

2011
MS777 - Projeto Supervisionado

**REVISÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS COM
DISPERSÃO PARA USO NA ANÁLISE
ESPAÇO-TEMPORAL DE DOENÇAS EM PLANTAS**

ALUNA: MARIANA VALERIO DA SILVA
Graduanda em Matemática Aplicada
IMECC-UNICAMP
mariana.valerio2@hotmail.com

ORIENTADORA: SÔNIA TERNES
Embrapa Informática Agropecuária
LabMac - CNPTIA
sonia@cnptia.embrapa.br

RESUMO: Para estudar a evolução da dinâmica espaço-temporal de uma população, processo conhecido como dispersão, primeiramente foi realizado um levantamento histórico. Analisando esse levantamento, percebe-se que as equações mais utilizadas para descrever esse processo são as equações de convecção e de difusão. Utilizando essas duas equações como base, surgiram vários modelos mais detalhados, que foram estudados neste trabalho. Com os estudos realizados foi proposto um modelo com dispersão para retratar as doenças conhecidas como enfezamentos pálido e vermelho na cultura do milho.

PALAVRAS-CHAVE: modelo matemático, dispersão, difusão, convecção, enfezamento.

1. INTRODUÇÃO

Modelos matemáticos são utilizados para descrever a dinâmica de populações em diversas situações, tais como no controle de pragas, nos modelos de presa-predador, crescimentos populacionais, entre outros. Em grande parte dos casos os modelos representam uma dinâmica temporal e espacial, e possuem parâmetros com interpretação física ou biológica.

As equações diferenciais ordinárias são mais fáceis de serem analisadas, porém não descrevem processos com dispersão da população no espaço. Para descrever esses processos, equações diferenciais parciais podem ser utilizadas.

A distribuição da população pode ser homogênea, igualmente distribuído no espaço analisado, ou pode ser heterogêneo, que possui direções preferenciais determinados pelo habitat, temperatura ou existência de barreiras naturais, como rios por exemplo (Pinheiro, 2010).

Os processos que descrevem a dispersão de uma determinada população ao longo do tempo, podem ser modelados utilizando vários modelos distintos de equações diferenciais parciais. Dentre os termos utilizados para descrever a dispersão, destaca-se o processo de difusão e convecção que serão retratados ao longo desse trabalho.

2. HISTÓRICO

Desde o século XVIII, modelos matemáticos são utilizados para descrever processos biológicos, época em que Daniel Bernulli realizou os primeiros modelos epidemiológicos. Vários outros modelos clássicos foram propostos, como o modelo proposto por Thomas Malthus para descrever a dinâmica da população, representado pela equação:

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t),$$

onde $N(t)$ representa o número total de indivíduos na população, t representa o tempo, a representa a taxa de natalidade e b representa a taxa de mortalidade.

O modelo proposto por Verhulst em 1838 é uma modificação do modelo anterior. Enquanto no modelo de Malthus não é considerado uma limitação para a população, o modelo de Verhulst considera que a população apresenta um limitante para o seu crescimento, essa limitação está associada com fatores do meio, como a disponibilidade de alimento. Segue o modelo de Verhulst, conhecido como crescimento logístico:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

onde r representa a constante de crescimento e K a capacidade de suporte do meio.

Em muitos casos deseja-se encontrar não só a dinâmica da população ao longo do tempo, como visto nos modelos apresentados anteriormente. Existem dinâmicas que devem ser analisadas ao longo do tempo e do espaço, de uma determinada área. Um dos primeiros modelos para descrever a dinâmica de dispersão de uma população foi realizado por Ronald Ross em 1904 (BACAËR, 2010). Nesse trabalho Ross analisou porque a densidade de insetos diminui a medida que a distância do local de reprodução é aumentada. Desde então foram propostos vários modelos para retratar a dispersão.

3. TIPOS DE DISPERSÃO

Existem vários modelos que podem descrever a dinâmica de dispersão de uma população (HOLMES et al., 1994), esses modelos relacionam o fluxo com a densidade populacional. Dentre os modelos mais utilizados destaca-se o modelo de convecção e o modelo de difusão.

O modelo de convecção, também conhecido como advecção, é utilizado para retratar a dispersão de uma população através de um escoamento, como por exemplo o escoamento ao longo de um rio. Considere a dispersão unidimensional, seja c a velocidade com que a dispersão ocorre, então o fluxo ϕ é relacionado com a densidade $u(x, t)$ da seguinte forma:

$$\phi(x, t) = cu(x, t). \quad (1)$$

Considerando um intervalo de tempo suficientemente curto, onde pode ser desprezada a mortalidade e natalidade de indivíduos, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (2)$$

Substituindo a relação 1 na equação anterior, e considerando que a velocidade c não varia ao longo do espaço, então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

que é a equação de convecção linear (SOARES, 2002).

Outro modelo bastante utilizado para retratar a dinâmica de dispersão é o modelo de difusão. Esse modelo é derivado da Lei de Fick, que inicialmente foi utilizada para retratar processos de dispersão de partículas na física, e em 1937 foi utilizada por Fisher pela primeira vez em um modelo de dinâmica populacional (BACAËR, 2010).

A Lei de Fick, é dada por:

$$\phi(x, t) = -D\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4)$$

onde D é o coeficiente de difusão e o sinal negativo indica que a difusão ocorre do sentido de maior para o de menor concentração (SOARES, 2002).

Partindo da equação 2, e substituindo ϕ pela relação 4, tem-se

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Considerando que o coeficiente de difusão D independe da direção, a equação de difusão é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

O coeficiente de difusão pode depender das direções envolvidas no modelo. Neste caso, é comum considerar que o aumento da difusão ocorre devido ao aumento da própria população (SOARES, 2002). Assim D é da seguinte forma:

$$D = D_0 \left(\frac{u}{u_0} \right)^m, \quad (6)$$

onde D_0 é o valor do coeficiente de difusão para $u = u_0$, m e u_0 são constantes positivas. Esse coeficiente de difusão é utilizado em problemas com dispersão de insetos. Substituindo D na equação 5, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_0 \left(\frac{u}{u_0} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_0 m \frac{u^{m-1}}{u_0^m} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Pode-se interpretar o termo $D_0 m \frac{u^{m-1}}{u_0^m} \frac{\partial u}{\partial x}$ como sendo a velocidade de uma “convecção” (SOARES, 2002).

A dispersão pode ser retratada como uma junção dos dois modelos vistos anteriormente. Ou de forma mais geral pode ser retratada levando em consideração a natalidade e mortalidade da população, entre outros fatores que contribuem para a sua dinâmica, como na equação a seguir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),$$

onde $f(u)$ representa todos os fatores, que não são a dispersão, mas que influenciam na dinâmica populacional.

4. MODELOS COM DISPERSÃO

Com citado anteriormente o primeiro trabalho com dispersão foi realizado por Fisher (SOARES, 2002). Neste trabalho foi proposto um modelo para descrever a propagação de um gene na população. Para retratar essa propagação foi utilizando a Lei de Fick (equação 4), que inicialmente era utilizada na física e, segundo Fisher, pode ser utilizado para modelar fenômenos biológicos.

Nesse modelo, Fisher considera que a dispersão pode ser retratada como um processo de difusão, unidimensional, e que o coeficiente de difusão é constante.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),$$

onde $f(u)$ é o termo de crescimento logístico, encontrado no modelo de Verhulst,

$$f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{K} \right).$$

Assim tem-se que o modelo de Fisher, é representado pela equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K} \right).$$

Desde a equação de Fisher diversos modelos foram propostos para descrever diferentes tipos de dispersão populacional. O modelo de presa-predador foi também descrito considerando a dispersão das populações (HOLMES, 1994). Nesse modelo considera-se a dispersão unidimensional, e que ocorre dispersão na população de presas, u , e na população de predadores, v . O modelo é composto do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \alpha_{uv} uv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu v + \alpha_{vu} uv, \end{cases} \quad (7)$$

onde μ é a taxa de mortalidade dos predadores, α_{uv} é a taxa com que os predadores consomem as presas, α_{vu} é a taxa com que surgem novos predadores, D_u e D_v são, respectivamente, os coeficientes de difusão da presa e do predador.

Outro modelo clássico, proposto por Kermack e McKendrick (TREJOS e DUARTE, 2005), foi utilizado para descrever o processo de dispersão de uma epidemia, onde considerou a transmissão direta entre os indivíduos suscetíveis (S) e infectados (I), com uma taxa de transmissão β . O modelo é composto seguinte sistemas de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI + D_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \alpha I + D_2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \end{cases}$$

onde α representa a taxa de mortalidade dos infectados, D_1 e D_2 representam respectivamente o coeficiente de difusão dos indivíduos suscetíveis e os infectados.

Com base no modelo anterior, Trejos e Duarte (2005), propuseram um modelo para descrever a propagação de *Toxoplasma gondii* através de gatos. O modelo considera as proporções de gatos suscetíveis S , infectados I , imunes R e parasitas P , relacionadas pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \gamma(S + I + R) - (\lambda + \mu + \varepsilon)S, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = -\lambda S - (\mu + \eta)I, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \varepsilon S + \eta I - \mu R, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \beta I - \theta P + D \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right), \end{cases}$$

onde λ é a probabilidade de infecção, γ e μ são as taxas de natalidade e mortalidade, ε é a cobertura de vacinação dos gatos, β é a taxa de infecção, η é a taxa de infectados recuperados, θ é o decaimento natural dos parasitas, e D é o coeficiente de dispersão.

Neste caso o modelo considera a dispersão bidimensional. Além disso, assume que os gatos não possuem dispersão, e utiliza somente um termo de difusão, para os parasitas. Para encontrar a solução numérica é utilizado o método de diferenças progressivas.

Em 2007, Freire propôs um modelo matemático para descrever a dinâmica da mosca-do mediterrâneo, inseto causador de doenças em plantações de citros. Para realizar a dinâmica do inseto, o seguinte modelo foi proposto.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} = -\alpha_{LM}L - \beta L^2 - \eta_L L - \frac{\alpha_{LV}LV}{a+L} + \mu M, \\ \frac{\partial M}{\partial t} = -\eta_M M + \gamma_1 \phi \alpha_{LM}L + D_1 \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = -\eta_V V + \gamma_2 \Phi \frac{\alpha_{LV}LV}{a+L} + D_2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right), \end{cases}$$

onde L é a população de larvas, M e V são as populações de fêmeas adultas de *C. capitata* e com o parasitoide *D. longicaudata*, respectivamente. α_{LM} é a proporção de larvas que se transformam em adultas; β é o coeficiente de competição intra-específica para a classe de larvas; α_{LV} é a taxa de larvas que são parasitadas por *D. longicaudata*; μ a taxa de fecundidade; a simboliza a meia saturação do parasitismo sobre o hospedeiro; η_L , η_M , η_V representam, respectivamente, as taxas de mortalidade das larvas, das fêmeas adultas de *C. capitata*, e do parasitoide *D. longicaudata*; γ_1 e γ_2 são os fatores de conversão de larvas em fêmeas *C. capitata*, e em parasitoide *D. longicaudata*; ϕ e Φ são as razões sexuais de moscas fêmeas e vespas fêmeas, respectivamente.

Os coeficientes de difusão espacial são D_1 e D_2 , referentes a dispersão de fêmeas adultas de mosca-do-mediterrâneo e de vespas fêmeas. A difusão retratada nesse modelo é bidimensional, e a dinâmica analisada se refere ao inseto, e não o seu impacto na plantação de citros.

Outro modelo interessante, que contém dispersão, foi proposto por Avila et al. (2010). Esse modelo descreve a dinâmica da evolução da doença do caranguejo letárgico, que é causado por um fungo. Para descrever o processo de dispersão do fungo são considerados processos de convecção e difusão, conforme mostra o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \phi S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - (\mu + \mu_C)S - \beta SF + \gamma I, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SF - (\gamma + \mu + \alpha)I, \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \sigma \alpha I - \mu_F F + D_F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - v_F \frac{\partial F}{\partial x}. \end{cases}$$

onde S e I representa a densidade de caranguejos susceptíveis e infectados, F representa a densidade de fungos, ϕ é a taxa de natalidade, K é a capacidade de suporte do meio, μ e μ_C são as taxas de mortalidade dos caranguejos natural e pela coleta, μ_F é a taxa de mortalidade dos fungos, α é a taxa de mortalidade pela doença, β é a taxa de contato, γ é a taxa de recuperação, σ é a taxa de crescimento dos fungos, v_F e D_F são os coeficientes de convecção e difusão.

Para encontrar uma solução numérica para esse sistema de equações foi utilizado o processo de ondas viajantes. Com esse processo é possível transformar as equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias, através da mudança de variável $z = x - ct$, onde c é a velocidade da onda.

5. MODELOS DE DISPERSÃO DE DOENÇAS EM MILHO

As doenças conhecidas como enfezamentos pálido (Corn Stunt Spiroplasma, CSS) e o enfezamento vermelho (Maize Bushy Stunt Phytoplasma, MBSP), figura 1, causadas respectivamente, por espiroplasma e fitoplasma, podem causar sérios prejuízos econômicos na cultura do milho. Ambas as doenças são transmitidas pela cigarrinha *Dalbulus maidis* (Figura 2), de forma persistente e propagativa (OLIVEIRA, OLIVEIRA; 2004).



Figura 1: Enfezamentos Pálido e Vermelho



Figura 2: Cigarrinha *Dalbulus maidis*

A fim de prever a dinâmica temporal das doenças, o trabalho proposto por Silva et al. (2011), apresenta um modelo utilizando equações diferenciais ordinárias para retratar o comportamento da população de cigarrinhas, e de plantas. Os compartimentos considerados nesse trabalho estão representados na figura 3.

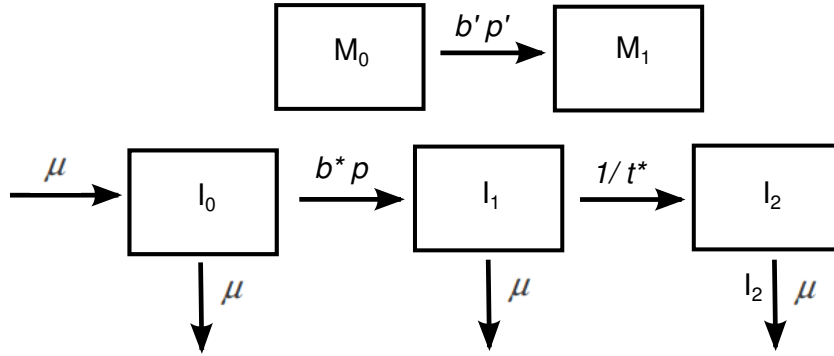


Figura 3: Compartimentos considerados no modelo para enfezamento

No trabalho de Silva et al. (2011) foi proposto um modelo para análise da dinâmica temporal das doenças. Como modificação desse modelo, a fim de analisar a dinâmica espaço-temporal das doenças, incluímos os termos de dispersão, que resultou no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = b'p'I_2(N_1 - M_1), \\ \frac{dI_1}{dt} = b^*p(N_2 - I_2 - I_1)M_1 - \frac{1}{t^*}I_1 - \mu I_1 + D \left(\frac{I_1}{I_{1(0)}} \right)^a \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2}, \\ \frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{t^*}I_1 - \mu I_2 + D \left(\frac{I_2}{I_{2(0)}} \right)^a \frac{\partial^2 I_2}{\partial x^2}, \end{cases}$$

onde M_0 é a população de plantas saudas; M_1 é a população de plantas infectadas; I_0 é a população de cigarrinhas sem mollicutes; I_1 é a população de cigarrinhas com mollicutes em período de latência; I_2 é a população de cigarrinhas infectantes; p é a probabilidade de aquisição de mollicutes pela cigarrinha; p' é a probabilidade de transmissão de mollicutes da cigarrinha para a planta; N_1 e N_2 são as populações totais de plantas e cigarrinhas, respectivamente; μ é a taxa de mortalidade/natalidade da cigarrinha; t^* é o período de latência da infecção na cigarrinha; b' é a taxa de visitas que a planta recebe por cigarrinha e b^* é a taxa de visitas que a cigarrinha realiza por planta.

O parâmetro D representa o coeficiente de dispersão das cigarrinhas; $I_{1(0)}$ e $I_{2(0)}$ representam respectivamente a população inicial de cigarrinhas em período de latência, e de cigarrinhas infectantes; a é uma constante positiva, que indica se quando ocorre o aumento da população em relação a população inicial, a dispersão aumenta (caso em que $a > 1$), ou se diminui (caso em que $a < 1$).

O termo de dispersão escolhido para esse modelo foi o modelo de difusão 6, que de acordo com Soares (2002), melhor retrata a dispersão de insetos. Como a dispersão espacial ocorre com as cigarrinhas o termo de dispersão foi acrescentado nas equações da população de cigarrinhas em período de latência e de cigarrinhas infectantes. O modelo retrata a dispersão em uma dimensão, mas pode ser generalizado para retratar a dispersão em duas dimensões.

Com os valores dos parâmetros encontrados na literatura, ou através de experimentos de campo, pode-se realizar simulações numéricas, a fim de obter a dinâmica espacial e temporal dos enfezamentos, podendo assim prever o comportamento das doenças.

6. CONCLUSÕES

A dispersão é um processo importante, que em alguns modelos biológicos, não pode ser desprezado. Um dos primeiros modelos propostos para analisar a dispersão foi realizado por Fisher, onde utiliza a equação de difusão para retratar a dispersão de um gene em uma população. Posterior a esse trabalho, alguns modelos matemáticos foram criados para retratar a dispersão de populações.

Modelos com dispersão são bem retratados por equações de convecção quando a dispersão ocorre com uma velocidade constante, como por exemplo com a dispersão de uma população em um rio. Em outros casos, a equação de difusão representa melhor a dispersão da população envolvida.

Modelos de dispersão podem ser retratados com a junção das equações de convecção e de difusão, esse procedimento foi realizado em alguns trabalhos. Porém, não existem muitos trabalhos que retratem a dispersão de uma população, devido a complexidade de análise das equações.

O termo de dispersão que melhor representa a dinâmica de dispersão de insetos é dada pela equação 6. Esse termo foi utilizado para descrever a dinâmica espacial dos enfezamentos. Partindo desse trabalho poderão ser realizadas análises futuras com dados numéricos.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pela concessão da bolsa PIBIC sob a qual o trabalho foi desenvolvido.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVILA, R. P.; FERREIRA, C. P.; MANCERA, P. F. A. Modelagem Matemática da Doença do Caranguejo Letárgico Via Ondas Viajantes. **CNMAC**. 2010.

BACAËR, N. **A short history of mathematical population dynamics**. Bondy, France: Springer, 2010.

FREIRE, R. M. Modelagem matemática para a simulação de estratégias de controle biológico da mosca-do-mediterrâneo *C. capitata* (diptera:tephritidae), em plantações de *citrus*:“Utilização de variáveis temporais e espaciais”. Universidade Estadual Paulista. **Tese de mestrado**. 2007.

HOLMES, E. E.; LEWIS, M. A.; BANKS, J. E.; VEIT, R. R. Partial differential equations in ecology: spatial interactions and population dynamics. **Ecology**, v. 75(1), p. 17-24. 1994.

OLIVEIRA, E. D.; OLIVEIRA, C. M. D. **DOENÇAS EM MILHO: mollicutes, vírus, vetores, mancha por Phaeosphaeria**. Brasília, DF: Embrapa. 2004.

PINHEIRO, F. L. P. Influência das Leis de Escala sobre a Dinâmica de Populações. Universidade de Brasília. **Tese de mestrado**. 2010.

SOARES, M. E. S. Solução de um problema não linear do tipo reação-difusão na modelagem de dispersão de insetos. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Tese de mestrado**. 2002.

SILVA, M. V.; TERNES, S.; VILAMIU, R. G. A.; CASTRO, A.; BRAGA, G. A.; OLIVEIRA, E. **Análise biomatemática de enfezamentos na cultura do milho**. Congresso Brasileiro de Agroinformática. SBIAgro 2011. Bento Gonçalves, RS, 17 a 20 outubro, 2011.

TREJOS, D. Y.; DUARTE, I. Um modelo matemático de la propagación de *Toxoplasma gondii* (Nicolle y Manceaux, 1909), a través de gatos. **Actual Biol**, v. 27(83), p. 143-149. 2005.