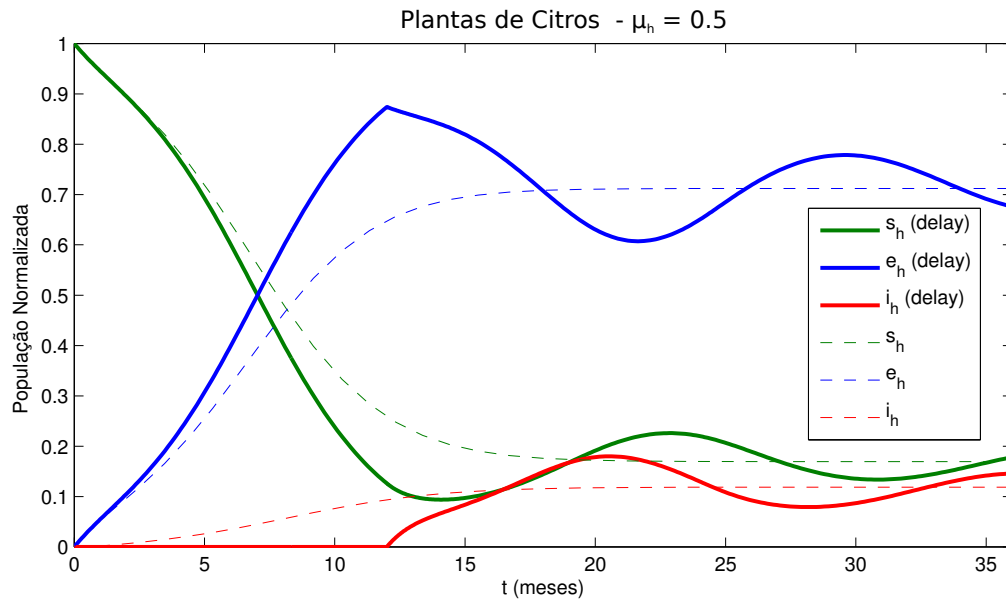


Figura 4.4: Simulação dos sistemas de equações com e sem *delay* para os valores de $N_v = 1500$ e $\mu_h = 0.5$.

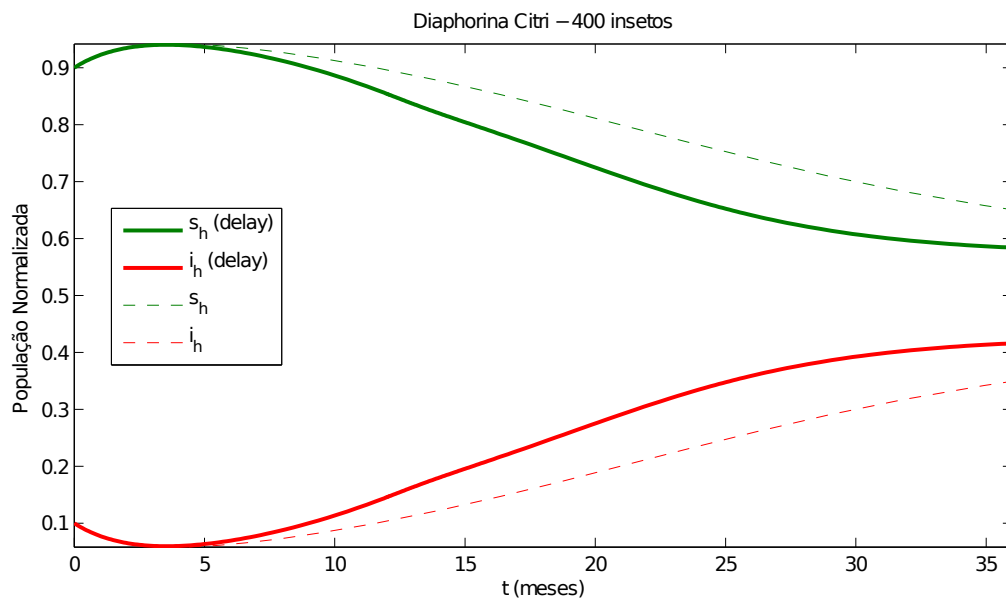
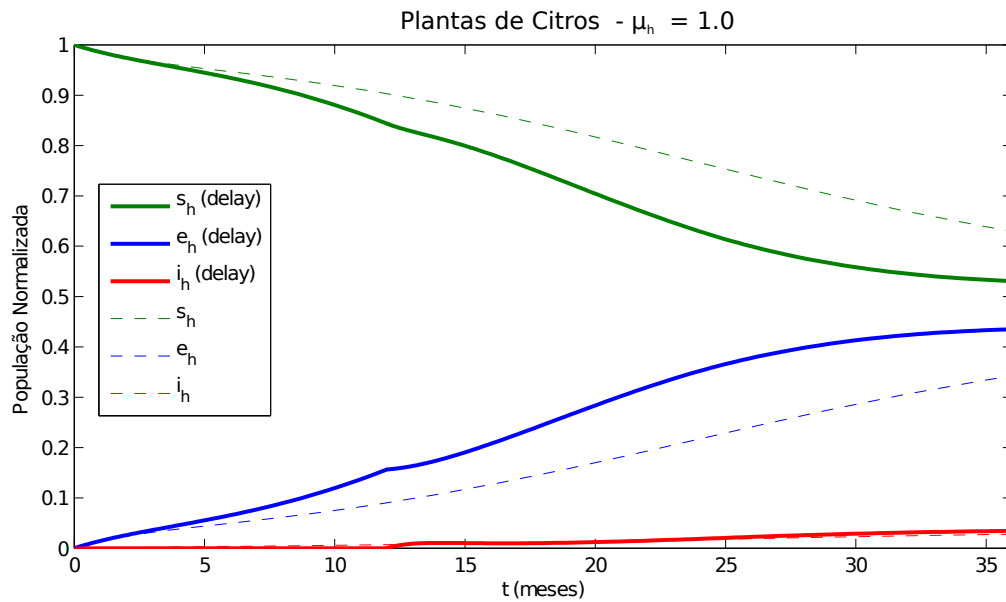


Figura 4.5: Simulação dos sistemas de equações com e sem *delay* para os valores de $N_v = 400$ e $\mu_h = 1.0$.

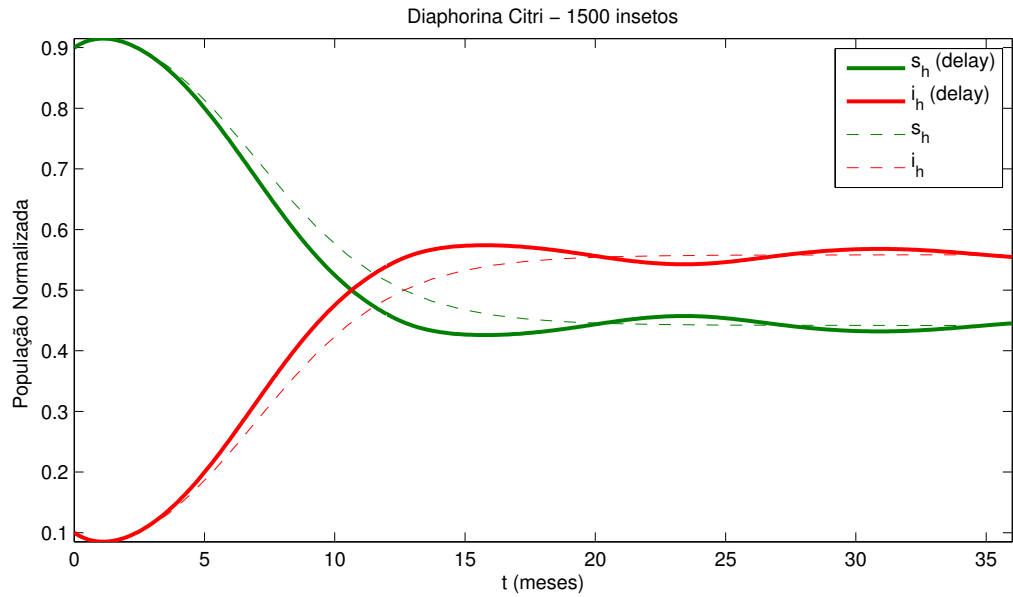
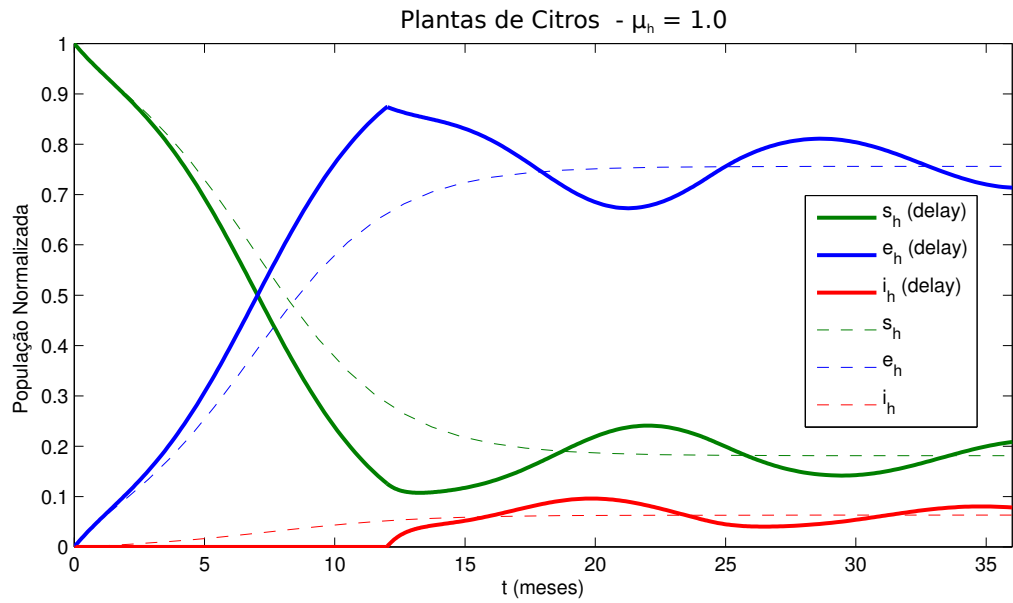


Figura 4.6: Simulação dos sistemas de equações com e sem *delay* para os valores de $N_v = 1500$ e $\mu_h = 1.0$.

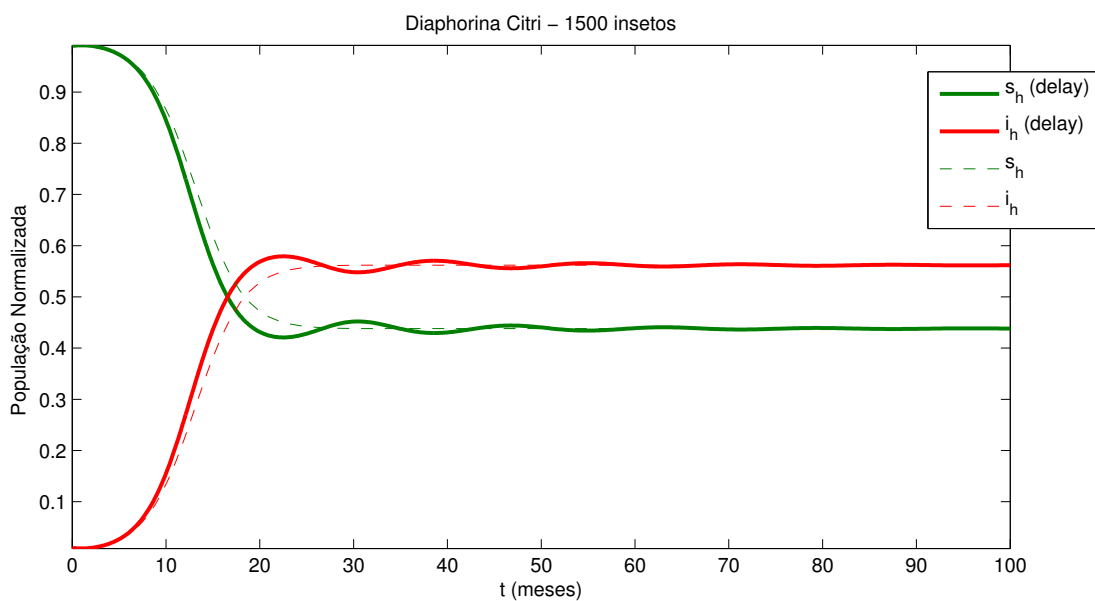
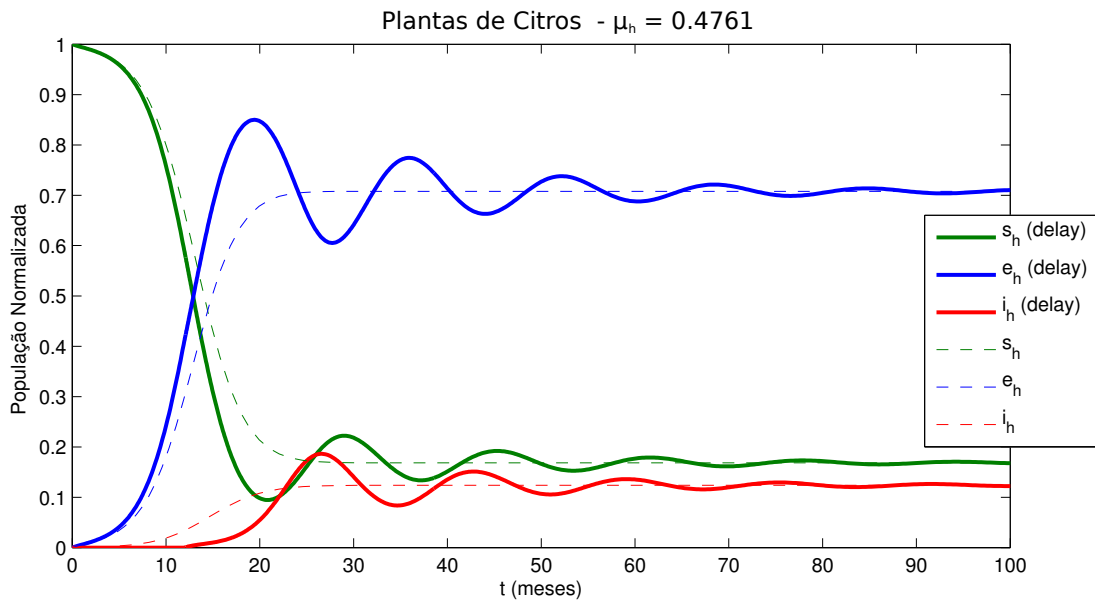


Figura 4.7: Exemplo de dinâmica geral do patossistema com (linhas contínuas) e sem (linhas tracejadas) a consideração de delay. Observa-se que ambos convergem para o mesmo equilíbrio, sendo consideravelmente distintas no início do processo de simulação

Capítulo 5

Agradecimentos e Referências

5.1 Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte a este trabalho por meio da concessão de bolsas PIBIC (Proc. 120661/2011-0) e de pós-doutorado (Proc. 560461/2010-0)

Referências Bibliográficas

- [1] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology*. Springer, 1991.
- [2] R. G. d. V. M. V. S. A. C. F. F. G. A. BRAGA, S. TERNES, “Modelagem matemática da dinâmica temporal do hlb em citros,” in *VIII Congresso Brasileiro de Agroinformática*, 2011.
- [3] T. ERNEUX, *Applied Delay Differential Equations*. Springer, 2009.
- [4] R. M. MAY, “Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels,” *Ecological Society of America*, vol. 54, no. 2, pp. 315–325, 1973.
- [5] L. C. GUOPING PANG, “A delayed sirs epidemic model with pulse vaccination,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 34, pp. 1629–1635, 2007.
- [6] S. C. JIANJUN JIAO, LANSUN CHEN, “A delayed stage-structured holling ii predator-prey model with mutual interference and impulsive perturbations on predator,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 40, pp. 1946–1955, 2009.
- [7] R. B. B. MUKHOPADHYAY, “Analysis of periodic solutions in an eco-epidemiological model with saturation incidence and latency delay,” *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 4, pp. 176–188, 2010.
- [8] N. BAIRAGI, “Direction and stability of bifurcating periodic solutions in a delay-induced ecoepidemiological system,” *International Journal of Differential Equations*, 2011.
- [9] L. EDELSTEIN-KESHET, *Mathematical models in biology*. Birkäuser mathematics series, 1988.
- [10] Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, Instrução Normativa No. 53, de 16 de outubro de 2008. Disponível em <http://extranet.agricultura.gov.br/sislegis-consulta/consultarLegislacao.do?operacao=visualizar&id=19130>. Último acesso 05.julho.2012.