



---

# Modelagem Epidemiológica do HLB em Citros

---

Guilherme Augusto Braga – ra: 071038  
IMECC – UNICAMP  
gaugustob@gmail.com

Orientadora: Sônia Ternes.  
Co-Orientador: Raphael Vilamiu.  
Embrapa Informática Agropecuária.

25 de novembro de 2011

## Resumo

O Huanglongbing (HLB) é considerado atualmente a mais grave doença da citricultura mundial, devido aos enormes prejuízos econômicos que pode causar. Este trabalho apresenta um modelo matemático epidemiológico para avaliar a evolução temporal da doença considerando o sistema planta (citros) - inseto vetor (*Diaphorina citri*). Com base na literatura determinou-se faixas de variação para os parâmetros biológicos do modelo. A partir da criação de cenários de simulação verificou-se numericamente utilizando o método LHS algumas condições que favorecem a evolução da doença.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Importância Econômica . . . . .	2
1.2	Caracterização da Doença . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Modelo Matemático</b>	<b>4</b>
2.1	Considerações Iniciais . . . . .	4
2.2	Modelo Compartmental . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Pontos de Equilíbrio e Estabilidade</b>	<b>6</b>
3.1	Pontos de Equilíbrio . . . . .	6
3.2	Análise de Estabilidade . . . . .	6
3.2.1	Ponto Trivial ( $P_1$ ) . . . . .	6
3.2.2	Ponto Não Trivial ( $P_2$ ) . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Análise Numérica do Modelo</b>	<b>8</b>
4.1	Parâmetros . . . . .	8
4.2	Simulações Numéricas . . . . .	8
4.2.1	Cenário 1: Sem retirada de Plantas. . . . .	9
4.2.2	Cenário 2: Com tempo de retirada a cada 6 meses. . . . .	10
4.2.3	Cenário 3: Com tempo de retirada a cada 3 meses. . . . .	11
4.2.4	Cenário 4: Sem retirada de Plantas, e com apenas 1 Planta infectada. . . . .	12
<b>5</b>	<b>Resultados e Conclusões</b>	<b>13</b>
5.1	Valores Numéricos . . . . .	13
5.2	Norma Brasileira . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Agradecimentos</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>15</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Importância Econômica

O Brasil é o maior produtor de citros do mundo, sendo responsável por 31,5% da produção mundial (Figura 1.1), negócio que gera mais de 400 mil empregos onde o Estado de São Paulo responsável por 80% da produção nacional de laranja (BELASQUE JR et al.,2010). Devido a essa importância econômica, a presença de doenças como o *Huanglongbing* ou HLB (ex *greening*) em plantações gera enormes preocupações.

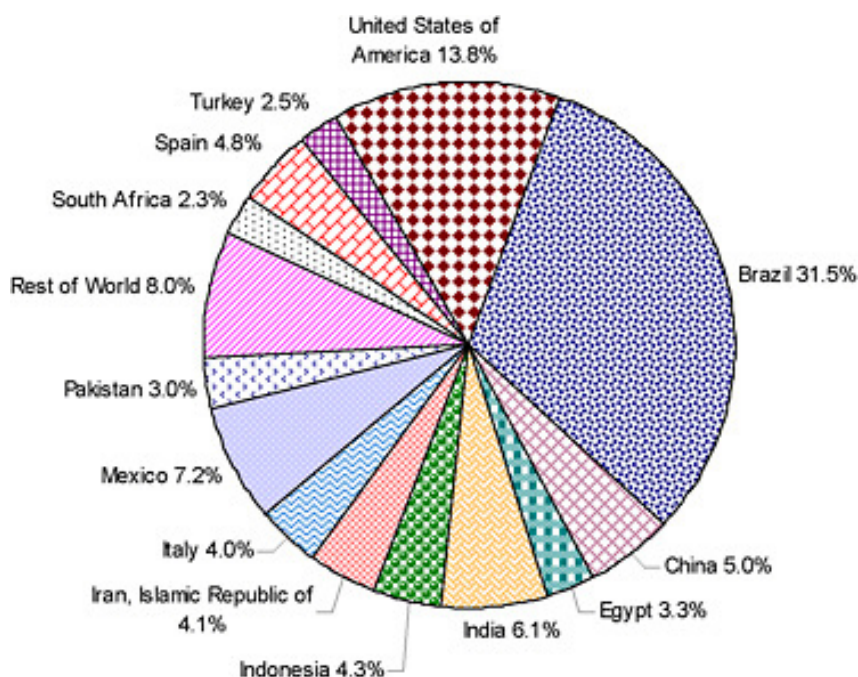


Figura 1.1: Participação brasileira na produção de Citros mundial (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2010)

### 1.2 Caracterização da Doença

Identificado inicialmente na China em 1919, o Huanglongbing, que em chinês significa "doença do dragão amarelo", se espalhou pelo mundo e está presente em mais de 40 países (BOVÉ,

2006). No Brasil, os primeiros relatos da presença do HLB datam de 2004, onde foi detectada nos pomares do Estado de São Paulo (TEIXEIRA et al.,2010).

A doença (Figura 1.2(a) e (b)) é caracterizada pela presença da bactéria *Candidatus Liberibacter* spp., microorganismo procariótico que vive e se desenvolve no floema das plantas, e que pode ser encontrada em três espécies: *Candidatus Liberibacter asiaticus*, presente em pomares da Ásia, Brasil e Estados Unidos; *Candidatus Liberibacter africanus* e *Candidatus Liberibacter americanus*, este último descoberto na região de Araraquara recentemente (BASSANEZI et al.,2005). A principal forma de transmissão para a planta se dá pelo psilídeo (*Diaphorina Citri* - Figura 1.2(c)), inseto presente nos pomares brasileiros desde a década de 40.



Figura 1.2: (a) Sintomas do HLB<sup>1</sup>, (b) Citros com a doença<sup>2</sup>, (c) Psilídeo transmissor do HLB<sup>3</sup>.

Considerada a pior doença da citricultura mundial devido à sua dificuldade de controle, o HLB já atinge 53,3% dos talhões dos pomares do estado de São Paulo, contabilizando um total de 3,8% de plantas contaminadas. No estado da Flórida, nos Estados Unidos, o número de plantas contaminadas chega a 18% (FUNDECITRUS,2011). Este trabalho apresenta um modelo matemático compartimental determinístico para analisar a dinâmica temporal da doença, considerando o sistema planta - psilídeo. Com base no sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve o modelo, foram criados cenários de simulação e avaliadas algumas condições que podem favorecer a evolução temporal da doença no campo.

---

<sup>1</sup>Fonte: <<http://www.apsnet.org/publications/apsnetfeatures/Pages/Huanglongbing.aspx>>. Acesso em: 25 nov. 2011.

<sup>2</sup>Fonte: <[http://fabianoasato.blogspot.com/2010/04/greening-hlb-huanglongbing\\_06.html](http://fabianoasato.blogspot.com/2010/04/greening-hlb-huanglongbing_06.html)>. Acesso em: 25 nov. 2011.

<sup>3</sup>Fonte: <[http://www.cleanplantshappyplants.com/products/greening\\_helper.html](http://www.cleanplantshappyplants.com/products/greening_helper.html)>. Acesso em: 25 nov. 2011.

# Capítulo 2

## Modelo Matemático

### 2.1 Considerações Iniciais

A inexistência de modelos matemáticos para avaliação do sistema citros - HLB é atribuída à complexidade da transmissão do patógeno pelo inseto vetor e é vista na literatura atual (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2010) como um desafio a ser alcançado a longo-prazo. Assim, com base nos trabalhos de Ross (BACAËR, 2010) e Vandermeer e Power (1990) para estudos da transmissão da malária em humanos e de doenças na cultura do milho, respectivamente, desenvolveu-se um modelo matemático compartimental determinístico para descrever a dinâmica da propagação do HLB no sistema citros - psilídeo *Diaphorina Citri*. Para tal, o modelo considera a fase de incubação da doença na planta, período desde a infecção da planta pelo psilídeo infectado, até o aparecimento de sintomas.

### 2.2 Modelo Compartimental

A Figura 2.1 apresenta os compartimentos considerados no modelo, que são descritos matematicamente pelo sistema de equações diferenciais em (2.1), de forma que  $C_0$  é o compartimento de plantas saudáveis,  $C_1$  é o compartimento de plantas em período de incubação,  $C_2$  é o compartimento de plantas apresentando sintomas,  $I_0$  é o compartimento de insetos saudáveis e  $I_1$  é o compartimento de insetos infectados com HLB.

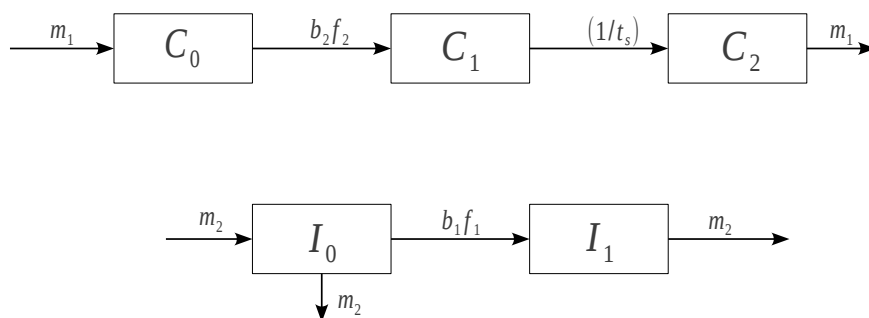


Figura 2.1: Modelo Matemático

$$\begin{cases} \frac{dC_0}{dt} = m_1C_2 - b_2f_2I_2C_0, \\ \frac{dC_1}{dt} = b_2f_2I_2C_0 - \frac{1}{t_s}C_1, \\ \frac{dC_2}{dt} = \frac{1}{t_s}C_1 - m_1C_2, \\ \frac{dI_0}{dt} = m_2N_2 - b_2f_1I_0(C_1 + C_2) - m_2I_0, \\ \frac{dI_1}{dt} = b_1f_1I_0(C_1 + C_2) - m_2I_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Fazendo a substituição  $C_0 + C_1 + C_2 = N_1$  e  $I_0 + I_1 = N_2$  podemos eliminar as equações para  $C_0$  e para  $I_0$ , e então o sistema ficará da forma:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = b_2f_2I_2(N_1 - C_1 - C_2) - \frac{1}{t_s}C_1, \\ \frac{dC_2}{dt} = \frac{1}{t_s}C_1 - m_1C_2, \\ \frac{dI_1}{dt} = b_1f_1(N_2 - I_1)(C_1 + C_2) - m_2I_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

O modelo normalizado proposto é formado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias, no qual  $c_1 = \frac{C_1}{N_1}$ ,  $c_2 = \frac{C_2}{N_1}$  e  $i_1 = \frac{I_1}{N_2}$

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = N_2b_2f_2i_1(1 - c_1 - c_2) - \frac{1}{t_s}c_1, \\ \frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{t_s}c_1 - m_1c_2, \\ \frac{di_1}{dt} = N_1b_1f_1(1 - i_1)(c_1 + c_2) - m_2i_1, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde:  $N_1$  e  $N_2$  são as densidades de populações de plantas de citros e insetos por unidade de produção (UP), respectivamente (ambos assumidos constantes);  $c_1$  é a população de plantas em estado de incubação da doença;  $c_2$  é a população de plantas sintomáticas;  $i_1$  é a população de Insetos infectados com HLB;  $b_1$  é a frequência de visitas que um psíldeo realiza por planta;  $b_2$  é a frequência de visitas que uma planta recebe por inseto;  $f_1$  é a probabilidade de aquisição de HLB pelo inseto;  $f_2$  é a probabilidade de transmissão de HLB do inseto para a planta;  $m_1$  é a taxa de remoção de plantas infectadas;  $m_2$  é a taxa de mortalidade do inseto;  $t_s$  é o tempo de incubação na planta.

# Capítulo 3

## Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

### 3.1 Pontos de Equilíbrio

O sistema de equações descrito em (2.3) em regime estacionário possui dois pontos de equilíbrio da forma  $P_i = (c_1, c_2, i_1)$ , tal que  $P_1 = (0, 0, 0)$  é a solução trivial, e a solução não trivial é dada por  $P_2 = (c_1^*, c_2^*, i_1^*)$ , onde:

$$\begin{aligned}c_1^* &= \frac{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1^2 t_s^2 + b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s) N_1 N_2 - m_1^2 m_2 t_s}{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1^2 t_s^2 + 2b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 N_2 + (b_1 f_1 m_1^2 t_s + b_1 f_1 m_1) N_1}; \\c_2^* &= \frac{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 N_2 - m_1 m_2}{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1^2 t_s^2 + 2b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 N_2 + (b_1 f_1 m_1^2 t_s + b_1 f_1 m_1) N_1}; \\i_1^* &= -\frac{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 N_2 - m_1 m_2}{((b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 + b_2 f_2 m_1 m_2 t_s + b_2 f_2 m_2) N_2}.\end{aligned}$$

### 3.2 Análise de Estabilidade

A matriz Jacobiana do Sistema é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} -b_2 f_2 i_1 N_2 - \frac{1}{t_s} & -b_2 f_2 i_1 N_2 & b_2 f_2 N_2 (1 - c_1 - c_2) \\ \frac{1}{t_s} & -m_1 & 0 \\ b_1 f_1 N_1 (1 - i_1) & b_1 f_1 N_1 (1 - i_1) & -b_1 f_1 N_1 (c_1 + c_2) - m_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

#### 3.2.1 Ponto Trivial ( $P_1$ )

Então, fazendo a substituição por  $P_1 = (0, 0, 0)$ , teremos a seguinte matriz Jacobiana

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t_s} & 0 & b_2 f_2 N_2 \\ \frac{1}{t_s} & -m_1 & 0 \\ b_1 f_1 N_1 & b_1 f_1 N_1 & -m_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$



### 3.2.2 Ponto Não Trivial ( $P_2$ )

Para a análise de estabilidade do ponto de equilíbrio  $P_2$ , fazendo uma substituição tal que

$$k_1 = \frac{f_1 b^2 m_1 t_s f_2 + f_1 b^2 f_2 - m_1 N_1 m_2 N_2}{f_1 b m_1 t_s + f_1 b + m_1 t_s m_2 N_2 + N_2 m_2}; \quad (3.3)$$

$$k_2 = \frac{f_1 b^2 m_1 t_s f_2 + f_1 b^2 f_2 - m_1 N_1 m_2 N_2}{b m_1^2 t_s^2 f_2 + 2 f_2 b t_s m_1 + m_1^2 t_s N_1 + f_2 b + m_1 N_1}; \quad (3.4)$$

A matriz jacobiana ficará da forma:

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{N_1} - \frac{1}{t_s} & -\frac{k_1}{N_1} & \frac{f_2[f_1 - k_2(m_1 t_s + 1)]}{f_1 N_1} \\ -\frac{1}{t_s} & -m_1 & 0 \\ \frac{f_1(f_2 b - k_1)}{N_2 f_2} & \frac{f_1(f_2 b - k_1)}{f_2 N_2} & -\frac{k_2(m_1 t_s + 1)}{N_2} - m_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Ainda é possível fazer mais simplificações, de maneira que tomamos  $R_1 = \frac{f_2}{N_1 f_1}$ ;  $R_2 = \frac{f_1}{N_2 f_2}$  e  $R_3 = m_1 t_s + 1$ , dessa maneira, o jacobiano para o ponto não trivial  $(c_1^*, c_2^*, i_1^*)$  é tal que:

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{N_1} - \frac{1}{t_s} & -\frac{k_1}{N_1} & R_1(f_1 b - k_2 R_3) \\ -\frac{1}{t_s} & -m_1 & 0 \\ R_2(f_2 b - k_1) & R_2(f_2 b - k_1) & -\frac{k_2 R_3}{N_2} - m_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Utilizando-se os critérios de Routh-Hurwitz (EDELSTEIN-KESHET, 1988) sobre as matrizes jacobianas resultantes foram obtidas expressões complexas, que impossibilitam a interpretação biológica dos resultados obtidos analiticamente. Desta forma, optou-se por avaliar a estabilidade dos pontos de equilíbrio por meio de simulações numéricas.

# Capítulo 4

## Análise Numérica do Modelo

### 4.1 Parâmetros

A Tabela 4.1 mostra os valores usados nas simulações para os parâmetros do modelo, com base na literatura. Ainda, a partir da análise dimensional dos parâmetros, tem-se que  $b_1 = (p'p)/N_2$  e  $b_2 = p/N_2$ , onde  $p$  é a proporção de plantas visitadas (com psilídeos) e  $p'$  é o número de psilídeos por planta visitada, com  $p$  e  $p'$  dados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros usados nas simulações.(BRAGA et al, 2011)

Parâmetros	Valores	Referência
$N_1$	2000 Plantas/UP	(FUNDECITRUS, 2010)
$p$	0.40	(LARANJEIRA, 2011) <sup>7</sup>
$p'$	1.52	(LARANJEIRA, 2011) <sup>7</sup>
$f_1$	0.30 – 0.43	(NASCIMENTO, 2010)
$f_2$	0.6833	(CAPOOR, RAO, VISWANATH, 1974)
$m_2$	$1/4 - 1/3$ meses <sup>-1</sup>	(FUNDECITRUS, 2011)
$t_s$	6 – 18 meses	(BELASQUE JR et al, 2010)

### 4.2 Simulações Numéricas

As simulações numéricas foram realizadas com o uso do software MATLAB, versão 7.8.0 (R2009a), a partir do sistema de equações diferenciais dado em (2.3). Para observar a dinâmica da incidência da doença, considerou-se diversos cenários:

<sup>7</sup>LARANJEIRA, Francisco Ferraz (Engenheiro Agrônomo, Embrapa Mandioca e Fruticultura). Comunicação pessoal, 2011.

### 4.2.1 Cenário 1: Sem retirada de Plantas.

Condições iniciais:  $c_1 = c_2 = 0.0$  e  $i_1 = 1.0$ ,  $N_2 = 1000$  e  $m_1 = 0.0$ .

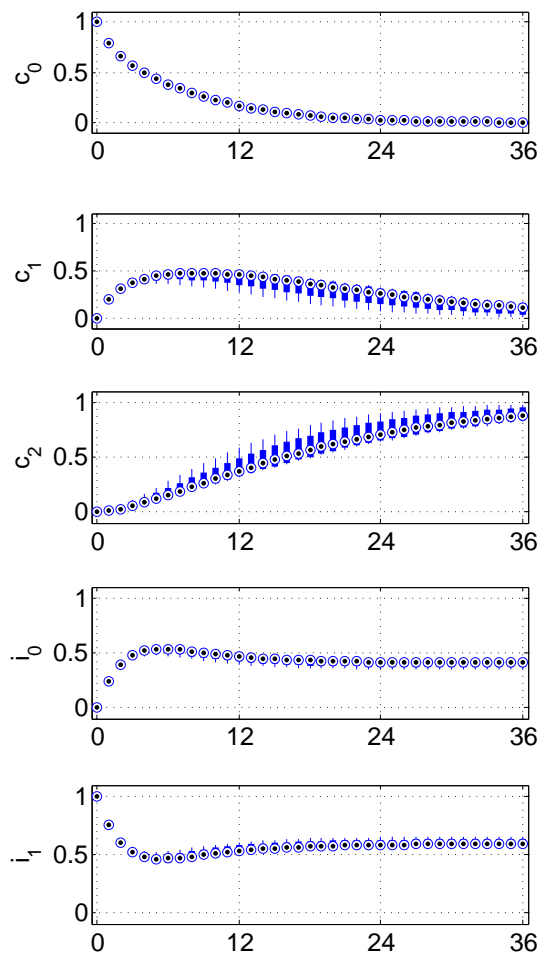


Figura 4.1: Resultado das dinâmicas geradas por LHS usando os parâmetros definidos na Tabela 4.1,  $N_2 = 1000$  e  $m_1 = 0.0$

### 4.2.2 Cenário 2: Com tempo de retirada a cada 6 meses.

Condições iniciais:  $c_1 = c_2 = 0.0$  e  $i_1 = 1.0$ ,  $N_2 = 1000$  e  $m_1 = 1/6$ .

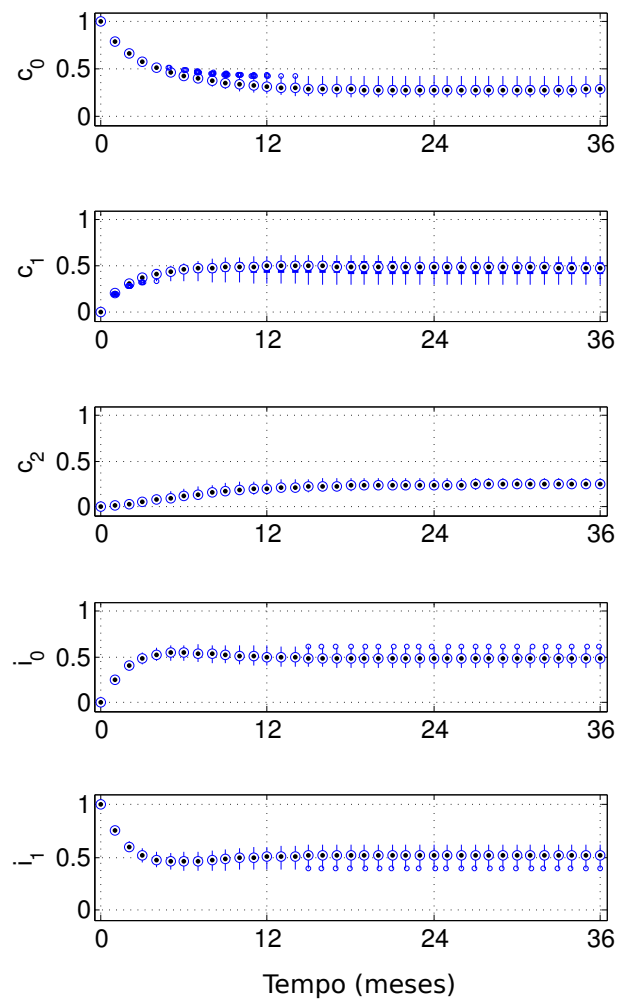


Figura 4.2: Resultado das dinâmicas geradas por LHS usando os parâmetros definidos na Tabela 4.1,  $N_2 = 1000$  e  $m_1 = 1/6$

### 4.2.3 Cenário 3: Com tempo de retirada a cada 3 meses.

Condições iniciais:  $c_1 = c_2 = 0.0$  e  $i_1 = 1.0$ ,  $N_2 = 1000$  e  $m_1 = 1/3$ .

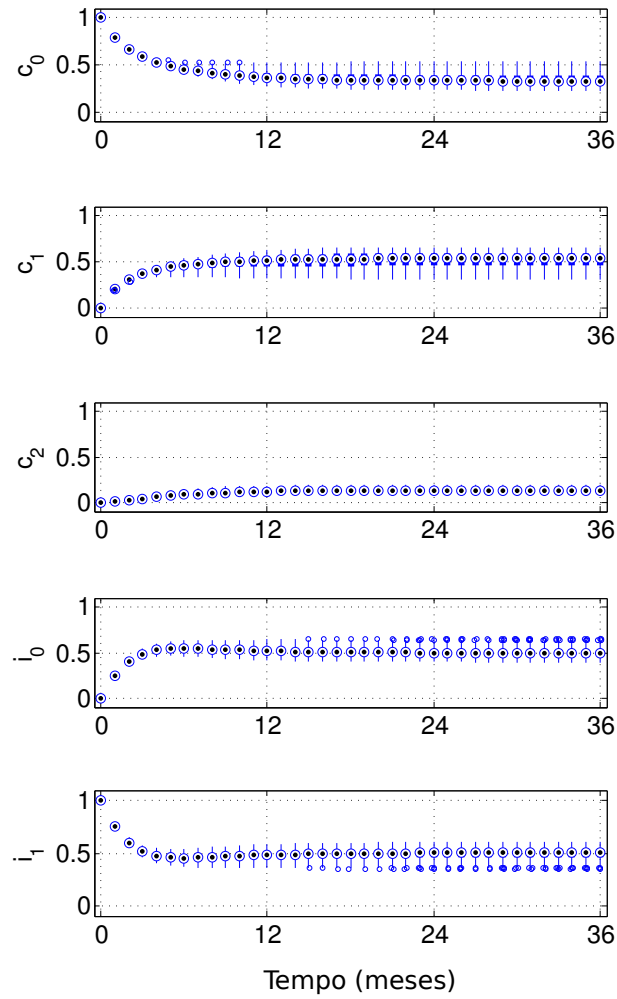


Figura 4.3: Resultado das dinâmicas geradas por LHS usando os parâmetros definidos na Tabela 4.1,  $N_2 = 1000$  e  $m_1 = 1/3$

#### 4.2.4 Cenário 4: Sem retirada de Plantas, e com apenas 1 Planta infectada.

Condições iniciais:  $c_1 = 0.0005, c_2 = 0.0$  e  $i_1 = 0.0, N_2 = 1000$  e  $m_1 = 0.0$ .

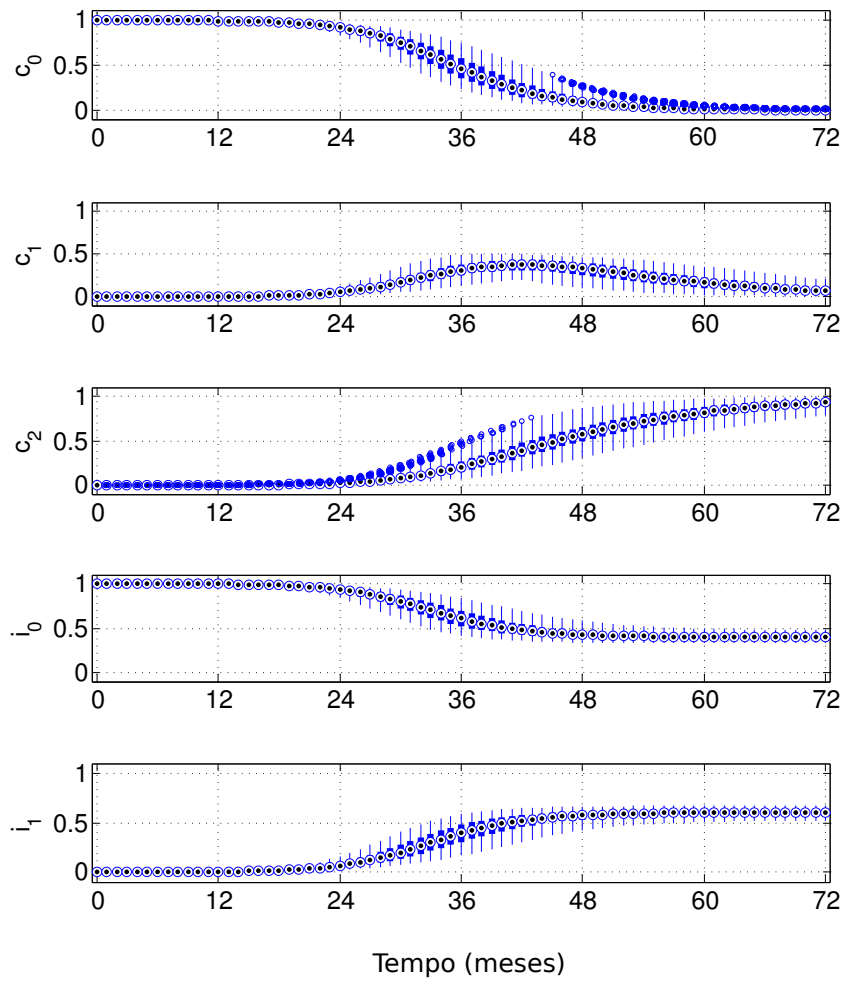


Figura 4.4: Resultado das dinâmicas geradas por LHS usando os parâmetros definidos na Tabela 4.1,  $N_2 = 1000$  e  $m_1 = 0.0$  e com apenas 1 planta infectada no talhão

# Capítulo 5

## Resultados e Conclusões

### 5.1 Valores Numéricos

Para cada um dos cenários foram realizadas 1000 simulações por LHS (*Latin Hypercube Sampling*), de forma a obter o comportamento geral da dinâmica para os valores dos parâmetros variáveis da Tabela 4.1 ( $f_1$ ,  $m_2$  e  $t_s$ ). Os resultados das simulações estão representados nas Figuras 4.1a, 4.2a, 4.3a, 4.4a, cuja análise deixa clara a importância de se remover as plantas infectadas.

Analisando a Figura 4.1a pode-se observar que se a remoção não ocorre ( $m_1 = 0.0$ ), em menos de 2 anos mais de 95% da plantação estará infectada, considerando uma plantação com todos os insetos infectados no tempo inicial. Analisando o cenário onde  $m_1 = 1/3$  e  $m_1 = 1/6$  (Figura 4.2a e Figura 4.3a, respectivamente), verifica-se uma mudança drástica na dinâmica geral se comparado com a simulação onde não há retirada de plantas.

A Simulação feita no cenário 4 mostra a gravidade da doença. Considerando um cenário onde há somente uma planta infectada e onde nenhum tipo de controle seja feito, pode-se observar que levaria por volta de 4 anos para o pomar inteiro ser contaminado.

### 5.2 Norma Brasileira

Pela análise das simulações percebe-se que a dinâmica do patossistema está intrinsicamente influenciada pela taxa de remoção das plantas infectadas, o que confirma a recomendação da Instrução Normativa no. 53 (MAPA, 2008) para a retirada de plantas assim que apresentarem sintomas. Essa norma ainda determina a eliminação das plantas da unidade de produção quando o resultado da análise das amostras laboratoriais for positivo e a UP apresentar mais de 28% de plantas sintomáticas; o modelo mostra que, quando  $c_2(t) = 0.28$ , a população de plantas sadias será de apenas 30%. Tal resultado pode ser inferido pela Figura 4.1a.

# **Capítulo 6**

## **Agradecimentos**

O autor agradece ao CNPq pela concessão da bolsa PIBIC sob a qual o trabalho está sendo desenvolvido.



# Capítulo 7

## Referências Bibliográficas

BACAËR, N. **A short history of mathematical population dynamics**. Bondy, France: Springer, 2010.

BASSANEZI, R.B.; BUSATO, L.A.; BERGAMIN FILHO, A.; AMORIM, L.; GOTTWALD, T.R.; Preliminary Spatial Pattern Analysis of Huanglongbing in São Paulo, Brazil. **Sixteenth IOCV Conference, 2005—Insect-Transmitted Procaryotes**, Cordeirópolis, v. 31, p. 53–63. 2010.

BELASQUE JR, J.; YAMAMOTO, P.T.; MIRANDA, M.P.D.; BASSANEZI, R.B.; AYRES, A.J.; BOVÉ, J.M.. Controle do huanglongbing no estado de São Paulo, Brasil. **Citrus Research & Technology**, Cordeirópolis, v. 31, p. 53–63. 2010.

BOVÉ, J.M.; Huanglongbing: A destructive, newly-emerging, century-old disease of citrus. **Journal of Plant Pathology**. v. 88, p. 7–37. 2006.

BRAGA, G. A; TERNES, S.; VILAMIU, R. G. d'A; SILVA, M. V.; CASTRO, A.; LARANJEIRA, F. F. Modelagem Matemática da Dinâmica Temporal do HLB em Citros. In: VIII Congresso Brasileiro de Agroinformática, 2011, Bento Gonçalves, RS. **Anais do VIII Congresso Brasileiro de Agroinformática**, 2011.

CAPOOR, S.P.; RAO, D.G.; VISWANATH, S.M.. Greening Disease of citrus in the Deccan Trap Country and its relationship with the vector, *Diaphorina citri* Kuwayama. **Proceedings of the 6th Conference of the Internaticional Organization of Citrus Virologists**, p. 43–49. 1974.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. Birkhäuser mathematics series. 1988.

FUNDECITRUS. GREENING: Profissionais discutem os avanços no manejo da doença. **Citricultor**. n. 1, p. 13–14, 2010.

FUNDECITRUS. Controle da *Diaphorina citri*. **Guia técnico**. 2011.

MAPA. **Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento: Instrução Normativa No. 53, de 16 de outubro de 2008.** Disponível em: <<http://www.legisweb.com.br/legislacao/?legislacao=569432>>. Acesso em: 18 Agosto.2011.

NASCIMENTO, F. E. D. **Estudos sobre aquisição e concentração de *Candidatus Liberibacter asiaticus* e *Candidatus Liberibacter americanus* em *Diaphorina citri* Kuwayama.** Dissertação de Mestrado. Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2010.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Strategic planning for the Florida citrus industry: addressing citrus greening disease.** Washington, DC: The National Academies Press, 2010. 326 p. Disponível em: <<http://www.nap.edu/catalog/12880.html>>. Acesso em: 10 jun. 2011.

TEIXEIRA, D.D.C.; WULFF, N.A.; LOPES, S.A.; YAMAMOTO, P.T.; MIRANDA, M.P.D.; SPOSITO, M.B.; JUNIOR, J.B.; BASSANEZI, R.B.. Caracterização e etiologia das bactérias associadas ao *huanglongbing*. **Citrus Research & Technology**. Cordeirópolis, v. 31, n. 2, p. 115–128, 2010.

VANDERMEER, J.; POWER, A.. An epidemiological model of the corn stunt system in central america. **Ecological Modelling**, v. 52, p. 235–248. 1990.