MS 777: Projeto Supervisionado

Título: Propagação de ondas em meios elásticos (isotrópicos e anisotrópicos)

Aluno: David Ricardo Barreto Lima Silva, RA:042885

Orientador: Jörg Schleicher

1 Introdução

Um meio é chamado de isotrópico com respeito a um certo parâmetro quando ocorre a igualdade do comportamento do parâmetro em todas as direções e homogêneo quando ocorre a igualdade do parâmetros em todos os pontos.

Seguindo a definição de isotropia, podemos também chamar um meio de anisotrópico com respeito a um certo parâmetro quando nega a validade de um meio isotrópico, ou seja, quando a igualdade do comportamento do parâmetro em todas as direções ocorre.

Podemos considerar as definições apresentadas no estudo de certos parâmetros das ondas sismicas como a velocidade, a amplitude, o comprimento, a direção ou qualquer outro aspecto da onda podendo mudar ou não no decorrer do caminho ou nas direções.

Estudos indicam que a anisotropia no solo é causada pela combinação de certos fatores que podem mudar com o tempo, como fraturas nas rochas, camadas sedimentares, distribuição mineral heterogênea, presença de poros ou buracos.

O estudo da anisotropia é muito importante quando queremos prever a presença de algum meio no solo (petróleo, minerais, rochas...), já que podemos dizer a grosso modo que quase todos os solos são anisotrópicos. Com isso o estudo se baseia em induções controladas de ondas sísmicas e receptores que indicam os parâmetros de tais ondas quando são refletidas em direção à superfície.

O propósito do nosso material é fazer um estudos dos parâmetros da equação dada acima, para isso vamos fazer um estudo das equações da onda na corda, na membrana, no meio elástico, definir o tensor de tensão e o tensor de deformação.

A equação geral da onda em um meio elástico, anisotrópico ou isotrópico, pode ser reduzida pela aplicação da segunda lei de Newton a um difencial de volume, onde temos a seguinte expressão:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = f_i \tag{1}$$

onde ρ é a densidade do meio, $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o vetor de deslocamento, $f = (f_1, f_2, f_3)$ é a força por unidade de volume, t o tempo, x_i a coordenada cartesiana referente ao eixo i e τ_{ij} o tensor de tensão.

2 Equação da onda em uma dimensão

Vamos considerar primeiramente uma corda esticada de comprimento l fixa no ponto inicial (0,0) e no ponto final (l,0), onde assumimos um sistema de coordenadas em duas dimensões para representar a posição da corda. Vamos determinar a equação do movimento a partir da posição vertical v em função da posição horizontal x e do tempo t, ou seja, o problema é determinar $v(x,t)$ onde a variável x pertence ao intervalo [0,l] e o tempo a todos os reais positivos. Para isso vamos assumir as seguintes hipóteses:

1. A corda é flexível e elástica, ou seja, ela não resiste a tensões que causam momento. Caso a corda resistisse a tensões que causam momento, poderiamos ter uma força agindo

em direção diferente ao seu alinhamento, ou seja, ela seria rígida assim como uma barra.

2. A partir de uma tensão inicial, o alongamento não se modificará mais em qualquer porção da corda. Pela lei de Hook: $\sigma = \epsilon E$, onde σ indica a tensão, ϵ a deformação específica (razão entre a deformação e o comprimento inicial, ou seja, adimensional) e E o módulo de elásticidade, que é específico para cada material. Podemos assim inferir que a tensão é constante a todo tempo, já que assumimos não existir modificação do alongamento inicial.

3. O peso da corda é pequeno comparada a tensão sofrida, ou seja, a ação da força peso $P = mg$ é desprezível comparada à força que causa a tensão em estudo. Podemos dizer a grosso modo que a corda tem massa m "nula".

4. A deflexão da corda devida ao seu peso é pequena comparada com o seu comprimento l, onde tal afirmação pode ser assumida a partir da hipótese anterior.

5. A declividade da corda no ponto em estudo é pequena comparada à unidade de comprimento. Ou seja, assumindo a unidade de comprimento usada para definir o tamanho l da corda (a unidade seria nesse caso l/l) e sendo a declividade igual ao coeficiente angular da corda com relação ao eixo x no ponto em estudo (a tangente do ângulo com relação ao eixo x), temos tal coeficiente tendendo a 0 (a variação no eixo vertical é muito pequena levando em consideração a unidade de comprimento do eixo horizontal).

6. Existe somente vibração transversal. Caso existisse também vibração longitudinal (os dois casos mostrados na figura 1), teriamos variação na deformação causada pela tensão inicial, e com isso existiria variação também na tensão, o que invalidaria a segunda hipótese.

7. As mudanças nos parâmetros físicos da corda no decorrer do tempo podem ser desprezados (variação de temperatura, densidade, coeficiente de elasticidade, comprimento...).

Considerando um elemento diferencial da corda. Sendo T a tensão, α a inclinação no ponto x e β a inclinação no ponto $x + \delta_x$.

Pela segunda lei de Newton, a resultante das forças na direção vertical é igual a massa vezes a aceleração. Pontanto:

$$T \sin(\beta) - T \sin(\alpha) = \rho \delta_s \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \tag{2}$$

Onde ρ é a densidade linear (razão da massa pelo comprimento) e δ_s o arco de comprimento da corda. Desconsiderando a declivida pela hipótese dada em 5, temos que:

$\delta_x >> \delta_y$, onde temos $\delta_s = \delta_x \sqrt{1 + (\frac{\delta_y}{\delta_x})^2}$, ou seja:

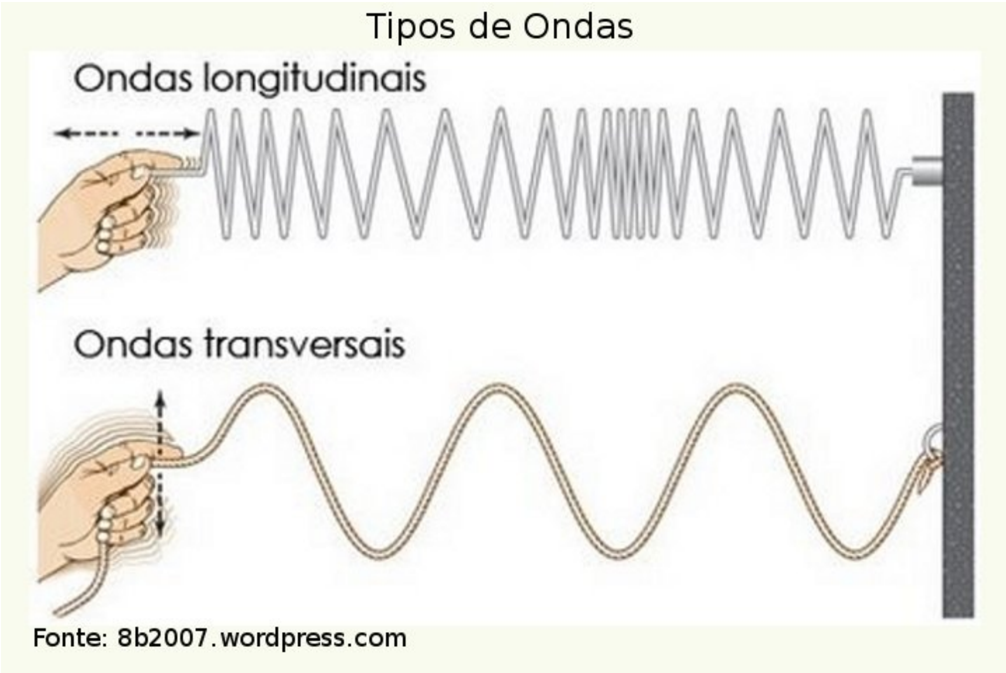

Figura 1: Tipos de ondas

$$\delta_s \cong \delta_x \tag{3}$$

Já que também temos os ângulos α e β pequenos, com isso fica expandindo em série de Taylor em torno de 0 que para um x pequeno que:

$\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - O(x^7)$ e $\tan(x) = x + x^3/3 + 2x^5/15 + O(x^7)$ onde $O(x^7)$ indica um polinômio onde a variável x tem expoentes maiores ou iguais a 7. Com isso temos que as parcelas com x^3, x^5 e $O(x^7)$ tendem a 0 muito mais rápido que x quando este tende a 0. Podemos dizer então que: $\sin(x) \cong x \cong \tan(x)$. Portanto para α e β com as hipóteses anteriores temos:

$$\sin(\alpha) \cong \tan(\alpha) \tag{4}$$

e também que:

$$\sin(\beta) \cong \tan(\beta) \tag{5}$$

Com isso a equação se torna:

$$\tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{\rho\delta_x}{T}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \tag{6}$$

Sabemos também do cálculo que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x,t) \tag{7}$$

$$\tan(\beta) = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x + \delta_x, t) \tag{8}$$

em um dado tempo t. Podemos chegar então nas seguintes equações para $0 < \delta_x << 1$:

$$\frac{1}{\delta_x}[\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x + \delta_x, t) - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x, t)] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \tag{9}$$

Fazendo δ_x tender a 0 na equação acima, encontramos:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} \tag{10}$$

onde $c^2 = \frac{T}{\rho}$. Chegamos então na equação da onda em uma dimensão.

Caso tenhamos uma força f por unidade de comprimento agindo na corda, a equação assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + F \tag{11}$$

sendo

$$F = \frac{f}{\rho} \tag{12}$$

Onde f pode ser devido a pressão, gravitação, resistência, ou qualquer outra ação externa.

3 Equação da onda em duas dimensões

Antes de encontrar as equacões na membrana, vamos assumir certos postulados similares ao caso da corda onde podemos esquever resumidadamente que:

1. A membrana é elástica e flexível, ou seja, ela não resiste a tensões que causam momento. Com isso a tensão na membrana tem sempre a direção tangente ao ponto em estudo.

2. Não existe alongamento em qualquer porção da membrana e portanto, pela lei de Hook, a tensão é constante.

3. O peso da membrana é pequeno comparada a tensão sofrida.

4. A deflexão da membrana é pequena comparada ao seu diâmetro mínimo.

5. A declividade da membrana no ponto em estudo é pequena comparada à unidade de comprimento.

6. Existe somente vibração transversal.

7. As mudanças nos parâmetros físicos da membrana no decorrer do tempo podem ser desprezados (variação de temperatura, densidade, coeficiente de elasticidade, comprimento...).

Considerando um elemento de área da membrana e assumindo pelas hipóteses 4 e 5 que a declividade e a deflexão são pequenas, a área do elemento é aproximadamente igual a área de um retângulo de lados δ_x e δ_y, portanto a área do elemento é dada por $\delta_x\delta_y$. Sendo T a força por unidade de comprimento agindo na membrana, temos que as forças agindo nos lados do elemento de área são $T\delta_x$ e $T\delta_y$.

As forças agindo no elemento da membrana na direção vertical têm como resultante:

$T\delta_x \sin(\beta) - T\delta_x \sin(\alpha) + T\delta_y \sin(\delta) - T\delta_y \sin(\gamma)$

Onde β, α, δ e γ são as inclinações com relação aos eixos y no sentido positivo, y no sentido negativo, x no sentido negativo e x no sentido positivo respectivamente.

Assumindo as diclividades envolvidas no elemento como sendo pequenas, temos assim como foi deduzido anteriormente, que os senos envolvidos acima podem ser aproximados por uma tangente e ficamos com a seguinte resultante de forças:

$T\delta_x(\tan(\beta) - \tan(\alpha)) + T\delta_y(\tan(\delta) - \tan(\gamma))$

Pela segunda lei de Newton, ficamos:

$$T\delta_x(\tan(\beta) - \tan(\alpha)) + T\delta_y(\tan(\delta) - \tan(\gamma)) = \rho\delta A\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \tag{13}$$

onde ρ é a massa por unidade de área, $\delta A \approx \delta_x\delta_y$ é a área do elemento, $\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}$ é obtida em algum ponto do elemento. Pelo cálculo , temos:

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}(x_1, y, t) \tag{14}$$

$$\tan(\beta) = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}(x_2, y + \delta_y, t) \tag{15}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x, y_1, t) \tag{16}$$

$$\tan(\sigma) = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x + \delta_x, y_2, t) \tag{17}$$

onde x_1 e x_2 são os valores de x entre x e $x + \delta_x$, e y_1 e y_2 são os valores de y entre y e $y + \delta_y$. Substituindo esses valores acima temos:

$$T\delta_x[\frac{\partial \upsilon}{\partial y}(x_2, y+\delta_y, t)-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}(x_1, y, t)]+T\delta_y[\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x+\delta_x, y_2, t)-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x, y_1, t)] = \rho\delta_x\delta_y\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \quad (18)$$

Dividindo por $\rho\delta_x\delta_y$, ficamos:

$$\frac{T}{\rho}[\frac{\frac{\partial \upsilon}{\partial y}(x_2, y+\delta_y, t) - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}(x_1, y, t)}{\delta_y} + \frac{\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x+\delta_x, y_2, t) - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x, y_1, t)}{\delta_x}] = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \quad (19)$$

No limite de δ_x tendendo a zero e δ_y também tendendo a zero, ficamos com:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}) \quad (20)$$

onde $c^2 = \frac{T}{\rho}$. Chamamos a expressão acima de equação da onda em duas dimensões.

Se existir uma força por unidade de área f agindo na membrana, ficamos com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}) + F \quad (21)$$

onde $F = \frac{f}{\rho}$

4 Equação da onda em três dimensões e a definição de tensor de tensão

O propósito do nosso material é estudar pertubações no meio elástico em geral onde os tópicos anteriores eram apenas casos particulares e mais simples da equação geral da onda em 3 dimensões. Assumindo inicialmente que o meio é homogêneo, isotrópico e sem nos preocupar com a translação ou a rotação do meio como um todo, vamos trabalhar da mesma forma anterior com um diferencial de volume δV e com as seguintes tensões agindo nas faces do elemento: τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy}. As três primeiras tensões são chamadas de tensão normal enquanto as outras são chamadas de tensão de cisalhamento (figura 2).

Assumindo tais hipóteses:

1. O meio é elástica e flexível.

2. O peso do elemento de volume é pequeno camparado a tensão sofrida.

3. As mudanças nos parâmetros físicos do meio no decorrer do tempo podem ser desprezados (variação de temperatura, densidade, coeficiente de elasticidade, comprimento...).

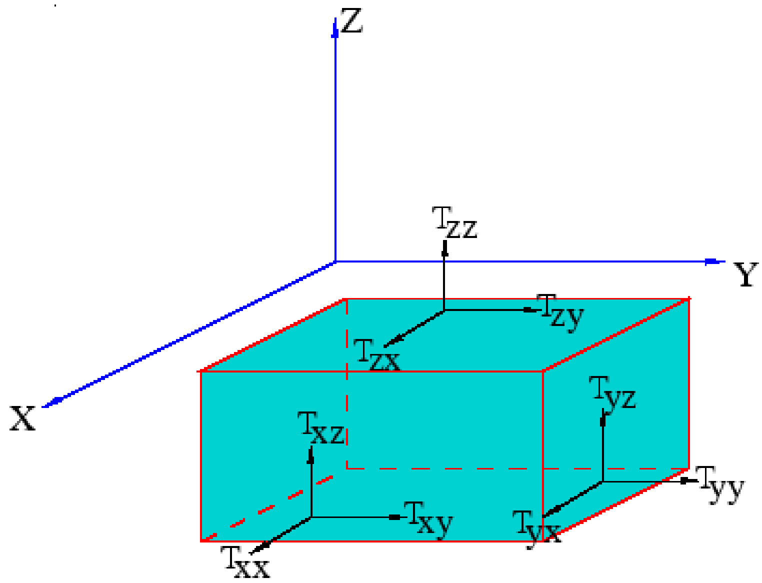

Figura 2: Tensões

Devemos assumir que as tensões τ_{ij} são simétricos para atender a condição de equilíbrio com relação à rotação do elemento de volume, ou seja:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{22}$$

com $i,j = x,y,z$

A soma das forças agindo na direção x é pela segunda lei de Newton igual a massa vezes a aceleração, inferindo na seguinte relação:

$$[(\tau_{xx})_{x+\delta x} - (\tau_{xx})_x]\delta_y\delta_z + [(\tau_{xy})_{y+\delta y} - (\tau_{xy})_y]\delta_z\delta_x + [(\tau_{xz})_{z+\delta z} - (\tau_{xz})_z]\delta_x\delta_y = \rho\delta_x\delta_y\delta_z\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \tag{23}$$

onde ρ é a densidade do corpo e υ é a componente do corpo na direção x, ou seja, $\upsilon = \upsilon(x,t)$. No limite de δV tendendo a zero, temos:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} \tag{24}$$

Similarmente assumindo v a componente na direção y e w a componente na direção z, ficamos:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{25}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{26}$$

As tensões τ_{ij} descritas anteriormente são chamadas de tensores de tensão onde podemos chamar de tensor em uma forma geral como uma representação entre relações de grandezas escalares e grandezas vetoriais e os seus operadores.

5 Notação de Einstein

Antes de continuar o nosso estudo, devemos mencionar uma definição muito usada na geofísica para representar um somatório.

Como a geofísica trabalha com somas em muitos índices e operadores (derivação, integração...) onda a aplicação na soma é igual a soma das aplicações, usaremos uma convenção para não carregar o texto com sinais de somatório dada da seguinte maneira: Teremos uma soma em todos os índices que aparecer duas vezes na expressão.

Exemplos:

1.O traço de uma matriz $A = [a_{ij}]$ é representado por a_{ii}.

2.O produto escalar entre dois vetores v e w é representado po $w_i v_i$.

3.A série de Taylor em torno de 0 é representada por $a_n x^n$.

4.O produto da matriz $A = [a_{ij}]$ com a matriz $B = [b_{jk}]$ resulta na matriz $C = [c_{ik}]$ onde $c_{ik} = a_{ij} b_{jk}$.

5.A equação geral da onda apresentada na introdução fica: $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = f_i$

6.O gradiente de um vetor v é denotado por $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$.

6 O tensor de deformação

Daqui em diante toda a teoria será escrita na notação de Einstein e com isso faremos um estudo inicial sobre tensor de deformação, onde pode ser deduzido partindo de deslocamentos da seguinte forma:

Quando um sólido sofre a ação de alguma força de natureza interna, ele muda o seu formato e com isso muda algumas distâncias entre pontos considerados anteriormente a ação.

Partindo de um sistema de coordenadas definido anterior a deformação e dado um ponto que possuia um vetor de posição r inicial, teremos uma posição r' após a deformação e com isso podemos definir o vetor u de deslocamento como a diferença entre o vetor de posição final e o vetor de posição inicial ($u = r' - r$), ou em termos de cada coordenada:

$u_i = x'_i - x_i$ onde $r = (x_1, x_2, x_3)$ e $r' = (x'_1, x'_2, x'_3)$

Podemos com isso considerar cada coordenada x'_i de uma nova posição como função das coordenadas iniciais x_i de r e do tempo ($x'_i = x'_i(r,t)$) e como isso temos também que u_i é função de cada coordenada x_i inicial e do tempo. Temos a partir desse raciocínio que a deformação do corpo está totalmente determinada dada as funções de deformação.

Um corpo que sofre deformação tem as distâncias entre os seus pontos modificadas. Considerando dois pontos bastante próximos com distância vetorial inicial (dx_1, dx_2, dx_3) entre eles, teremos a sua nova distância após a deformação dada por por $(dx_1+du_1, dx_2+du_2, dx_3+du_3) = (dx'_1, dx'_2, dx'_3)$. Com isso podemos dizer que a distância escalar dl' obedece a seguinte igualdade: $dl'^2 = (dx_i + du_i)^2$. Substituindo $du_i = (\partial u_i/\partial x_k)dx_k$, ficamos com a seguinte expressão para o dl'^2:

$$dl'^2 = dl^2 + 2(\partial u_k/\partial x_i)dx_i dx_k + (\partial u_l/\partial x_k)(\partial u_l/\partial x_i)dx_k dx_i \tag{27}$$

onde a soma na segunda parcela pode se escrita, já que a soma é feita tanto em i como em k, da seguinte forma: $2(\partial u_k/\partial x_i)dx_i dx_k = (\partial u_k/\partial x_i)dx_i dx_k + (\partial u_i/\partial x_k)dx_i dx_k$

Com isso podemos escrever toda a expressão:

$$dl'^2 = dl^2 + 2e_{ik}dx_i dx_k \tag{28}$$

onde o tensor e_{ik} é definido como $e_{ik} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k})$ e damos a ele o nome de tensor de deformação. Podemos ver também pela expressão acima que o tensor de deformação é simétrico ($e_{ik} = e_{ki}$).

7 Conclusão

Apresentamos este material como uma fonte inicial para o estudo de ondas sísmicas efetuados nos primeiros meses de iniciação científica.

O estudo continuará nos próximos meses com maior intensidade, já que boa parte do tempo foi gasto no aprendizado de ferramentas para escrever o texto.

8 Referências

1. LANDAU L. D. LIFSHITZ E. M. Course of theoretical physics. Theory Of Elasticity Pergamon(1975)

2. BREVIARY OF SEISMIC TOMOGRAPHY. Imaging the Interior of the Earth and Sun. Guust Nolet. University of Nice/ Sophia Antipolis, France 2008

3. Tsavkin V. Seismic Signatures and Analysis of Reflection Data in Anisotropic Media(2001)

4. Tyn Myint U, Lokenath Debnath Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers Birkhäuser Boston(2006)

5. Jose Pujol Elastic wave propagation and generation in seismology. Cambridge University Press(2003)